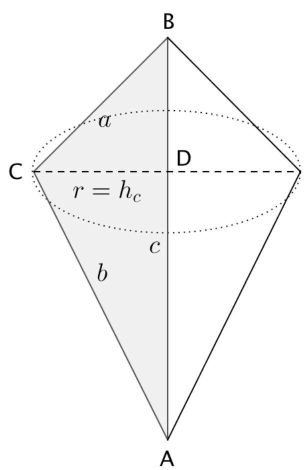
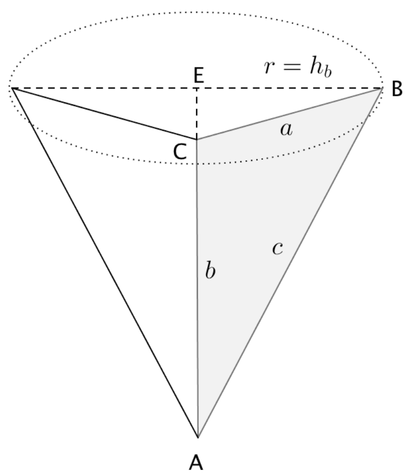
Ratkaisut 1917 – 1927

1917 Tarkastelemme kolmiota ABC, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c ja niiden vastaiset korkeudet ovat h_a, h_b ja h_c.





Kun kolmio pyörähtää sivun $c = \text{AB}$ ympäri (vasemmanpuoleinen kuvio), syntyy kaksoiskartio eli kaksi kartiota, joiden yhteisen pohjaympyrän keskipiste on D ja säde on $r = h_c$. Ylemmän kartion korkeus $\text{DB} = x$ ja tilavuus $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 x$. Alemman korkeus $\text{DA} = c - x$ ja tilavuus $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2(c - x)$. Kaksoiskartion tilavuus $V_c = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 x + \frac{1}{3}\pi r^2(c - x) = \frac{1}{3}\pi r^2 c$. Mutta kolmiossa ABC on $r = h_c$ sivun c vastainen korkeus, joten $rc = 2P$, missä P on kolmion ABC pinta-ala. Voimme siis kirjoittaa $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 c = \frac{1}{3}\pi rc \cdot r = \frac{2}{3}\pi P \cdot \frac{rc}{c} = \frac{4}{3}\pi P^2/c$.

Kun kolmio pyörähtää sivun $b = \text{AC}$ ympäri (oikeanpuoleinen kuvio) syntyy ”koverrettu” kartio, jossa pieni kartio (korkeus $\text{CE} = y$) on poistettu suuresta kartiosta (korkeus $\text{AE} = b + y$). Näillä kartioilla on yhteinen pohjaympyrä, jonka keskipiste on E ja säde $r = h_b$ on sivun b vastainen kolmion ABC korkeus. Näin ollen suuren kartion tilavuus $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2(b + y)$ ja pienen $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 y$. Kolmion pyörähtäessä sivun b ympäri on syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus $V_b = V_1 - V_2$ eli $V_b = \frac{1}{3}\pi r^2(b + y) - \frac{1}{3}\pi r^2 y = \frac{1}{3}\pi r^2 b$. Koska $r = h_b$, niin jälleen on $rb = 2P$, joten $V_b = \frac{1}{3}\pi rb \cdot r = \frac{2}{3}\pi P \cdot rb/b = \frac{4}{3}\pi P^2/b$.

Samoin voidaan osoittaa, että pyörähdyksen tapahtuessa kolmannen sivun $a =$ AB ympäri syntyy kappale, jonka tilavuus $V_a = \frac{4}{3}\pi P^2/a$. Näemme siis, että pyörähdyskappaleen tilavuus on kääntäen verrannollinen siihen sivuun, jonka ympäri kolmio pyörähtää. Pienin tilavuus saadaan pyörähdyksessä suurimman sivun ympäri. MOT[3]

1919 Juurien ominaisuuksien perusteella on $\alpha + \beta = -2b/a$ ja $\alpha\beta = c/a$, joten

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{4b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} \\ &= \frac{4(b^2 - ac)}{a^2}.\end{aligned}$$

1920 Olkoon a se prosenttiosuus koko työstä, jonka A saa päivässä tehdyksi ja b vastaava prosenttiosuus B:lle. Tehtävän tiedoista saamme yhtälöparin

$$\begin{cases} 5a + 9b = 50 \\ 7{,}5(a + b) = 50 \end{cases},$$

josta $a = 2{,}5$ ja $b = 25/6$.

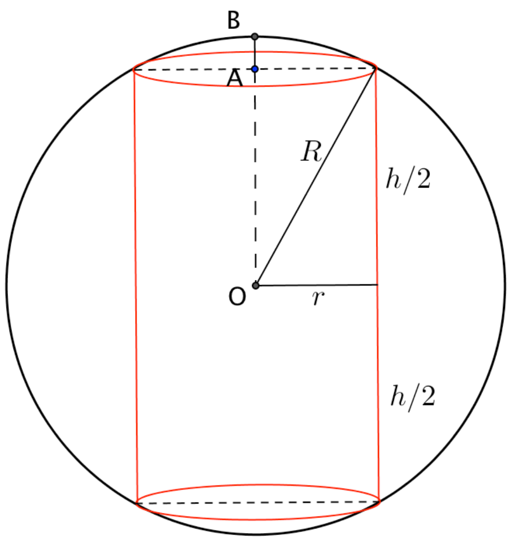
Koko työhön A:lta kuluisi siten $100/2{,}5 = 40$ päivää ja B:ltä $100/(25/6) = 24$ päivää.

1921 Olkoot kuvion mukaisesti R pallon säde ja r sylinterin[4] pohjaympyrän säde sekä h sylinterin korkeus, joka on samalla jäljellejäävän pallorenkaan korkeus.

---

[3] Todistustehtävien loppuun oli tapana merkitä lyhenne MOT (Mikä Olikin Todistettava).

[4] lieriön



Sylinterin ”hattuina” olevien kalottien korkeus $k = \mathrm{AB} = R - h/2$. Pallorenkaan V_{re} tilavuus saadaan vähentämällä pallon tilavuudesta $V_p = \frac{4}{3}\pi R^3$ sylinterin tilavuus $V_s = \pi r^2 h$ sekä kalotin tilavuus $V_k = \frac{1}{6}\pi k(3r^2 + k^2)$ kerrottuna kahdella. Tällöin

$$V_{re} = V_p - V_s - 2V_k$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi k(3r^2 + k^2)$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi r^2 h - \pi r^2 k - \frac{1}{3}\pi k^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi r^2 (h + k) - \frac{1}{3}\pi k^3 \qquad [h + k = 2R - k]$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi r^2 (2R - k) - \frac{1}{3}\pi k^3 \qquad [\text{ sijoita } r^2 = R^2 - \frac{1}{4}h^2 \text{ ja } k = R - \frac{h}{2}]$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi(R^2 - \frac{1}{4}h^2)\left(R + \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\pi\left(R - \frac{h}{2}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi R^3 - \frac{1}{2}\pi R^2 h + \frac{1}{4}\pi R h^2 + \frac{1}{8}\pi h^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 + \frac{1}{2}\pi R^2 h - \frac{1}{4}\pi R h^2 + \frac{1}{24}\pi h^3$$

$$= \frac{1}{8}\pi h^3 + \frac{1}{24}\pi h^3 = \frac{4}{24}\pi h^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3.$$

Tulos osoittaa, että pallorenkaan tilavuus V_{re} on sama kuin sen pallon tilavuus, jonka säteenä on

$h/2$ ja halkaisijana h. MOT

1922 Tasaisen jarruttamisen aikana junan keskinopeus on alkunopeuden 50 km/h ja loppunopeuden 0 km/h keskiarvo eli 25 km/h = 25000 m / 60 min = $416\frac{2}{3}$ m/min. Jarrutusmatkaan kuluva aika on matka jaettuna keskinopeudella eli 300 m / ($416\frac{2}{3}$ m/min) = $\frac{18}{25}$ min. Ilman jarrutusta samaan matkaan olisi kulunut puolet tuosta ajasta eli $\frac{9}{25}$ minuutissa. Jarrutuksesta johtuva ajanhukka on siis $\frac{9}{25}$ min.

Kahden minuutin mittaisen tasaisen kiihdytyksen aikana keskinopeus on myös 25 km/h, joten kiihdytysmatka olisi kaksinkertaisella täydellä vauhdilla taitettu puolessa tuosta ajasta eli 1 minuutissa. Kiihdytyksen aiheuttama ajanhukka on siis 1 min.

Kun otetaan vielä huomioon pysäkillä seisomiseen kuluva aika (1 minuutti), niin pysähdyksestä aiheutuva ajanhukka on kaikkiaan $2\frac{9}{25}$ minuuttia eli sekunnin tarkkuudella 2 minuuttia 22 sekuntia.

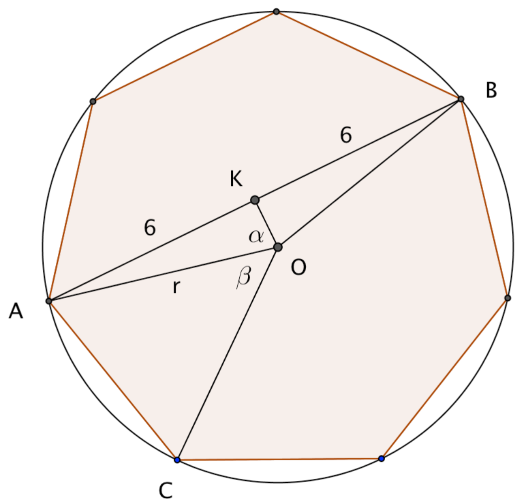
1923 Yhtälön diskriminantin

$$D = (a-b)^2 - 4(a+b)(a-b) = (a-b)(a-b+4a+4b)$$

$$= (a-b)(5a+3b)$$

täytyy olla nolla. Näin on jos $a = b$ tai $a = -\frac{3}{5}b$.

1924 Seitsenkulmion pinta-ala on $7P$, missä P on keskuskolmion AOC pinta-ala.



Keskuskolmion AOC pinta-ala $P = \frac{1}{2}r^2 \sin\beta$, missä $\beta = 2\pi/7$. Kolmiosta AOK saadaan $\sin\alpha = 6/r$ ja edelleen $r = 6/\sin\alpha$, missä $\alpha = 3\pi/7$. Seitsenkulmion pinta-ala on siten

$$7P = \frac{7}{2}r^2 \sin\beta$$

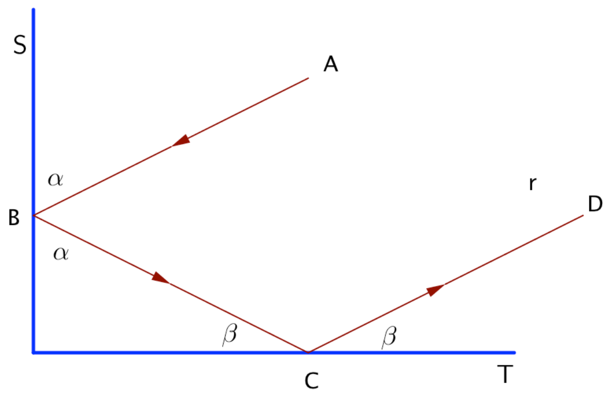
$$= \frac{7}{2}\left(\frac{6}{\sin\alpha}\right)^2 \sin\beta$$

$$= \frac{126 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)} \qquad [\text{pinta} - \text{alan tarkka arvo}]$$

$$\approx 103{,}6\ \text{m}^2. \qquad [\text{pinta} - \text{alan likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella}]$$

Huomautus: Likiarvo on tässä saatu helposti laskimella. Ne tulivat kouluissa käyttöön vasta 1970-luvulla. Sitä ennen tällaiset likiarvot laskettiin trigonometristen logaritmitaulukoiden avulla. Niistä löytyivät kulmien sinien 10-kantaiset logaritmit kokonaisille asteluvuille. Jos kulma osui kokonaisten asteiden väliin (kuten tässä esimerkiksi $\beta \approx 51{,}4°$), niin tarkkuuden parantamiseksi käytettiin lineaarista interpolointia (suomeksi ”välystelyä”).

1925 Kuvio esittää valonsäteen kulkua peilien leikkaussuoran normaalitasossa. Pisteestä A lähtevä säde osuu peiliin S pisteessä B. Heijastunut säde osuu peiliin T pisteessä C ja heijastuu pisteeseen D.



Heijastuslaista seuraa, että säteet AB ja BC muodostavat yhtä suuret kulmat α peilin S kanssa. Samasta syystä säteet BC ja CB muodostavat yhtä suuret kulmat β peilin T kanssa. Kuvion alanurkkaan muodostuu suorakulmainen kolmio, jossa α ja β ovat terävinä kulmina. Näin ollen $\beta = 90° - \alpha$. Kulma ABC on $180° - 2\alpha$ ja kulma BCD on $180° - 2\,\beta = 180° - 2\,(90° - \alpha) = 2\alpha$. Kulmat ABC ja BCD ovat siis suplementtikulmia, joten kulma ABC on yhtä suuri kuin sen kanssa samankohtainen kulman BCD vieruskulma (ei piirretty kuvioon). Suora BC leikkaa tulevaa sädettä AB ja lähtevää sädettä CD siten, että samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret. Siksi suorat AB ja CD ovat yhdensuuntaisia. MOT

1926 On ratkaistava yhtälö $\tan x = \cos x$. Alla ratkaisun vaiheet.

$$\tan x = \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x$$

$$\sin x = \cos^2 x$$

$$\sin x = 1 - \sin^2 x \qquad [\text{merkitään } y = \sin x]$$

$$y = 1 - y^2 \qquad [-1 \leq y \leq 1]$$

$$y^2 + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad [\text{vain + kelpaa}]$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), 0° < x < 90°.$$

Laskimesta saadaan likiarvo $x \approx 38{,}2°$, joka on ainoa ratkaisu välillä $0° < x < 90°$.

Huomautus: Vuoden 1926 kokelaalla ei ollut laskinta. Ratkaisukulman likiarvo piti etsiä trigonometristen funktioiden taulukosta. Sitä ennen hän joutui laskemaan käsin likiarvon saadulle sinifunktion arvolle $(\sqrt{5}-1)/2$. Tämä onnistui melko vaivattomasti ottamalla neliöjuurien taulukosta desimaalilikiarvo luvulle $\sqrt{5}$. Kulmavastaukset vaadittiin tuolloin asteiden, minuuttien ja sekuntien avulla lausuttuna eli tässä tapauksessa muodossa $x \approx 38°10'18''$.

1927 Jaksollinen desimaaliluku $a = 0{,}578703703\ldots$ voidaan esittää murtolukuna joko ilmaisemalla se päättymättömänä geometrisena sarjana tai tässä tapauksessa yksinkertaisemmin laskemalla erotus

$$999a = 1000a - a = 578{,}703703703703\ldots - 0{,}578703703\ldots$$

$$= 578{,}703 - 0{,}578 = 578{,}125 = \frac{578125}{1000},$$

josta

$$a = \frac{578125}{999000} = \frac{125}{216},$$

missä lopullinen muoto on saatu supistamalla kaikki osoittajan ja nimittäjän yhteiset tekijät.

Harjaantunut silmä tunnistaa osoittajan 125 ja nimittäjän 216 lukujen 5 ja 6 kuutioksi. Näin ollen luvun a kuutiojuuri on 5/6, jolle saadaan jakolaskulla jaksollinen desimaalikehitelmä 0,8333… .

Huomautus: Tehtävän vaatimus ”logaritmeja käyttämättä” vastaisi nykyaikana vaatimusta ”ilman laskimen apua”.