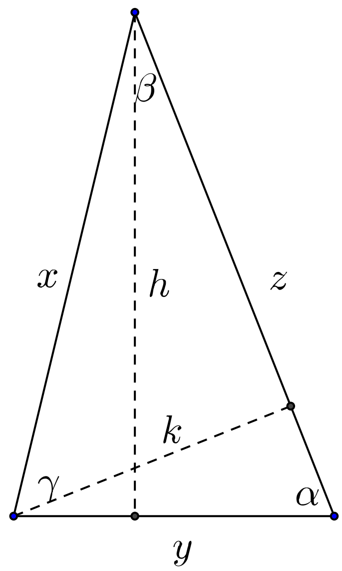
RATKAISUT 1928 – 1937

1928. Olkoon suorakulmion erisuuntaisten sivujen pituudet a ja b sekä neliön sivun pituus c. Tehtävä on mielekäs vain, jos suorakulmio ei ole neliö, joten oletetaan, että $a \neq b$. Suorakulmion piiri on $2(a+b)$ ja ala ab. Neliön piiri on $4c$ ja ala c^2. On osoitettava, että $2(a+b) > 4c$ eli että $a+b-2c > 0$. Alojen yhtäsuuruudesta seuraa, että $ab = c^2$, joten $c = \sqrt{ab}$. Nyt

$$a+b-2c = a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}\,)^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b}\,)^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b}\,)^2 > 0,$$

koska $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$ oletuksen perusteella. Väite on todistettu.

1929. Piirretään kolmioon korkeusjana h kulmasta β ja korkeusjana k kulmasta γ oheisen kuvion mukaisesti. Tässä $\alpha = 68^\circ 12' 36''$, $\beta = 35^\circ 24' 45''$ ja $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 76^\circ 22' 39''$. On määrättävä kolmion sivut x, y ja z, kun tunnetaan vielä kolmion ala $t = 38{,}256$ m^2.



Kuviosta nähdään, että

$$x \sin\gamma = h = z \sin\alpha \quad \text{ja} \quad k = x \sin\beta$$

Kolmion ala $t = \frac{1}{2}hy = \frac{1}{2}kz$. Sijoittamalla tähän h:n ja k:n lausekkeet saadaan yhtälöt

$$t = \frac{1}{2}xy\sin\gamma,\ t = \frac{1}{2}yz\sin\alpha,\ t = \frac{1}{2}xz\sin\beta.$$

Ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä saadaan

$$\frac{1}{2}xy\sin\gamma = \frac{1}{2}yz\sin\alpha \implies x = z\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Sijoitetaan saatuun x:n lausekkeeseen kolmannesta yhtälöstä ratkaistu z.

$$x = \frac{2t}{x\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \iff x^2 = \frac{2t\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma},$$

joten

$$x = \sqrt{\frac{2t\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}.$$

Sijoittamalla tähän alan ja kulmien arvot saadaan $x \approx 11{,}248672$.

Lähtemällä samalla tavalla toisesta ja kolmannesta yhtälöstä saadaan

$$y = \sqrt{\frac{2t\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}} \approx 7{,}009218.$$

Vastaavasti saadaan lähtemällä ensimmäisestä ja kolmannesta yhtälöstä

$$z = \sqrt{\frac{2t\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}} \approx 11{,}755860.$$

Vastaus: Sivujen pituudet ovat 7,0092 m, 11,249 m ja 11,756 m.

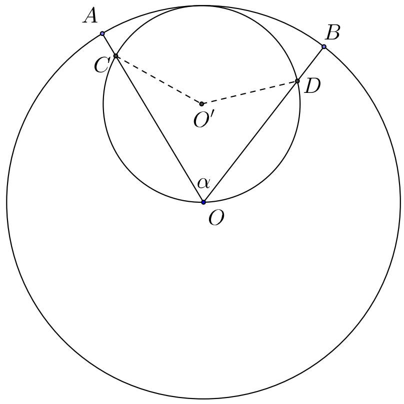
Huomautus 1: Sivu x ei ole mitenkään erityisasemassa. Näin ollen riittää laskea x:n lauseke. Siitä saadaan y yksinkertaisesti muuttamalla merkinnät vastaaviksi, ts. korvaamalla α kulmalla β, β kulmalla γ ja γ kulmalla α. Edelleen, y:stä saadaan z korvaamalla β kulmalla γ, γ kulmalla α ja α kulmalla γ.

Huomautus 2: Laskua varten voidaan asteluvuissa olevat minuutit ja sekunnit tarvittaessa muuttaa asteen osiksi, onhan $60'' = 1'$ ja $60' = 1^\circ$.

Huomautus 3: Vuonna 1929 ei ollut laskimia, joten trigonometristen funktioiden arvot oli katsottava taulukosta ja numeeriset laskut oli suoritettava logaritmien avulla käyttäen logaritmitauluista saatavia taulukoituja logaritmien arvoja. Kussakin vaiheessa pystyttiin laskemaan korkeintaan viiden merkitsevän numeron tarkkuudella.

1930. On osoitettava, että oheisessa kuviossa koveran kulman $\alpha = \angle AOB$ määräämät kaaret AB ja CD ovat yhtä pitkät.
Jos r on suuremman ympyrän säde, on kaaren AB pituus

$$l(AB) = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi r.$$

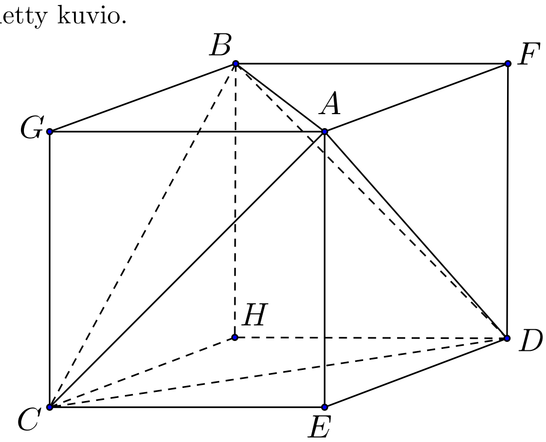


Tarkastellaan sitten pienempää, O'-keskistä ympyrää. Sen säde on konstruktion mukaan $\frac{1}{2}r$. Koska tämä ympyrä kulkee O:n kautta, on kulma $\alpha = \angle COD$ tämän ympyrän kehäkulma. Koska kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta, on keskuskulma $\angle CO'D = 2\alpha$. Näin ollen ympyrän kaaren CD pituus on

$$l(CD) = \frac{2\alpha}{360} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}r = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi r = l(AB).$$

On osoitettu, että kaaret AB ja CD ovat yhtä pitkät.

1931. Aloitetaan piirtämällä pyydetty kuvio.



Kysytyn tetraedrin särmät ovat AB, AC, AD ja CD. Jos kuution särmä on a, on tetraedrin jokainen särmä $a\sqrt{2}$. Koska kaikki särmät ovat samanpituisia, on tetraedri säännöllinen.

Kuutiosta jää tetraedrin ulkopuolelle yhtenevät pyramidit $ABGC$, $CDEA$, $ABFD$ ja $CDHB$. Kussakin on pohjana kuution sivuneliön puolikas alaltaan $\frac{1}{2}a^2$ ja korkeutena kuution särmä a. Näin ollen kunkin pyramidin tilavuus on

$$V_P = \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^3.$$

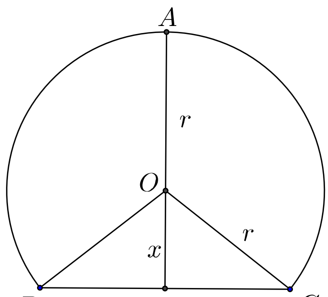
Koska kuution tilavuus on a^3, on tetraedrin tilavuus

$$V_T = a^3 - 4V_P = a^3 - \frac{4}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$$

eli se on yksi kolmasosa kuution tilavuudesta.

Vastaus: Tetraedrin ja kuution tilavuuksien suhde on $\frac{1}{3}$.

1932. Kysessä on ääriarvotehtävä, jonka ratkaisemiseksi on muodostettava pallosektorin kokonaispinta-ala yhden muuttujan x funktiona.



r-säteinen pallosektori syntyy, kun oheisessa tasokuviossa O-keskinen ympyräsektori BAC pyörähtää akselin OA ympäri. On helppo nähdä, että kokonaisalaltaan suurimman pallosektorin on oltava vähintään puolipallo, joten tilanne on kuvion kaltainen.

Valitaan muuttujaksi x pallosektorin pohjaympyrän etäisyys keskipisteestä O, $0 \leq x < r$. Pallosektorin kokonaispinta muuodostuu pyörähdyskaaren BAC tuottamasta kalotista ja pyörähdyskolmion BCO tuottaman kartion vaipasta.

Kalotin pinta-ala on

$$A_K = 2\pi r \cdot AD = 2\pi r(r + x)$$

ja pyörähdyskartion vaipan ala

$$A_V = \pi \cdot CO \cdot CD = \pi r\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Pallosektorin kokonaispinta-ala on siis

$$A(x) = A_K + A_V = 2\pi r(r+x) + \pi r\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Tämä on haluttu yhden muuttujan maksimoitava funktio. Ääriarvon määräämiseksi haetaan funktion derivaatan nollakohdat. Derivaatta on

$$A'(x) = 2\pi r + \frac{1}{2}\pi r \cdot \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \pi r\left(2 - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right).$$

Siten

$$A'(x) = 0 \iff 2 - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \iff \frac{2\sqrt{r^2 - x^2} - x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \iff$$
$$x = 2\sqrt{r^2 - x^2} \iff x^2 = 4(r^2 - x^2) \iff x = \frac{2}{\sqrt{5}}r \approx 0{,}89r.$$

Edellisen perusteella

$$A'(x) > 0 \iff x < 2\sqrt{r^2 - x^2} \iff x < \frac{2}{\sqrt{5}}r$$
$$A'(x) < 0 \iff x > 2\sqrt{r^2 - x^2} \iff x > \frac{2}{\sqrt{5}}r.$$

Näin ollen pinta-alan funktio $A(x)$ saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa.

Vastaus: Suurin kokonaispinta-ala on puolipalloa suuremmalla pallosektorilla, jonka kalotin pohjaympyrän tason etäisyys pallon keskipisteestä on $\frac{2}{\sqrt{5}}r$.

Huomautus: Vanhoissa oppikirjoissa tällainen tehtävä ratkaistiin ilman derivaattaa esimerkiksi seuraavalla tavalla. Funktion $A(x) = 2\pi r(r+x) + \pi r\sqrt{r^2 - x^2}$ suurin arvo on sama kuin funktion $y = 2x + \sqrt{r^2 - x^2}$ suurin arvo. Kun yhtälöstä $\sqrt{r^2 - x^2} = y - 2x$ ratkaistaan neliöönkorotuksen kautta x, saadaan

$$x = \frac{2y \pm \sqrt{5r^2 - y^2}}{5}.$$

Suurin arvo saadaan, kun $5r^2 - y^2 = 0$ eli suurin arvo on $y = \sqrt{5}\,r$. Vastaava x:n arvo on $x = \frac{2}{5}y = \frac{2}{\sqrt{5}}r$.

1933. Ratkaistaan ensin tarvittava suorien leikkauspiste yhtälöparista

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 9x + 6y + 7 = 0. \end{cases}$$

Kertomalla ensimmäinen yhtälö kolmella ja laskemalla yhteen saadaan x:lle yhtälö

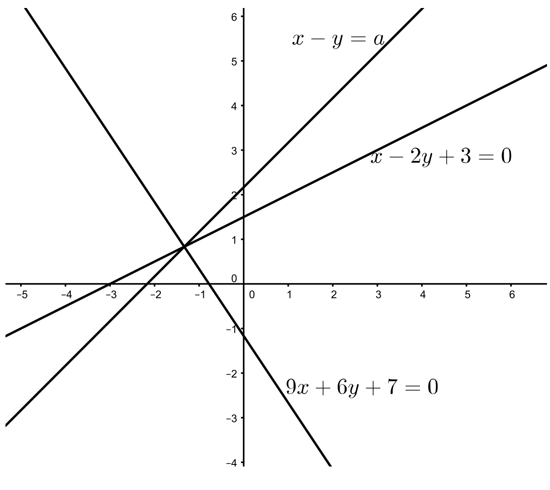
$$12x + 16 = 0 \implies x = -\frac{4}{3}.$$

Sijoittamalla saatu x:n arvo ensimmäiseen yhtälöön saadaan

$$-\frac{4}{3} - 2y + 3 = 0 \implies y = \frac{5}{6}.$$

Leikkauspiste on siis $(-\frac{4}{3}, \frac{5}{6})$. Suora $x - y = a$ kulkee tämän pisteen kautta, jos pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön. Tästä saadaan määrättyä a.

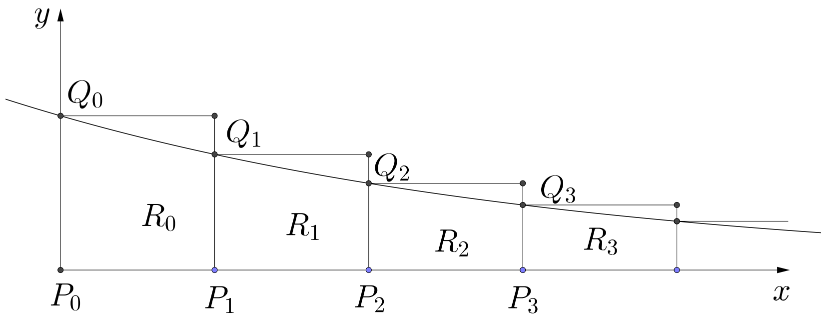
$$-\frac{4}{3} - \frac{5}{6} = a \implies a = -\frac{13}{6}.$$



Piirtämällä suorat koordinaatistoon käyttäen arvoa $a = -\frac{13}{6}$ nähdään, että $x - y = a$ todella kulkee leikkauspisteen kautta.

Vastaus: $a = -\frac{13}{6}$.

1934. Hahmotellaan tilanteesta mallikuvio.



Tehtävänannon mukaan $P_n = (n, 0)$ ja $Q_n = (n, (\frac{3}{4})^n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Janojen P_nQ_n pituudet ovat

$$P_0Q_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1,\ P_1Q_1 = \frac{3}{4},\ P_2Q_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2,\ \ldots,\ P_nQ_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n, \ldots.$$

Jokaisen suorakulmion R_n kannan P_nP_{n+1} pituus on yksi. Suorakulmioiden aloiksi $A(R_n)$ saadaan

$$A(R_0) = 1,\ A(R_1) = \frac{3}{4},\ A(R_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2,\ A(R_3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3,\ \ldots$$

eli yleisesti

$$A(R_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.$$

Pinta-alojen summa on siis

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A(R_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Tämä on päättymätön geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q = \frac{3}{4}$. Koska $q < 1$, suppenee sarja ja sen summa on

$$S = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$

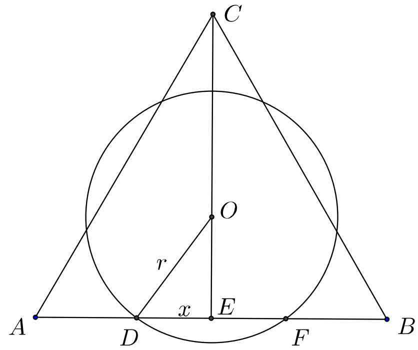
Vastaus: Pinta-alojen summa on 4.

1935. Jos luvut ovat a ja b, on $a = (1 + \frac{p}{100})b$. On laskettava, kuinka monta prosenttia a^2 on suurempi kuin b^2. Kysytty prosenttiluku on

$$\begin{aligned} 100 \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} &= 100\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) = 100\left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \frac{b^2}{b^2} - 1\right) \\ &= 100\left(1 + \frac{2p}{100} + \frac{p^2}{100^2} - 1\right) = 2p + \frac{p^2}{100}. \end{aligned}$$

Vastaus: $2p + \frac{1}{100}p^2$ prosenttia suurempi.

1936. Tasasivuisen kolmion keskipiste on sen korkeusjanojen leikkauspiste. Hahmotellaan tilanteesta mallikuvio. Symmetrian vuoksi riittää tarkastella vain kolmion sivua AB ja ympyrän siitä erottamaa osaa DF.



Olkoon kolmion sivun pituus a ja ympyrän säde r sekä $x = DE$ puolikas janasta DF. Haetaan x:lle esitys a:n funktiona suorakulmaisen kolmion ODE avulla.

Koska kolmio ABC on tasasivuinen, on sen pinta-ala $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Ympyrän ala on πr^2. Alojen yhtäsuuruudesta saadaan yhteys

$$\pi r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \iff r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}a^2.$$

Korkeusjana $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Korkeusjanojen leikkauspiste O jakaa korkeusjanan suhteessa $1 : 2$, joten

$$OE = \frac{1}{3}CE = \frac{1}{2\sqrt{3}}a.$$

Suorakulmaisesta kolmiosta ODE saadaan nyt

$$x^2 = r^2 - OE^2 = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}a^2 - (\frac{1}{2\sqrt{3}}a)^2 = (\frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{12})a^2 \implies$$
$$x = a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{12}}.$$

Kysytty suhde on

$$\frac{DF}{AB} = \frac{2x}{a} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3}} \approx 0{,}4669.$$

Vastaus: $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3}} \approx 0{,}47$.

1937. Logaritmin määritelmän mukaan $\log_a b = c \iff a^c = b$. Olkoon siis luku x niin, että $\log_3 x = y$ ja $\log_2 x = z$. Tehtävän mukaan $y = z - 1$, joten

$$3^y = x = 2^z \iff 3^{z-1} = 2^z.$$

Ottamalla viimeisestä vaiheesta puolittain logaritmit saadaan

$$(z-1)\log 3 = z\log 2 \iff z = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2} = \frac{\log 3}{\log \frac{3}{2}}.$$

Siis

$$x = 2^z = 2^{\frac{\log 3}{\log (3/2)}} \approx 6{,}54100$$

Vastaus: Luku on $2^{\frac{\log 3}{\log (3/2)}} \approx 6{,}54100$.

Huomautus 1: Luvun tarkka arvo ei riipu siinä olevan logaritmin kantaluvusta.

Huomautus 2: Vuonna 1937 ei ollut laskimia, joten vastauksen likiarvo laskettiin käyttäen taulukoituja logaritmien arvoja eli ns. logaritmitauluja. Kussakin vaiheessa pystyttiin laskemaan korkeintaan viiden merkitsevän numeron tarkkuudella.