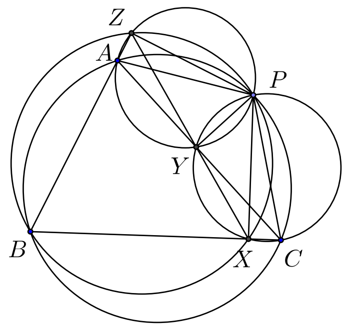
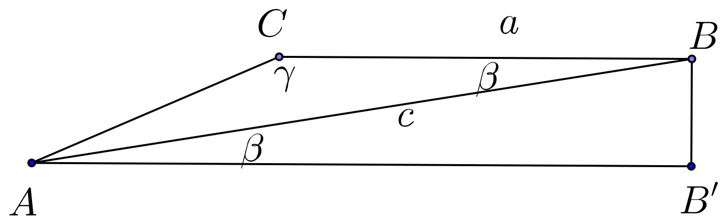
Ratkaisuja

1938. *Annetun kolmion ympäri piirretyn ympyrän kehän mielivaltaisesta pisteestä piirretään kolmion sivuja (tai niiden jatkeita) vastaan normaalit. Todista, että normaalien kantapisteet ovat samalla suoralla viivalla.*



Ratkaisu. Olkoon kolmio ABC ja P sen ympärysympyrän piste. Voidaan olettaa, että P on sillä kaarista $\overset{\frown}{AC}$, jolla B ei ole. Olkoot X, Y ja Z P:n kohtisuorat projektiot suorilla BC, CA ja AB. Koska kulmat $\angle BXP$ ja $\angle PZB$ ovat suoria, kulma $\angle XPZ$ on kulman $\angle ABC$ suplementtikulma. Koska $ABCP$ on jännenelikulmio, myös kulma $\angle APC$ on kulman $\angle ABC$ suplementtikulma. Tästä seuraa, että $\angle APZ = \angle CPX$. Koska kulmat $\angle PYC$ ja $\angle PXC$ ovat suoria, $PYXC$ on jännenelikulmio ja $\angle CYX = \angle CPX = \angle APZ$. Mutta koska myös kulmat $\angle PZA$ ja $\angle PYA$ ovat suoria, $ZAYP$ on jännenelikulmio ja siis $\angle AYZ = \angle APZ$. Kaikkiaan siis $\angle XYC = \angle ZYA$. Jännenelikulmion kulmia tarkastelemalla on helppo vakuttua siitä, etä Z ja X eivät voi olla samalla puolella suoraa AC. Siis XYZ on suora. [Suora XYZ tunnetaan kolmion ABC ympärysympyrän pisteeseen P liittyvänä *Simsonin suorana*. Nimi johtuu vuosina 1687–1768 eläneestä englantilaisesta *Robert Simsonista*. Ei kuitenkaan tiedetä, että Simson olisi ollut missään tekemisissä mukaansa nimetyn suoran kanssa.]

1939. *Lentokone kulkee vaakasuoraan* 252 *km:n nopeudella tunnissa suoraan etelään. Maassa olevasta paikasta* A *havaitaan lentokone pohjoisessa kaksi kertaa* 1 *min* 12 *sek:n väliajalla, ensi kerran korkeuskulmassa (= kulma tähystyssuunnan ja vaakasuoran tason välillä)* $7^\circ\,6'\,24''$*, toisen kerran korkeuskulmassa* $32^\circ\,0'\,0''$*. Miten korkealla lentokone lensi? Laske myös sen etäisyys A:sta ensimmäisenä havaintohetkenä.*

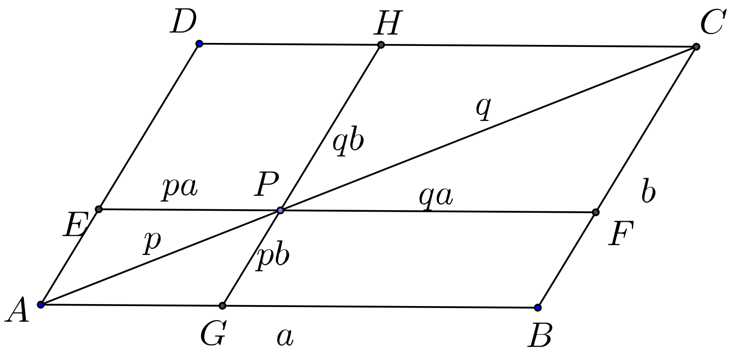


Ratkaisu. Olkoon lentokone ensimmäisen havainnon hetkellä pisteessä B ja toisen havainnon hetkellä pisteessä C. Olkoon vielä B' pisteen B kohtisuora projektio vaakatasolle. Koska lentokoneen nopeus on $\dfrac{252}{3{,}6}$ m/s ja havaintohetkien väliä on 72 s, $BC = a = 20 \cdot 252 = 5040\,\text{m}$. Kolmiossa ABC on $\angle ABC = \beta = 7^\circ\,6'\,24''$ ja $\angle BCA = \gamma = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$, joten $\angle CAB = \alpha = 32^\circ - 7^\circ\,6'\,24'' = 24^\circ\,53'\,36''$. Sinilauseesta saadaan

$$AB = c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}a.$$

Kun tähän sijoitetaan lukuarvot, saadaan $c = 6345\,\mathrm{m}$. Lentokorkeus on $BB' = c \cdot \sin\beta = 785\,\mathrm{m}$.

1939. *Suunnikkaan lävistäjän mielivaltaisen pisteen kautta piirrettään suunnikkaan sivujen suuntaiset suorat. Todista, että niistä neljästä suunnikkaasta, joihin annettu suunnikas täten jakautuu, ne kaksi, joiden lävitse lävistäjä ei kulje, ovat pinta-alaltaan yhtä suuret.*



Ratkaisu. Olkoon suunnikas $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$. Olkoon P lävistäjän AC piste. Leikatkoon P:n kautta kulkeva AB:n suuntainen suora AD:n ja BC:n pisteissä E ja F ja BC:n suuntainen suora AB:n ja CD:n pisteissä G ja H. Tehtävänä on osoittaa, että suunnikkaat $EPHD$ ja $GBFP$ ovat sama-alaiset. Piste P jakaa lävistäjän AC suhteessa $p : q$, missä $0 < p < 1$. Esimerkiksi yhdenmuotoisten kolmioiden pareista PEA, PFC ja PAG, PCH nähdään, että P jakaa myäs janat EF ja GH suhteessa $p : q$. Suunnikkaan $EPHD$ ala on $PE \cdot PH \cdot \sin(\angle EPH) = pa \cdot qb \cdot \sin(\angle EPH) = pqab \sin(\angle EPH)$ ja suunnikkaan $GBFP$ ala on $PG \cdot PF \cdot \sin(\angle FPG) = pb \cdot qa \cdot \sin \angle FPG) = pqab \sin(\angle FPG)$. Koska $\angle EPH$ ja $\angle FPG$ ovat ristikulmina yhtä suuret, suunnikkailla $EPHD$ ja $GBFP$ on todellakin sama ala.

1941. *Määrää a siten, että yhtälön $x^2 + (a+2)x - a^2 = 0$ suuremman ja pienemmän juuren eroitus saa mahdollisimman pienen arvon. Mitkä ovat juuret?*

Ratkaisu. Olkoot yhtälön juuret y ja z. Tiedetään, että $yz = -a^2$ ja $y + z = -(a+2)$. Silloin

$$\begin{aligned} |y-z|^2 &= (y-z)^2 = (y+z)^2 - 4yz = (a+2)^2 + 4a^2 = 5a^2 + 4a + 4 \\ &= 5\left(a^2 + \frac{4}{5}a + \frac{4}{5}\right) = 5\left(\left(a + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}\right). \end{aligned}$$

Lauseke, ja siis myös $|y - z|$ saa pienimmän arvonsa, kun $a = -\dfrac{2}{5}$. Kun a:llä on tämä arvo, tehtävän yhtälö on

$$x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{4}{25} = 0.$$

Sen ratkaisut ovat

$$x = -\frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{12}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{1}{5}(-4 \pm 2\sqrt{5}).$$

1941. *Kahden positiivisen luvun aritmeettisen keskiarvon ja geometrisen keskiarvon (= keskiverron) suhde on s. Mikä on suuremman ja pienemmän luvun suhde?*

Ratkaisu. Olkoot luvut a ja b, $a < b$, ja olkoon $b = xa$, $1 \le x$. Tiedetään, että

$$1 \le s = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}.$$

Merkitään $\sqrt{x} = t$. Silloin

$$t + \frac{1}{t} = 2s, \quad t^2 - 2st + 1 = 0$$

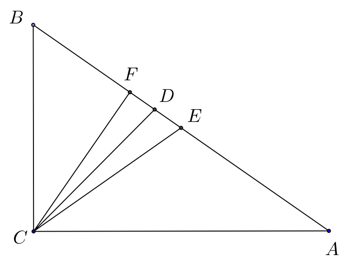
ja $t = s + \sqrt{s^2 - 1}$ (koska $t \ge 1$, toisen asteen yhtälön kahdesta juuresta valitaan suurempi). Siis $x = t^2 = s^2 + 2s\sqrt{s^2-1} + s^2 - 1 = 2s^2 - 1 + 2s\sqrt{s^2-1}$.

1943. *Puhdasta kahvia ja kahvinkorviketta sekoitetaan suhteessa* $3 : 2$. *Montako % puhdasta kahvia sekoitus sisältää, jos korvikkeessa on* 15 % *puhdasta kahvia?*

Ratkaisu. Puhtaan kahvin osuus seoksesta on $0{,}6 + 0{,}15 \cdot 0{,}4 = 0{,}66 = 66\,\%$.

1944. *Osoita, että suorakulmaisen kolmion suoran kulman puolittaja puolittaa hypotenuusan vastaisen keskijanan (mediaanin) ja korkeuden välisen kulman.*

Ratkaisu. Olkoon suorakulmainen kolmio ABC ja CD, CE sekä CF kärjestä C sivulle hypotenuusalle AB piirretyt kulmanpuolittaja, keskijana ja korkeusjana. Kolmio ECA on tasakylkinen, sillä E on kolmion ABC ympärysympyrän keskipiste. Siis $\angle ECA = \angle EAC = \angle BAC$. Toisaalta kolmiot ABC ja BCF ovat yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita, joten myös $\angle BCF = \angle BAC$. Siis $\angle FCD = \angle BCD - \angle BCF = \angle DCA - \angle BCF = \angle DCE$. CD siis todellakin puolittaa kulman $\angle FCE$.



1945. *Määrää terävä kulma, jonka kosini on puolet sen sinistä.*

Ratkaisu. Kulma x toteuttaa yhtälön $\sin x = 2\cos x$ eli $\tan x = 2$. Logaritmitaulukon avulla saadaan $x \approx 63^\circ\, 26'\, 6''$.

1946. *Mikä on pienin kokonainen luku n, jolla n:n ensimmäisen kokonaisluvun summa on suurempi kuin* 1 000 000*?*

Ratkaisu. [Ilmaus "n ensimmäistä kokonaislukua" on hiukan ongelmallinen. Nykyisen kielenkäytön mukaan kokonaislukuja ovat $\ldots -2, -11, 0, 1, 2, \ldots$. Tulkitaan asia niin, että tehtävän n ensimmäistä kokonaislukua ovat n pienintä positiivista kokonaislukua.] Esimerkiksi aritmeettisen jonon summakaavasta saadaan, että

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Koska $n(n+1) < (n+1)^2$ ja $(n-1)^2 < (n-1)n$, tehtävässä kysytty n toteuttaa epäyhtälöt

$$(n-1)^2 < 2 \cdot 10^6 < (n+1)^2$$

eli $n-1<\sqrt{2}\cdot 10^3<1415$ ja $1414<\sqrt{2}\cdot 10^3<n+1$. n on siis lukujen 1413 ja 1416 välissä oleva kokonaisluku. Koska $1414\cdot 1415=2\,000\,810>2\,000\,000$, pienempi näistä eli 1414 on tehtävän ratkaisu.

1947. *Annetun pallon sisään piirretyistä lieriöistä (sylintereistä) on määrättävä se, jonka kokonaispinta-ala on suurin.*

Ratkaisu. Olkoon lieriön pohjaympyröiden säde r ja lieriön korkeus h. Lieriön pinta-ala on $2\pi r^2+2\pi hr$. Jos $h=tr$, niin ala on $2\pi r^2(1+t)$. Jos pallon säde on R, Pythagoraan lause antaa heti

$$R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=r^2\left(1+\frac{t^2}{4}\right).$$

Siis

$$r^2=\frac{4R^2}{4+t^2}$$

ja lieriön ala on

$$\frac{8\pi R^2(1+t)}{4+t^2}.$$

Ala maksimoituu niillä t:n arvoilla, joilla

$$f(t)=\frac{t^2+4}{t+1}$$

saa pienimmän arvonsa. Koska 1940-luvulla differentiaalilaskenta ei kuulunut oppimääriin, minimoidaan $f(t)$ suoraan. Olkoon $u=t+1$. Silloin

$$f(t(u))=\frac{(u-1)^2+4}{u}=u+\frac{5}{u}-2=\sqrt{5}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{u}\right)-2=\sqrt{5}\left(\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt[4]{5}}-\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{u}}\right)^2+2\right)-2.$$

Oikeanpuoleinen lauseke saa pienimmän arvonsa $2(\sqrt{5}-1)$ silloin ja vain silloin, kun

$$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{u}}$$

eli kun $u=\sqrt{5}$. Tällöin $t=\sqrt{5}-1$. Pinta-alataan mahdollisimman suuri lieriö on siis sellainen, jossa lieriön korkeuden ja pohjan säteen suhde on $\sqrt{5}-1$.