Tehtävien 1948 – 1957 ratkaisut

1948 *Kun juna matkaa AB kulkiessaan pysähtyy väliasemilla, kuluu matkaan* 10 % *enemmän aikaa kuin jos se kulkisi pysähtymättä. Kuinka monta % olisi nopeutta lisättävä, jotta matkaan AB pysähtymisineen kuluva aika lyhenisi* 15 %, *jos väliasemilla kuluva aika pysyy muuttumatta?*

Ratkaisu. Merkitään matka $AB = s$, junan kulkunopeus ennen muutosta $= v$ ja matkaan kuluva aika ilman pysähdyksiä $= t$. Näiden välillä vallitsee yhtälö $s = vt$. Kulkunopeutta nostetaan x %:ia, joten uusi nopeus

$$v' = \left(1 + \frac{x}{100}\right) v.$$

Nopeuden lisäämisen jälkeen matkaan pysähdyksittä kuluva aika t' saadaan yhtälöstä

$$t'v' = t'\left(1 + \frac{x}{100}\right) v = s,$$

mistä seuraa

$$t' = \frac{s}{\left(1 + \frac{x}{100}\right) v} = \frac{100}{100 + x} \, \frac{s}{v}.$$

Matkaan pysähdyksineen kuluva aika ennen muutosta on $1{,}1t$ ja se lyhenee 15 %, joten $t' + 0{,}1t = 0{,}85 \cdot 1{,}1t$. Siis

$$t' = 0{,}85 \cdot 1{,}1t - 0{,}1t = 0{,}835t.$$

Merkitsemällä saadut t':n lausekkeet samoiksi, saadaan

$$\frac{100}{100 + x} \, \frac{s}{v} = 0{,}835t = 0{,}835 \, \frac{s}{v},$$

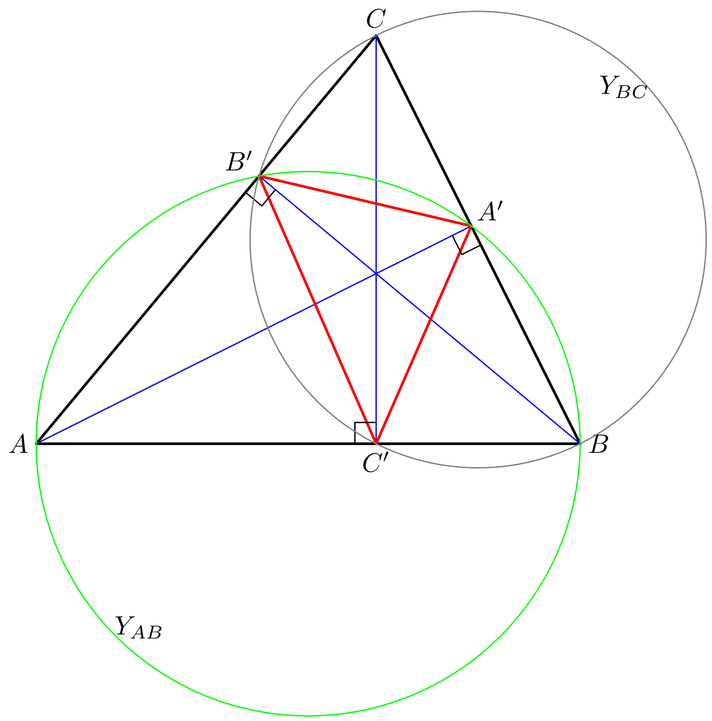
mistä seuraa

$$x = \frac{100}{0{,}835} - 100 \approx 19{,}8.$$

Nopeutta on siis nostettava noin 19,8 %.

1949 *Teräväkulmaisen kolmion korkeusjanojen kantapisteet yhdistetään toisiinsa. Todista, että alkuperäisen kolmion korkeusjanat puolittavat näin muodostuneen kolmion kulmat.*

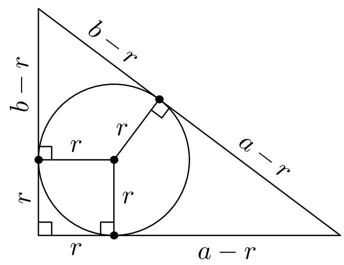
Ratkaisu. Olkoot $\triangle ABC$ teräväkulmainen ja sen korkeus-



janat AA', BB' ja CC'. Osoitetaan, että BB' puolittaa kulman $\angle C'B'A'$. Piirretään AB ja BC halkaisijoina ympyrät Y_{AB} ja Y_{BC}. Koska kolmion kulmat ovat teräviä, pisteet C ja A sijaitsevat ympyröiden ulkopuolella kuviosta näkyvällä tavalla. Kehäkulmalauseen perusteella korkeusjanojen kantapisteet ovat näiden ympyröiden kehillä. $\triangle BA'A \sim \triangle BC'C$ (kk), joten $\angle A'AB = \angle C'CB$. Ympyrän Y_{BC} samaa kaarta vastaavina kehäkulmina $\angle C'CB = \angle C'B'B$. Siis $\angle C'B'B = \angle A'AB$. Ympyrän Y_{AB} samaa kaarta vastaavina kehäkulmina $\angle A'AB = \angle BB'A'$. Täten $\angle C'B'B = \angle BB'A'$, joten BB' puolittaa kulman $\angle A'B'C'$. Samalla tavalla väite todistuu muidenkin korkeusjanojen osalta.

1950 *r-säteisen ympyrän ympäri on piirretty suorakulmainen kolmio. Laske sen ala, kun sen toinen kateetti on a.*

Ratkaisu. Olkoon toinen kateetti b. Ympyrän tangenttikulmien kyljet ovat yhtä pitkät, joten kuvion merkinnöin



saamme Pythagoraan lausetta soveltaen b:n ratkaisemiseksi yhtälön

$$(a + b - 2r)^2 \;=\; a^2 + b^2.$$

Siitä seuraa, että

$$b \;=\; \frac{2r(a-r)}{b-2r},$$

ja kysytty pinta-ala

$$A \;=\; \frac{1}{2}ab \;=\; \frac{ar(a-r)}{b-2r}.$$

1951 *Minkä yhtälön tulee vallita kertoimien p ja q välillä, jotta yhtälöillä $x^2+px+q=0$ ja $x^2+qx+p=0$ olisi yksi ja vain yksi yhteinen juuri? Määrää yhteinen juuri ja muut juuret yksinkertaisimmassa muodossaan.*

Ratkaisu. Olkoon x yhtälöiden yhteinen juuri. Tällöin

$$px + q \;=\; -x^2 \quad \text{ja} \quad qx + p \;=\; -x^2,$$

joten $px + q \;=\; qx + p$ eli $(p - q)x \;=\; p - q$. Jos nyt $p = q$, niin x ei ole yksikäsitteisesti määrätty. On siis oltava

$p \neq q$, joten yhteinen juuri $x = 1$. Tällöin kertoimien välillä vallitsee yhtälö $1 + p + q = 0$, eli $q = -1 - p$. Yhtälö

$$\begin{aligned}
& x^2 + px + q = 0 \\
\iff\ & x^2 + px - 1 - p = 0 \\
\iff\ & (x^2 - 1) + (px - p) = 0 \\
\iff\ & (x - 1)(x + 1) + p(x - 1) = 0 \\
\iff\ & (x - 1)(x + 1 + p) = 0 \\
\iff\ & x = 1 \lor x = -1 - p = q.
\end{aligned}$$

Täten yhtälön $x^2 + px + q = 0$ juuret ovat $x = 1$ ja $x = q$. Käsittelemme yhtälön $x^2 + qx + p = 0$ äskeistä suoraviivaisemmin. Koska yhtälön toinen juuri on $x = 1$ ja juurten tulo on p, on toinen juuri $x = p$. Siis yhtälöiden yhteinen juuri on $x = 1$, lukujen p ja q välillä vallitsee yhtälö $p + q = -1$ ja yhtälöiden toiset juuret ovat q ja p.

1952 *Määritä sen logaritmijärjestelmän kantaluku (tai tämän Briggsiläinen logaritmi), jossa kahden määrätyn luvun a ja b logaritmien tulo = samojen lukujen tulon logaritmi. Laske kantalukujen 4-desimaalinen likiarvo kun $a = 5$ ja $b = 2$.*

Ratkaisu. Olkoon x kysytty kantaluku. Sen on oltava positiivinen ja $\neq 1$. Myös a ja b ovat positiivisia. Yhtälö

$$\log_x a \, \log_x b \; = \; \log_x ab \tag{1}$$

on voimassa kaikilla sallituilla x:n arvoilla, jos $a = b = 1$. Jos vain toinen luvuista a, b on 1, niin yhtälö ei ole voimassa. Olkoot seuraavassa a ja $b \neq 1$. Yhtälöstä (1) seuraa (vaihtamalla kantaluku x kantaluvuksi 10)

$$\frac{\lg a}{\lg x} \frac{\lg b}{\lg x} \; = \; \frac{\lg ab}{\lg x},$$

ja edelleen

$$\lg x \; = \; \frac{\lg a \, \lg b}{\lg ab}.$$

Tehtävässä puhutaan kantaluvusta monikossa; saamme sille kaksi esitystapaa:

$$x = 10^{\lg x} = 10^{\frac{\lg a \lg b}{\lg ab}} = (10^{\lg a})^{\frac{\lg b}{\lg ab}} = a^{\frac{\lg b}{\lg ab}}$$

ja

$$x = 10^{\lg x} = 10^{\frac{\lg a \lg b}{\lg ab}} = (10^{\lg b})^{\frac{\lg a}{\lg ab}} = b^{\frac{\lg a}{\lg ab}}.$$

Jos $a = 5$ ja $b = 2$, niin $\lg ab = \lg 10 = 1$, joten

$$x = 5^{\lg 2} = 2^{\lg 5} \approx 1{,}6233.$$

1953 *Todista, että kaikilla x:n arvoilla* $\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ *on pienempi tai yhtäsuuri kuin* 1.

Ratkaisu. Kaavoja $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ja $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ soveltaen näemme, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned}
\sin^4 x + \cos^4 x - \tfrac{1}{2}\sin^2 2x &= \cos^4 x + \sin^4 x - \tfrac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2 \\
&= \cos^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \cos^2 2x \le 1.
\end{aligned}$$

1954 *Paraabelin polttopiste on origo ja huippu* $(0, -2)$. *Missä pisteissä paraabelin ja x-akselin leikkauspisteisiin piirretyt tangentit leikkaavat toisensa? Piirrä kuvio.*

Ratkaisu. Paraabeli koostuu pisteistä, joiden etäisyys polttopisteestä ja johtosuorasta on sama. Paraabelin huippu ja polttopiste määräävät sen symmetria-akselin ja johtosuora on kohtisuorassa sitä vastaan. Symmetria-akseli on y-akseli ja johtosuoran yhtälö on $y = -4$. Paraabelin yhtälö on täten

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |y - (-4)|,$$

mikä sievenee muotoon

$$y = \tfrac{1}{8}x^2 - 2.$$

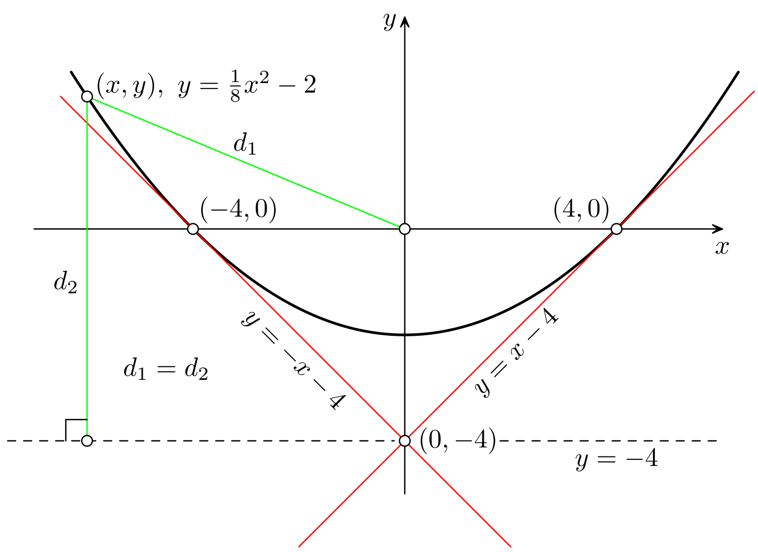
Paraabeli leikkaa x-akselin pisteissä $(\pm 4, 0)$. Näissä pisteissä paraabelia sivuavat tangentit sijaitsevat symmetrisesti y-akselin suhteen, joten riittää määrittää niistä toinen. Pisteen $(4, 0)$ kautta kulkevat suorat $x = 4$ ja $y = k(x - 4)$, missä $k \in \mathbb{R}$. Pystysuora $x = 4$ lävistää paraabelin, se ei ole sen tangentti. Määritämme vakion k siten, että yhtälöparilla

$$\begin{cases} y = k(x-4) \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 2 \end{cases}$$

on yksi ratkaisu. Eliminoimalla y saadaan yhtälö

$$x^2 - 8kx + (32k - 16) = 0,$$

jolla on yksi ratkaisu, kun $k = 1$. Täten paraabelia pisteessä $(4, 0)$ sivuavan tangentin yhtälö on $y = x - 4$. Pisteessä $(-4, 0)$ sitä sivuavan tangentin yhtälö on $y = -x - 4$. Tangentit leikkaavat toisensa pisteessä $(0, -4)$.



1955 *Jaa jana a kahteen osaan x ja y sekä y vielä kahteen osaan z ja u siten, että $x : y = y : z = z : u$. Laske suhde $x : u$.*

Ratkaisu Koska $y : z = z : u$ ja $u = y - z$, on

$$\frac{y}{z} = \frac{z}{y-z},$$

mistä seuraa $y^2 - zy - z^2 = 0$, ja edelleen

$$y : z = \frac{y}{z} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Koska $x : y = y : z = z : u$, on

$$\frac{x}{u} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{u} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2+\sqrt{5}.$$

1956 *Millä x:n arvoilla päättymätön geometrinen sarja*

$$1 + \frac{x-1}{x+1} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n + \ldots$$

suppenee ja mikä on tällöin sen summa $S(x)$? Piirrä funktion $y = S(x)$ kuvaaja.

Ratkaisu. Sarjan suhdeluku

$$q = \frac{x-1}{x+1}$$

ja sarja suppenee, jos $|q| < 1$. Suppenemisehto sievenee muotoon

$$|x-1| < |x+1|, \quad \text{eli} \quad |x-1| < |x-(-1)|,$$

mistä ilmenee, että luvun x tulee olla lähempänä lukua 1 kuin lukua -1. Sarja siis suppenee, kun $x \in]0, \infty[$. Sen summa

$$S(x) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x+1}} = \frac{x+1}{x+1-(x-1)} = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}.$$

Funktion $y = S(x)$ kuvaaja on siis pisteestä $(0, \frac{1}{2})$ alkava avoin puolisuora $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $x > 0$. Sen piirtäminen jää aktiiviselle lukijalle harjoitustehtäväksi. $(\overset{\frown}{\ddot{\smile}})$

1957 *Toisen asteen yhtälön juurien erotus, summa ja tulo muodostavat aritmeettisen sarjan mutta erotus, tulo ja summa (tässä järjestyksessä) geometrisen sarjan. Kirjoita yhtälö.*

Ratkaisu. Olkoot yhtälön juuret u ja v. Tällöin

$$u - v, \quad u + v, \quad uv$$

on aritmeettinen jono, joten $2(u + v) \;=\; u - v + uv$, mikä sievenee muotoon

$$u + 3v \;=\; uv.$$

Geometrinen jono saadaan asettamalla nämä suureet järjestykseen

$$u - v, \quad uv, \quad u + v.$$

Tällöin

$$(uv)^2 \;=\; (u - v)(u + v) \;=\; u^2 - v^2.$$

Yhtälöparin

$$\begin{cases} u + 3v &= uv \\ u^2 - v^2 &= (uv)^2 \end{cases}$$

ratkaisut ovat $u = \frac{4}{3}$, $v = -\frac{4}{5}$ ja $u = 0$, $v = 0$. Saamme siis kaksi yhtälöä

$$(x - \tfrac{4}{3})(x + \tfrac{4}{5}) \;=\; 0 \quad \text{ja} \quad (x - 0)(x - 0) \;=\; 0.$$

Ne sievenevät muotoon

$$15x^2 - 8x - 16 \;=\; 0 \quad \text{ja} \quad x^2 \;=\; 0.$$