Ratkaisut vuosien 1958 – 1967 tehtäviin

1958 *Pyörähtäessään korkeusjanansa ympäri tasakylkinen kolmio muodostaa kartion, jonka tilavuus on A, ja pyörähtäessään kylkensä ympäri kappaleen, jonka tilavuus on B. Laske kolmion huippukulma, kun $B = 3A$.* *(Syksy 9, lyhyt ja pitkä.)*

Ratkaisu. Merkinnät: kolmion kanta $2r$, sitä vastaava korkeus h, kylki s, kyljen vastainen korkeus H ja kantakulma α. Silloin

$$h = r\tan\alpha, \quad s = \frac{r}{\cos\alpha} \quad \text{ja} \quad H = 2r\sin\alpha.$$

Siis

$$A = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \tan\alpha$$

ja

$$B = \tfrac{1}{3}\pi(2r\sin\alpha)^2\frac{r}{\cos\alpha} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \sin\alpha\tan\alpha.$$

$B = 3A$, joten $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ ja $\alpha = 48^\circ\ 35'\ 25''$. (Katso kuvaa tehtävässä 1917K8.)

1959 *Pankki maksaa indeksitilillä A olevalle talletukselle vuoden kuluttua indeksilisää p % ja B-tilillä vastaavasti $p/2$ %, jos indeksi on vuoden aikana noussut p %. Kummallekin tilille lisätään vuoden kuluttua 3,5 %:n korko. B-tili on verovapaa. Kuinka monta prosenttia indeksin pitäisi vähintään nousta vuoden aikana, jotta A-tili olisi ainakin yhtä edullinen kuin B-tili tallettajalle, joka A-tililtä saamastaan indeksilisästä ja korosta maksaa 30 % veroja?* *(Syksy 1, lyhyt ja pitkä.)*

Ratkaisu. Olkoon kummallakin tilillä talletus T mk. Kun verot ja indeksin nousu p% on otettu huomioon, on vuoden kuluttua A-tilillä

$$A = \frac{100+p}{100}T + \frac{3{,}5}{100}T - \frac{30}{100}\Big(\frac{p}{100} + \frac{3{,}5}{100}\Big)T$$

ja B-tilillä

$$B = \frac{100 + p/2}{100}T + \frac{3{,}5}{100}T.$$

Epäyhtälöstä $A \geq B$ seuraa $p \geq 5{,}25$, joten indeksin tulisi nousta vähintään 5,25%.

1960 *Määrää a:lle ja b:lle sellaiset arvot, että yhtälöryhmällä*

$$\begin{cases} ax + y - 1 &= 0, \\ bx - ay + 2 &= 0 \end{cases}$$

on useampia ratkaisuja x, y. *(Syksy 10, pitkä.)*

Ratkaisu. Yhtälöparilla on ääretön määrä ratkaisuja jos kertoimet ja vakiot ovat verrannolliset, siis jos

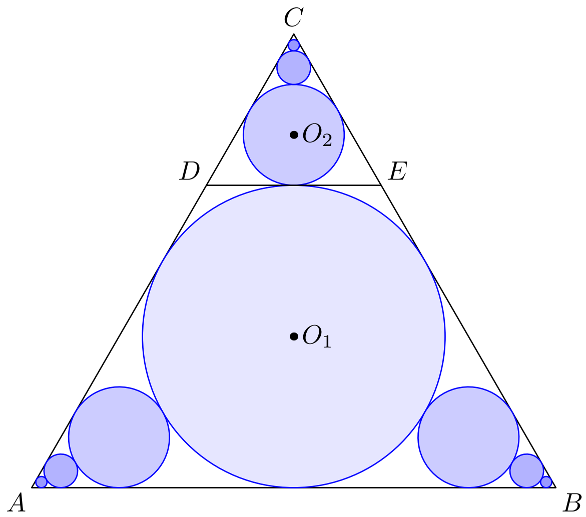
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{-a} = \frac{-1}{2},$$

eli $a = 2$, $b = -4$. Tällöin jälkimmäinen yhtälö saadaan edellisestä kertomalla -2:lla ja yhtälöiden esittämät suorat yhtyvät.

1961 *Olkoon c tasasivuisen kolmion sisään piirretty ympyrä; sen ulkopuolelle jääviin kolmeen kärkikuvioon piirretään kuhunkin ympyrä, joka sivuaa c:tä ja kahta kolmion sivua, näiden ulkopuolelle jääviin kolmion kärkikuvioihin vastaavanlaiset ympyrät jne. loppumattomiin. Laske kaikkien ympyröiden kokonaispinta-alan suhde kolmion pinta-alaan. (Syksy 2, pitkä.)*

Ratkaisu. Olkoon kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r. Silloin kolmion sivu on $2r\sqrt{3}$, sivua vastaan piirretty korkeus on $3r$, kolmiot $\triangle DEC$ ja $\triangle ABC$ yhdenmuotoiset mittakaavassa $1:3$. Ympyröiden O_1 ja O_2 pinta-alojen suhde on siis $1:9$. Vastaavasti jokaisen seuraavan ympyrän pinta-alan suhde edelliseen on $1:9$. Kaikkien ympyröiden alojen summa on

$$\pi r^2 + \frac{3\pi r^2}{9(1-\frac{1}{9})} = \tfrac{11}{8}\pi r^2.$$

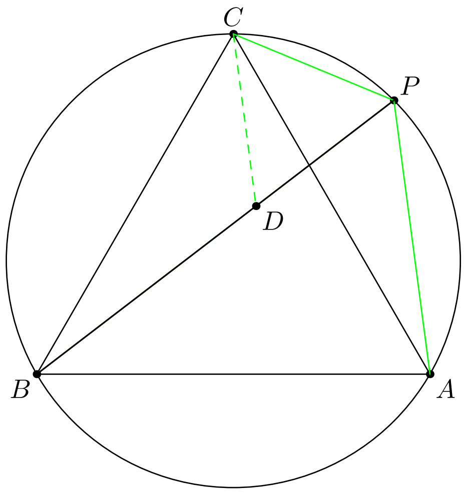


Kolmion pinta-ala on $3\sqrt{3}r^2$ ja suhde on

$$\frac{11\pi\sqrt{3}}{72} \approx 0{,}831.$$

1962 *Tasasivuisen kolmion ABC kärjet yhdistetään ympäri piirretyn ympyrän kaarella AC olevaan mielivaltaiseen pisteeseen P. Osoita, että $PB = PA + PC$.* *(Kevät 6 pitkä, lyhyt opastuksella: Todistusta varten erota BP:stä jana $BD = PA$.)*

Ratkaisu1 (lyhyt). Sovelletaan annettua vihjettä: erotetaan BP:stä jana $BD = PA$. Kolmiot $\triangle APC$ ja $\triangle BDC$ ovat yhtenevät, sillä $BD = AP$, kehäkulmat $\angle CBP$ ja $\angle CAP$ ovat kaarta CP vastaavina yhtäsuuret ja $BC = AC$. Kehäkulma $\angle APC$ vastaa kahta kolmasosaa ympyrän kaaresta, joten sen suuruus on $120°$. Siis $\angle BDC = 120°$ ja $\angle CDP = 180° - 120° = 60°$. Kehäkulma $\angle CPB$ vastaa ympyränkehän kolmasosan kaarta, joten $\angle CPD = 60°$. Siis $\triangle CDP$ on tasasivuinen, $DP = DC$ ja $BP = BD + DC$.



Ratkaisu2 (pitkä). Ptolemaioksen lauseen mukaan jännenelikulmion vastakkaisten sivujen tulojen summa on nelikulmion lävistäjien tulo. Kuvion merkinnöin

$$BC \cdot AP + AB \cdot PC \;=\; AC \cdot PB.$$

Koska $AB = BC = AC$, seuraa tästä

$$AP + PC \;=\; BP.$$

1963 *Sarjan ensimmäinen termi on kaksi kolmasosaa toisesta, toinen kolme neljäsosaa kolmannesta, kolmas neljä viidesosaa neljännestä jne. Sarjan n:s termi on u. Ilmaise n ensimmäisen termin summa n:n ja u:n avulla.* (Kevät 2, pitkä.)

Ratkaisu. Merkitään sarjan ensimmäistä termiä a:lla. Seuraavat ovat

$$\frac{3a}{2}, \quad \frac{4a}{2}, \quad \frac{5a}{2}, \quad \ldots,$$

joten n:s termi

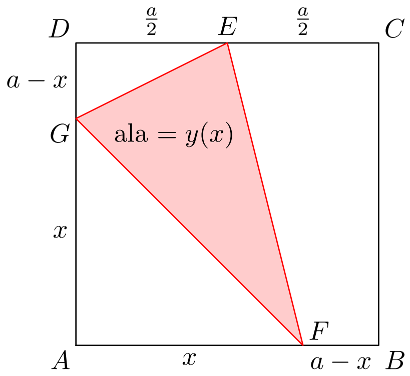
$$u \;=\; \frac{(n+1)a}{2} \quad \text{eli} \quad a = \frac{2u}{n+1}.$$

Sarja on aritmeettinen, sillä kahden peräkkäisen termin erotus on $\frac{1}{2}a$. Aritmeettisen sarjan n:s osasumma

$$s_n \;=\; n\frac{a+u}{2}, \quad \text{siis} \quad s_n \;=\; \frac{n(n+3)u}{2(n+1)}.$$

1964 *Neliöön $ABCD$ on piirretty kolmio EFG siten, että kärki E on sivun CD keskipisteessä ja kärjet F ja G ovat A-kulman kyljillä yhtä etäällä A:sta. Miten suuri osa neliöstä on kolmio, kun sen ala on mahdollisimman suuri? (Syksy 6, lyhyt.)*

Ratkaisu. Merkitään neliön sivua a:lla ja pisteiden F ja G etäisyyttä kärjestä A x:llä. Neliön ala on a^2.



Kolmion ala

$$\begin{aligned} y(x) &= a^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}a(a-x) - \tfrac{1}{2}a(\tfrac{1}{2}a + a - x) \\ &= \tfrac{3}{4}ax - \tfrac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Derivaatan $y'(x) = \frac{3}{4}a - x$ nollakohta on $x = \frac{3}{4}a$. Se on maksimikohta, sillä $y''(x) = -1 < 0$. Suurin ala

$$A_{\text{max}} = y(\tfrac{3}{4}a) = \tfrac{9}{32}a^2,$$

joten kysytty suhde on $9 : 32$.

1965 *Osoita, että käyrät*

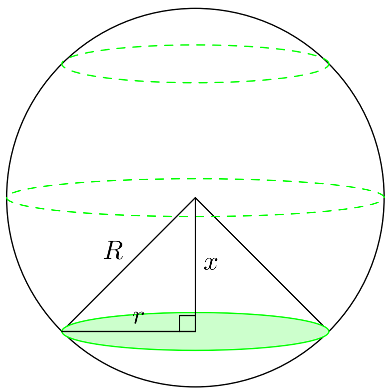
$$x^2 - 2ay - a^2 = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + 2by - b^2 = 0$$

leikkaavat toisensa kohtisuorasti (s.o. leikkauspisteisiin piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan) kaikilla a:n ja b:n samanmerkkisillä arvoilla. (Syksy 4, pitkä.)

Ratkaisu. Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan paraabelien leikkauspisteiksi $(\pm\sqrt{ab}, (b-a)/2)$. Ne ovat reaaliset, koska a ja b ovat samanmerkkiset. Derivoimalla saadaan tangentin kulmakerroin, ensimmäisestä yhtälöstä $y'(x) = x/a$ ja toisesta $y'(x) = -x/b$. Kulmakertoimien tulo $-x^2/ab$ leikkauspisteissä saadaan sijoitamalla $x = \pm\sqrt{ab}$, siis tulo on -1.

1966 *Kartion kärki on R-säteisen pallon keskipisteessä ja pohjaympyrä pallon pinnalla. Määrää kartion tilavuuden suurin mahdollinen arvo.* (Kevät7, lyhyt.)

Ratkaisu. Jos kartion korkeus on x ja pohjan säde r, niin



$r^2 = R^2 - x^2$, joten kartion tilavuus

$V(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi}{3}x(R^2 - x^2) = \frac{\pi}{3}(R^2 x - x^3),\ 0 \leq x \leq R.$

Derivaatta

$$V'(x) = \tfrac{\pi}{3}(R^2 - 3x^2).$$

Sen välille $[0, R]$ kuuluva nollakohta

$$x_0 = \frac{R}{\sqrt{3}} \quad \text{ja} \quad V''(x_0) = -6x_0 < 0,$$

joten kyseessä on maksimikohta. Suurin tilavuus

$$V_{\max} = V(x_0) = \tfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3.$$

1967 *Ratkaise z yhtälöstä $\bar{z} - z = i\bar{z} + 4$, missä i on imaginaariyksikkö ja $z = x + iy$ ja $\bar{z} = x - iy$ sekä x ja y reaalilukuja.* *(Kevät 5, pitkä.)*

Ratkaisu. Sijoittamalla $z = x + iy$ ja $\bar{z} = x - iy$ saadaan

$$\begin{aligned} & \bar{z} - z = i\bar{z} + 4 \\ \iff\quad & x - iy - (x + iy) = i(x - iy) + 4 \\ \iff\quad & -2iy = ix + y + 4 \\ \iff\quad & 0 + i(-2y) = (y + 4) + ix \\ \iff\quad & y + 4 = 0 \quad \text{ja} \quad x = -2y \\ \iff\quad & y = -4 \quad \text{ja} \quad x = 8. \end{aligned}$$

Siis $z = 8 - 4i$.