Tehtävien 1968–1977 ratkaisut

1. Liitettävien n uuden luvun keskiarvo on 30, joten niiden summa on $n \cdot 30$. Kun alunperin annettujen 250 luvun summa on $250 \cdot 20$, saadaan näin epäyhtälö

$$\frac{250 \cdot 20 + n \cdot 30}{250 + n} \leq 24 ,$$

mistä edelleen $250 \cdot 20 + n \cdot 30 \leq 250 \cdot 24 + n \cdot 24$. Siten $6 \cdot n \leq 4 \cdot 250$, joten n voi olla korkeintaan 166.

2. Koska $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ja $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, niin yhtälö sievenee muotoon

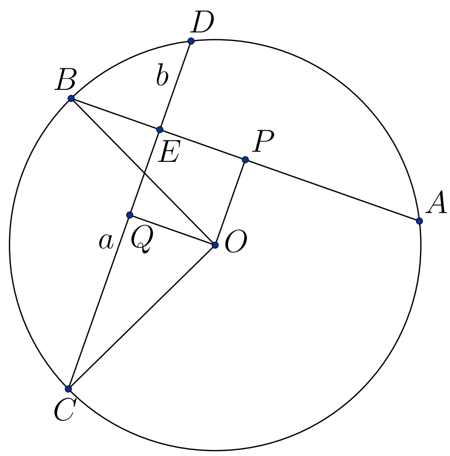
$$\sin x\,(\sin x + \cos x) = 0 .$$

$\sin x = 0$ kun $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $\tan x = -1$ kun $x = -\pi/4 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, joten yhtälön ratkaisut ovat $x = n\pi$ ja $x = -\pi/4 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Lavennettaessa murtolausekkeet samannimisiksi yhtälö saa muodon

$$\frac{a}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{(a+2)x^2 - a}{x(x^2-1)} = 0 .$$

Koska $x^2 \geq 0$, niin yhtälöllä ei ole reaalista nollakohtaa, kun $a + 2 = 0$ tai kun a ja $a + 2$ ovat erimerkkisiä. Siten yhtälöllä ei ole reealijuuria, kun $-2 \leq a < 0$.



4. Pisteen E ollessa jänteiden AB ja CD leikkauspiste voimme olettaa, että $a = EC > ED = b$. Yhtä pitkät jänteet AB ja CD ovat yhtä etäällä ympyrän keskipisteestä O, ja jos P ja Q ovat jänteiden AB ja CD keskipisteet, niin siis $OP = OQ$, ja CD:n keskipiste Q on pisteiden C ja E välissä. Koska jänteet AB ja CD ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin ympyrän sisään muodostuu neliö $OPEQ$ ja siten $OP = PE = QE = QO$. Mutta jana QC on puolet jänteestä $CD = a + b$, joten $QC = \frac{1}{2}(a+b)$ ja $QO = QE = a - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a-b)$. Saamme nyt Pythagoraan lauseen nojalla ympyrän säteen eli suorakulmaisen kolmion QCO hypotenuusan OC neliöksi

$$OC^2 = QC^2 + QO^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) .$$

Siten ympyrän pinta-ala on $\frac{\pi}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.

5. Kirjoitetaan differentiaaliyhtälö muotoon

$$\frac{dy}{dx} = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y^2 .$$

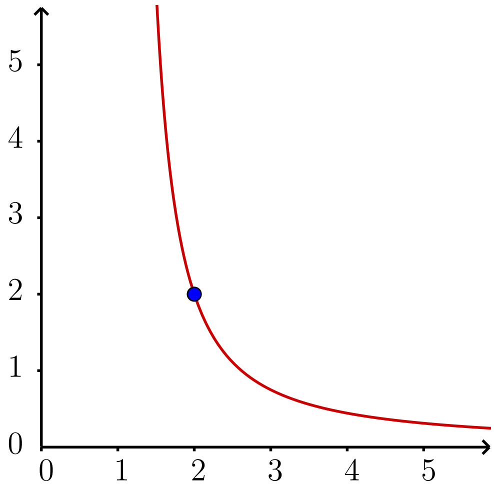
Nähdään, että $y = 0$ on erikoisratkaisu, minkä lisäksi erottamalla muuttujat saadaan

$$\int -\frac{1}{y^2}\, dy = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

eli

$$\frac{1}{y} = x + \frac{1}{x} + C = \frac{x^2 + Cx + 1}{x} ,$$

missä $C \in \mathbb{R}$ on reaalinen vakio. Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on siten muotoa



$$y = \frac{x}{x^2 + Cx + 1} \quad , \quad C \in \mathbb{R} .$$

Ratkaisu saa muuttujanarvolla $x = 2$ arvon $y = 2$ kun $C = -2$, joten

$$y = \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x}{(x-1)^2}$$

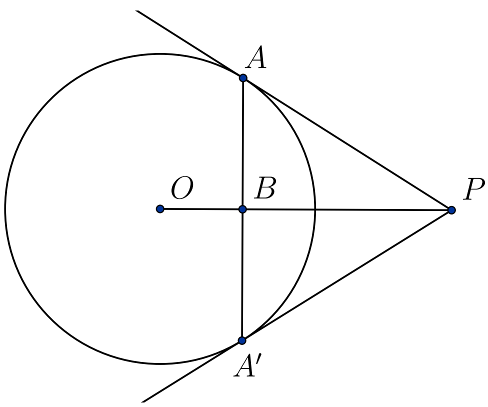
määrittelee kaikille $x > 1$ pisteen $(2, 2)$ kautta kulkevan integraalikäyrän. Pisteessä $x = 1$ olevan epäjatkuvuuskohdan takia ratkaisua ei voida jatkaa muuttujanarvoille $x < 1$.

6. On siis määrättävä pienin kylvettävien siementen lukumäärä $n \geq 2$ siten, että todennäköisyys q_n sille, että niistä korkeintaan yksi itää, on vähäisempi kuin 5% eli pienempi kuin $1/20$. Binomijakauman antama todennäköisyys tälle

$$q_n = \binom{n}{1}(2/3)^1(1/3)^{n-1} + \binom{n}{0}(2/3)^0(1/3)^n = \frac{1}{3^n}(2n+1) \quad ,$$

pienenee kylvettävien siementen lukumäärän kasvaessa, ja kun $q_4 = 1/9$, niin jo $q_5 = 11/243 < 1/20$. On siis kylvettävä vähintään 5 siementä.

7. Valopisteen P ja pallon keskipisteen O kautta kulkevan tason leikatessa r-säteistä palloa muodostuu oheinen kuvio, missä PA ja PA' ovat r-säteisen ympyrän tangentteja. Koska pallokalotilla on sama pinta-ala kuin yhtä korkealla samansäteisellä ympyrälieriöllä, täytyy pallokalotin korkeuden olla kuudesosa pallon ympäri piirretyn suoran lieriön korkeudesta eli $\frac{1}{3}r$. Siten $OB = \frac{2}{3}r$, ja koska suorakulmaiset kolmiot OAB ja OPA ovat yhdenmuotoisia, pallon säde on $r = OA = \frac{2}{3}OP = \frac{2}{3}c$.



8. Piste (x_o, y_o) on ympyrän $x^2+y^2 = 3/2$ sisällä, jos $x_o^2+y_o^2 < 3/2$. Koska $x^4 \geq 0, y^2 \geq 0$ kaikilla reaalisilla x ja y , niin $x^4 \leq 1$ ja siten myös $|x| \leq 1$ kaikissa annetun käyrän $x^4 + y^2 = 1$ pisteissä. Tällöin $x^4 \leq x^2$, ja siten epäyhtälö $x^2 + y^2 \geq x^4 + y^2 = 1$ toteutuu käyrän kaikissa pisteissä. Mutta toisaalta saamme neliöksi täydentämällä $x^4 - x^2 = (x^2 - 1/2)^2 - 1/4 \geq -1/4$, joten $x^2 \leq x^4 + 1/4$ ja siis kaikille käyrän $x^4 + y^2 = 1$ pisteille pätee

$$x^2 + y^2 \leq x^4 + y^2 + 1/4 = 5/4 < 3/2 \quad .$$

Käyrä $x^4 + y^2 = 1$ on siten kokonaan ympyrän $x^2 + y^2 = 3/2$ sisällä.

9. Pisteen (x_o, y_o) kautta kulkevan suoran $y = y_o + k(x - x_o)$ ja paraabelin $y = x^2$ leikkauspisteet saadaan yhtälöstä $x^2 = y_o + k(x - x_o)$, ts. leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat yhtälön

$$x^2 - kx + kx_o - y_o = 0$$

juuria. Suora sivuaa paraabelia, jos se leikkaa paraabelia täsmälleen yhdessä pisteessä, ts. jos saadun yhtälön diskriminantti häviää, eli jos kulmakerroin k toteuttaa toisen asteen yhtälön

$$k^2 - 4(kx_o - y_o) = k^2 - 4x_o k + 4y_o = 0 \; .$$

Tällä yhtälöllä on kaksi reaalijuurta $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ kun $y_o \le x_o^2$, ja saadut paraabelin tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan kun $-1 = k_1 k_2 = 4y_o$. Pisteet (x_o, y_o) piirtävät siten suoran $y = -1/4$.

10. Pisteet $A = (2, 0)$ ja $D = (-1, 0)$ yhdistävä ympyränkaari K on aina symmetrinen suoran $x = 1/2$ suhteen. Kun suora $y = y_o$ leikkaa kaaren K pisteessä $B = (x_o, y_o)$, niin piste $C = (1 - x_o, y_o)$ on sen ja kaaren K toinen leikkauspiste, ja jänteen BC pituudeksi saadaan $BC = |2x_o - 1|$, minkä lisäksi symmetrian takia $AB = CD$. Jos nyt $B = (x_o, y_o)$ on kaaren K ja annetun hyperbelin oikean haaran H leikkauspiste, niin jänteen AB pituudeksi saadaan $\sqrt{(x_o - 2)^2 + y_o^2} = \sqrt{(x_o - 2)^2 + 3(x_o^2 - 1)} = \sqrt{4x_o^2 - 4x_o + 1} = 2x_o - 1$. Jänteet AB, BC ja CD ovat siten yhtä pitkiä, $AB = BC = CD = 2x_o - 1$. Pisteiden B ja D välinen kaaren K osa on siis aina kaksi kertaa niin pitkä kuin pisteiden A ja B välinen kaaren osa.