Ratkaisut vuosien 1978 – 1987 tehtäviin

Kaikki tehtävät ovat pitkän matematiikan kokeista. Eräissä tehtävissä on kaksi alakohtaa; ne olivat kokelaalle vaihtoehtoisia.

1978 *Osoita, ettei mikään käyrän*

$$y^2 = \frac{x^3-1}{3x}$$

piste (x, y) *ole ympyrän* $x^2 + y^2 = 1$ *sisällä.* *(Syksy 10.)*

Ratkaisu. Käyrän pisteet (x, y) eivät ole ympyrän sisällä täsmälleen silloin, kun $x^2 + y^2 \geq 1$. Käyrä on määritelty arvoilla $x < 0$ tai $x \geq 1$. Näissä käyrän pisteissä (x, y) on

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + \frac{x^3-1}{3x} - 1 = \frac{4x^3 - 3x - 1}{3x}.$$

Osoittajan yksi nollakohta on $x = 1$, joten se on jaollinen $(x-1)$:llä ja se saadaan muotoon

$$(x-1)(4x^2 + 4x + 1) = (x-1)(2x+1)^2.$$

Täten

$$x^2 + y^2 - 1 = \frac{(x-1)(2x+1)^2}{3x} \geq 0,$$

mikä todistaa väitteen.

1979 *Suunnikkaassa* $ABCD$ *on* $\overrightarrow{AB} = \bar{a}$ *ja* $\overrightarrow{AD} = \bar{b}$. *Sivulta* CD *valitaan piste* E *siten, että* $CE : ED = 1 : 3$. AE *ja* BD *leikkaavat toisensa pisteessä* F. *Esitä* $\overrightarrow{AF}$ *vektorien* $\bar{a}$ *ja* $\bar{b}$ *avulla.* *(Kevät 7.)*

Ratkaisu. Vektori $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \mathbf{b} + \frac{3}{4}\mathbf{a}$. Koska F on janalla AE, on eräällä reaaliluvulla s

$$\overrightarrow{AF} = s\overrightarrow{AE} = \tfrac{3}{4}s\mathbf{a} + s\mathbf{b}.$$

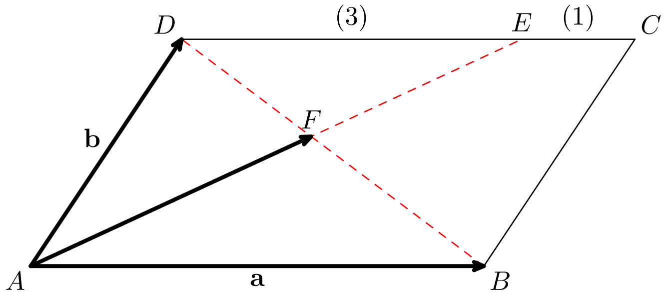
Koska F on myös janalla BD, on olemassa sellainen reaaliluku t, että $\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Siis

$$\tfrac{3}{4}s\mathbf{a} + s\mathbf{b} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \text{eli} \quad (\tfrac{3}{4}s - 1 + t)\mathbf{a} = (t - s)\mathbf{b}.$$

Koska vektorit a ja b eivät ole yhdensuuntaiset, on välttämättä

$$\tfrac{3}{4}s - 1 + t = 0 \quad \text{ja} \quad t - s = 0,$$

josta saadaan $s = t = \frac{4}{7}$ ja $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{7}\mathbf{a} + \frac{4}{7}\mathbf{b}$.



1980 *Ratkaise yhtälö* $2\cos(x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} = 0$. *(Kevät 5.)*

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 2\cos(x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} &= 0 \\ \iff \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \iff \quad x - \frac{\pi}{4} &= \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \text{ tai } x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi \\ \iff \quad x = \pi + 2n\pi & \text{ tai } x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \end{aligned}$$

missä n on mikä tahansa kokonaisluku. Ratkaisut on helppo tarkistaa sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön.

1981 *Osoita, että yhtälöllä $x - \ln x = 0$ ei ole reaalijuuria.* (Kevät 5.)

Ratkaisu. Yhtälön $x - \ln x = 0$ juuret ovat funktion

$$f : f(x) = x - \ln x \quad (x > 0),$$

nollakohdat. Tutkitaan funktion kulkua laskemalla sen derivaatta.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}; \quad f'(x) = 0, \text{ kun } x = 1 \text{ ja } f(1) = 1.$$

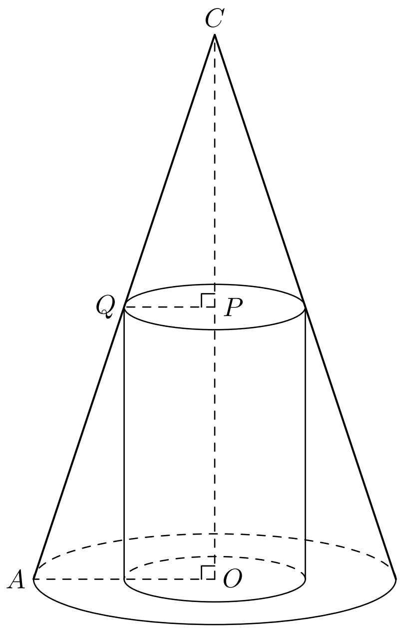
Koska $f'(x) < 0$, kun $0 < x < 1$ (f on aidosti vähenevä) ja $f'(x) > 0$, kun $x > 1$ (f on aidosti kasvava), on $f(1) = 1$ f:n pienin arvo. Täten $f(x) \geq 1$ kaikilla $x > 0$ eikä yhtälöllä $f(x) = 0$ ole reaalijuuria.

1982 ***a)*** *Suoran ympyräkartion pohjan säde on R ja korkeus $H = 3R$. Kartion sisään on asetettu ympyrälieriö, jonka akseli on kartion akselin osa. Määritä lieriön pohjan säde x siten, että lieriön vaipan ja pohjien alojen summa on mahdollisimman suuri.*

b) *Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to A$ sellaisia kuvauksia, että $(g \circ f)(x) = x$ kaikilla A:n pisteillä x. Osoita, että f on injektio (so. $f(x) = f(y) \implies x = y$) ja g on surjektio (so. $g(B) = A$).* (Kevät 7.)

Ratkaisu. b) Osoitetaan, että f on injektio. Olkoon $f(x) = f(y)$. Tällöin $g(f(x)) = g(f(y))$ eli $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Oletuksen mukaan $x = y$. Siis $f(x) = f(y) \implies x = y$, joten f on injektio. Funktion g surjektiivisuuden osoittamiseksi on näytettävä, että maalijoukon A jokaisella alkiolla on alkukuva joukossa B. Kun $x \in A$, on $f(x) \in B$, ja oletuksen mukaan $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$. Siten x on B:n alkion $f(x)$ kuva ja siis g on surjektio.

a) Lieriö on kartion sisällä kuvion osoittamalla tavalla.



Oletuksen mukaan $PQ = x$, $OA = R$ ja $OC = 3R$. Merkitään $OP = h$. Kolmiot $\triangle AOC$ ja $\triangle QPC$ ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{x}{R} = \frac{3R - h}{3R},$$

josta saadaan $h = 3(R - x)$. Lieriön pinta-ala

$$g(x) \;=\; 2\pi xh + 2\pi x^2 \;=\; 2\pi(3Rx - 2x^2),$$

missä $0 \leq x \leq R$. Koska g on suljetulla välillä derivoituva, se saa tällä välillä suurimman arvonsa välin päätepisteessa tai paikallisessa ääriarvokohdassa, derivaatan nollakohdassa. Derivaatta

$$g'(x) \;=\; 2\pi(3R - 4x) \;=\; 0, \quad \text{kun} \quad x = \tfrac{3}{4}R.$$

Koska $g(0) = 0$, $g(R) = 2\pi R^2$ ja $g(\frac{3}{4}R) = \frac{9}{4}\pi R^2$, on suurin arvo viimeksi mainittu.

Huomautus: Derivaatasta $g'(x) = 2\pi(3R - 4x)$ näkyy, että g on aidosti kasvava, kun $x \leq \frac{3}{4}R$ ja aidosti vähenevä, kun $x \geq \frac{3}{4}R$, joten $g(\frac{3}{4}R)$ on g:n suurin arvo.

1983 ***a)*** *Jaa vektori* $\bar{a} = 2\bar{i} - 5\bar{j}$ *kahteen keskenään kohtisuoraan komponenttiin, joista toinen on suoran* $3x - y + 2 = 0$ *suuntainen.*

b) *Tasasivuisen kolmion, jonka sivut ovat = s, sisään on piirretty kolme r-säteistä ympyrää, jotka sivuavat toisiaan pareittain. Lisäksi kukin ympyröistä sivuaa kahta kolmion sivua. Määritä suhde r : s. (Kevät 4.)*

Ratkaisu. a) Suoran $3x - y + 2 = 0$ suuntainen vektori saadaan suoran kahden pisteen, esimerkiksi $(0, 2)$ ja $(2, 8)$ erotuksena $(2, 8) - (0, 2) = (2, 6)$. Tietysti sen suuntainen vektori $\mathbf{s} = (1, 3) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ kelpaa tehtävään. Sitä vastaan kohtisuora vektori on $\mathbf{n} = (3, -1) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Tehtävänä on määrätä sellaiset luvut x ja y, että $\mathbf{a} = x\mathbf{s} + y\mathbf{n}$. Komponenteittain kirjoitettuna saamme yhtälön

$$2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} = x(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + y(3\mathbf{i} - \mathbf{j}),$$

mistä seuraa

$$2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} = (x + 3y)\mathbf{i} + (3x - y)\mathbf{j}.$$

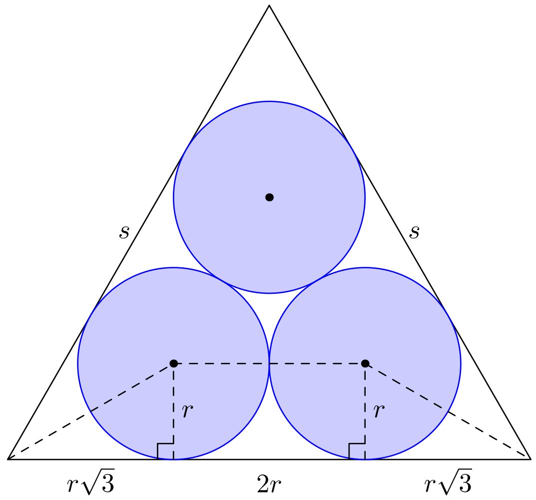
Kantavektorien kertoimia vertaamalla saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + 3y = 2, \\ 3x - y = -5 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on $x = -\frac{13}{10}$, $y = \frac{11}{10}$. Siten

$$\mathbf{a} = -\frac{13}{10}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + \frac{11}{10}(3\mathbf{i} - \mathbf{j}).$$

b) Ympyröiden keskipisteet ovat kolmion kulmanpuolittajilla, ja kukin ympyröistä sivuaa kahta kolmion puolittajaa.



Kunkin ympyrän ja kolmion sivuamispisteen etäisyys kolmion lähimmästä kärkipisteestä on $r\sqrt{3}$ ja kolmion sivun keskipisteestä $= r$. Täten $s = 2r + 2r\sqrt{3}$, josta saadaan

$$r : s = \frac{r}{s} = \frac{1}{2\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

1984 *Määritä ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ ja paraabelin $y = x^2 + 1$ yhteiset tangentit.* (*Syksy 9.*)

Ratkaisu. Paraabelia $y = 1 + x^2$ pisteessä $(a, 1 + a^2)$ sivuavan tangentin kulmakerroin on $2a$, joten suoraparvi

$$y - 1 - a^2 = 2a(x - a), \quad a \in \mathrm{R}$$

eli

$$2ax - y + 1 - a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

sisältää kaikki ko. paraabelin tangentit ja vain ne. Valitaan niistä ne, jotka sivuavat myös origokeskistä yksikköympyrää. Siis millä a:n arvoilla origon etäisyys parven suorasta on 1? Saamme yhtälön

$$\frac{|1-a^2|}{\sqrt{1+4a^2}} = 1,$$

joka neliöimällä (molemmat puolet positiivisia) sievenee muotoon $a^4-6a^2=0$. Kysytyt a:n arvot ovat $a=0$ ja $a=\pm\sqrt{6}$. Näitä vastaavat parven suorat ovat $y=1$ ja $y=\pm 2x\sqrt{6}-5$.

1985 ***a)*** *Määritä yhtälöiden*

$$(1-x)^7 = -10^{-14}, \quad (1-x)^{14} = 10^{-14}, \quad (1-x)^{21} = 1$$

reaalijuuret.

b) *Missä suhteessa on sekoitettava vettä ja 5-prosenttista suolaliuosta, jotta saataisiin 3-prosenttista liuosta?* *(Syksy 1.)*

Ratkaisu. a)

$(1-x)^7 = -10^{-14} \Leftrightarrow 1-x = -10^{-2} \Leftrightarrow x = 1{,}01.$
$(1-x)^{14} = 10^{-14} \Leftrightarrow 1-x = \pm 10^{-1} \Leftrightarrow x = 0{,}9 \vee x = 1{,}1.$
$(1-x)^{21} = 1 \Leftrightarrow 1-x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

b) Sekoitetaan u yksikköä 5-prosenttista liuosta ja v yksikköä vettä, jolloin saadaan $u+v$ yksikköä 3-prosenttista liuosta. Suolan määrä on sama kummassakin liuoksessa. Täten

$$\frac{5}{100}u = \frac{3}{100}(u+v),$$

mistä seuraa $2u = 3v$ ja sekoitussuhde $v:u = 2:3$.

1986 ***a)*** *Määritä käyrien $y = \mathrm{e}^{2x}$ ja $y = \mathrm{e}^{-x}$ sekä suoran $y = \mathrm{e}$ rajoittaman alueen ala.*

b) *Määritä vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma, kun*

$$|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}| \quad \text{ja} \quad \bar{a} \neq \bar{0} \neq \bar{b}.$$

(Syksy 4.)

Ratkaisu. a) Käyrät $y = \mathrm{e}^{2x}$ ja $y = \mathrm{e}^{-x}$ leikkaavat kohdassa $x = 0$. Suora $y = \mathrm{e}$ leikkaa käyrän $y = \mathrm{e}^{2x}$ kohdassa $x = \frac{1}{2}$ ja käyrän $y = \mathrm{e}^{-x}$ kohdassa $x = -1$. Kysytty ala

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e} - \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big/_{-1}^{0} \mathrm{e}x + \mathrm{e}^{-x} + \Big/_{0}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}x - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \\ &= 0 + 1 - (-\mathrm{e} + \mathrm{e}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{e} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e} - (0 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

b) Jokaiselle vektorille $\mathbf{u}$ pätee $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$. Täten oletusyhtälön nojalla:

$$\begin{aligned} & |\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \\ \iff\ & |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 \\ \iff\ & (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\ \iff\ & |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{ab} \\ \iff\ & 4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \\ \iff\ & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Koska $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ja $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, on $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 90°$.

1987 *Lentokone lähti Helsingistä klo 7.00 paikkaan X, jossa kello tällöin oli 5.00, ja palasi Helsinkiin samana päivänä klo 21.30. Paluumatkaan kului puoli tuntia enemmän kuin menomatkaan, ja perillä kone viipyi 2 tuntia. Kuinka paljon kello oli X:ssä koneen lähtiessä paluumatkalle? (Syksy 2.)*

Ratkaisu. Koneen lähdöstä sen paluuseen kului 14,5 tuntia. Tästä oli lentoaikaa 12,5 tuntia, joten menomatkaan kului 6 tuntia ja paluumatkaan 6,5 tuntia. Lähtö paikasta X tapahtui siis klo 15.00 Suomen aikaa. Silloin paikassa X kello oli 13.00.