Ratkaisuja, Tehtävät 1988 - 97

1988 a) Osoita, että lausekkeiden $x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2}$ ja $x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 2x^2}$ arvot ovat toistensa käänteislukuja kaikilla x:n arvoilla.

b) Auton jarrutusmatka on verrannollinen nopeuden 2. potenssiin. Jos nopeus on 100 km/h, on jarrutusmatka 60 m. Mikä on jarrutusmatka, jos nopeus on 60 km/h? [K2, laaja]

Ratkaisu

a) Koska $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, niin

$$\begin{aligned}(x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2}) \cdot (x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 2x^2}) &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{x^4 + 2x^2})^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - (x^4 + 2x^2) \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 - 2x^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Koska lausekkeiden tulo on 1 kaikilla x:n arvoilla, ovat lausekkeet toistensa käänteislukuja kaikilla x:n arvoilla.

b) Jos v_i $(i = 1, 2)$ on auton nopeus ja s_i $(i = 1, 2)$ on vastaava jarrutusmatka, niin oletuksen mukaan $s_1 : s_2 = v_1{}^2 : v_2{}^2$.

Tästä

$$s_2 = (v_2{}^2 : v_1{}^2) \cdot s_1.$$

Kun sijoitetaan $v_1 = 100$ km/h, $s_1 = 60$ m ja $v_2 = 60$ km/h, saadaan

$$s_2 = (60^2\,\text{km}^2/\text{h}^2 : 100^2\,\text{km}^2/\text{h}^2) \cdot 60\text{ m}$$

$$= (60^2 : 100^2) \cdot 60\text{ m}$$

$$= 21{,}6\text{ m} \approx \underline{22\text{ m.}}$$

1989 Osoita, että polynomilla P: $P(x) = x^2 - (a^2 + 2)x + a^2 = 0$ $(a \neq 0)$ on nollakohta välillä $]0, 2[$. [S4, laaja]

Ratkaisu
$P(0) = a^2 > 0$ ja $P(2) = 2^2 - (a^2 + 2)2 + a^2 = 4 - 2a^2 - 4 + a^2 = -a^2 < 0$. Koska P(x) on polynomifunktiona jatkuva $\forall$ x $\in R$, on sillä ainakin yksi nollakohta välillä $]0, 2[$.

1990 a) Erään liikkeen myymistä CD-levyistä on 99 prosenttia virheettömiä. Ostaja tarkastaa 21 levyn erän ja löytää kaksi virheellistä levyä. Mikä on tämän tapahtuman todennäköisyys?

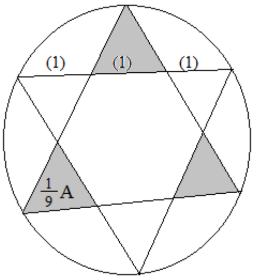
b) Tasasivuisen kolmion kärjet ovat ympyrän kehällä. Kolmiota kierretään 60° ympyrän keskipisteen ympäri. Määritä kolmion uuden ja alkuperäisen asennon muodostaman tähden pinta-alan suhde kolmion alaan. [K8, yleinen]

Ratkaisu

a) Kyseessä on toistokoe. Levy on virheetön todennäköisyydellä 0,99. Kun koe toistetaan 21 kertaa, niin todennäköisyys, että koe onnistuu täsmälleen 19 kertaa on

$$\binom{21}{19} \cdot 0{,}99^{19} \cdot 0{,}01^{2} \approx 0{,}017 = \underline{1{,}7\ \%.}$$

b) Olkoon alkuperäisen kolmion ala A. Tähden sakarat ovat keskenään yhteneviä tasasivuisia kolmioita ja yhdenmuotoisia alkuperäisen kolmion kanssa. Lisäksi sakarakolmion kanta on $\frac{1}{3}$ alkuperäisen kolmion kannasta.



Yhdenmuotoisten kuvioiden alojen suhde on mittakaavan neliö, joten sakarakolmion ala on $\frac{1}{9}$ A. Tähden pinta-ala on alkuperäisen kolmion alaan lisättynä kolmen sakaran pinta-alat. Ala on siis A + $3 \cdot \frac{1}{9}$ A = $\frac{4}{3}$ A. Tähden pinta-alan suhde alkuperäisen kolmion alaan on ($\frac{4}{3}$ A) : A = 4 : 3.

1991 Ratkaise yhtälö $\cos x = \sqrt{3} \sin x$. [S4, laaja]

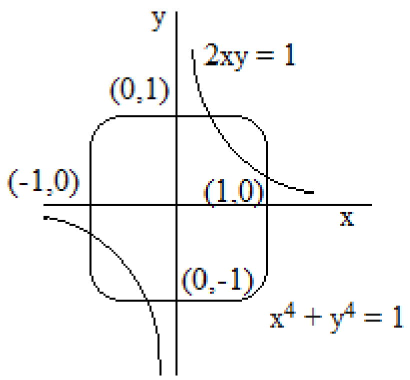
Ratkaisu

Yhtälö $\cos x = \sqrt{3} \sin x$ saadaan muotoon $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ eli $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, joten $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$.

1992 Osoita, että käyrät $x^4 + y^4 = 1$ ja $2xy = 1$ leikkaavat toisensa, ja määritä leikkauspisteiden etäisyydet origosta. Tarkat arvot ja likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella. [K8, laaja]

Ratkaisu

Osoitetaan, että käyrillä $x^4 + y^4 = 1$ ja $2xy = 1$ on leikkauspiste, jossa $x > 0$. Sijoittamalla $y = \frac{1}{2x}$, missä $x \neq 0$ yhtälöön $x^4 + y^4 = 1$, saadaan yhtälö $16x^8 - 16x^4 + 1 = 0$. Merkitään $x^4 = t$ ja ratkaistaan saatu t:n suhteen 2. asteen yhtälö, saadaan $t = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$. Koska $\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}$, ovat molemmat t:n arvot positiiviset ja käyrillä on 1. neljänneksessä kaksi leikkauspistettä kohdassa $x = \sqrt[4]{t}$.



Olkoon P(x,y) jokin käyrien leikkauspiste. Sen etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+y^2}$. Käyrästä $2xy = 1$ saadaan $2x^2y^2 = \frac{1}{2}$, joten $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = \frac{1}{2} + 1$ eli $(x^2 + y^2)^2 = \frac{3}{2}$ ja siis pisteen P(x,y) etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107$.

1993 Tehtävissä 3, 4, 5, 7 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

a) Millä vakion p arvoilla polynomi $2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$ on koko R:ssä aidosti kasvava?

b) Laske $\int_0^1 (1-x^2)^r\, x\, dx$, kun r on positiivinen vakio. [S5, laaja]

Ratkaisu

a) Jos merkitään

$$P(x) = 2px^3 + 3x^2 + 6x + 1,$$

on

$$P'(x) = 6px^2 + 6x + 6 = 6(px^2 + x + 1).$$

Polynomi P(x) on koko R:ssä aidosti kasvava, jos $P'(x) \geq 0$ eli

$$px^2 + x + 1 \geq 0$$

kaikilla x:n arvoilla.

Välttämättä on silloin oltava $p > 0$.
Tällä ehdolla funktion $px^2 + x + 1$ pienin arvo saadaan sen derivaatan

$$2px + 1$$

nollakohdassa $x = -\frac{1}{2p}$, ja pienin arvo on

$$p \cdot \left(-\frac{1}{2p}\right)^2 - \frac{1}{2p} + 1 = -\frac{1}{4p} + 1 .$$

Tämä arvo on ei-negatiivinen, kun

$$p \geq \frac{1}{4} .$$

Tällöin myös ehto $p > 0$ on voimassa, ja P'(x) ≥ 0 koko R:ssä. Siten $p \geq \frac{1}{4}$.

Huom: Ehto $p > 0$ on välttämätön. Siten ei riitä tutkia pelkästään yhtälön $px^2 + x + 1 = 0$ diskriminanttia.

b) Koska yhdistettyjen funktioiden derivoitumissäännön nojalla (ehdolla $r + 1 \neq 0$), on

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2)^{r+1} = (r + 1)(1 - x^2)^r \cdot (-2x),$$

on ehdolla $r > 0$

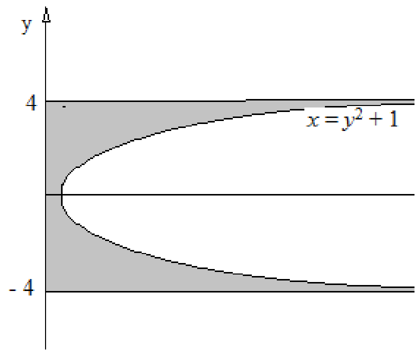
$$\int_0^1 (1 - x^2)^r \, x \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2)^r \cdot (-2x) \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \Big/_0^1 \frac{(1 - x^2)^{r+1}}{r+1}$$

$$= -\frac{1}{2(r+1)}(0 - 1) = \frac{1}{2(+1)} .$$

1994 Lasista valmistettu maljakko on muodoltaan pyörähdyskappale, joka syntyy suorien $y = 4$ ja $y = -4$, paraabelin $x = 1 + y^2$ sekä y-akselin rajoittaman alueen pyörähtäessä x-akselin ympäri. Maljakon pohjan halkaisija on 8,0 cm. Kuinka paljon maljakko painaa, kun lasin tiheys on 3600 kg/m^3 ? [K8, laaja]

Ratkaisu
Syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan ympyrälieriön ja pyörähdysparaboloidin tilavuuksien erotuksena.



Koska

$$x = y^2 + 1 = 17,$$

kun $y = 4$, on lieriön pohjan säde 4 ja lieriön korkeus 17 sekä lieriön tilavuus $\pi \cdot 4^2 \cdot 17$.

Kysymyksessä olevan pyörähdysparaboloidin, so. paraabelin

$$x = y^2 + 1 \text{ , } y \geq 0$$

väliä $1 \leq x \leq 17$ vastaavan kaaren pyörähtäessä x – akselin ympäri syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi \int_1^{17} y^2 \ dx = \pi \int_1^{17} (x - 1) \ dx = 128\,\pi$$

Maljakon tilavuus on silloin

$$\pi(278 - 128) = 144\,\pi \approx 452{,}39.$$

Koska maljakon pohjan halkaisijaksi on oletettu 8,0 cm, on edelläolevissa laskuissa pituusyksiköksi otettava 1 cm, jolloin maljakon tilavuus on 452,39 cm^3 = 0,00045239 m^3. Koska lasin tiheys on 3600 kg/m^3, maljakko painaa

$$3600 \cdot 0{,}00045239 \text{ kg} \approx 1{,}63 \text{ kg}.$$

1995 Tehtävissä 2,3,5,7 ja 10 on kussakin kolme vaihtoehtoa, joista saa suorittaa vain yhden. Vaihtoehto c) on tarkoitettu lähinnä kokeilukursseja opiskelleille, mutta sen saa valita kuka tahansa.

a) Pisteestä $A = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ lähtevät vektorit $\bar{a} = \bar{\imath} + 4\,\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = -\,\bar{\imath} + 5\,\bar{\jmath}$ ovat suunnikkaan sivuina. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste olkoon B. Määrää pisteen B koordinaatit ja vektori $\overrightarrow{AB}$.

b) Harjoittelija Alku postittaa kirje-erän 30 minuutissa. Kun hän tekee saman työn yhdessä ammattitaitoisen Kelpon kanssa, aikaa kuluu tasan 5 minuuttia. Missä ajassa Kelpo tekisi saman työn yksin?

c) 10-järjestelmän luku 234_{10} tarkoittaa summaa $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$. Eräässä toisessa lukujärjestelmässä on

$$234_k + 56_k = 312_k \,.$$

Mikä on tämän lukujärjestelmän kantaluku k? [S5, yleinen]

Ratkaisu

a) Merkitään O = (0,0) (origo). Silloin vektori

$$\overrightarrow{OA} = -\frac{7}{3}\bar{\imath} - \frac{5}{3}\bar{\jmath} \,.$$

Vektori

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - 2\bar{\imath} + 5\bar{\jmath})$$

$$= \frac{1}{2}(-\bar{\imath} + 9\bar{\jmath})$$

ja vektori

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{7}{3} - \frac{1}{2}\right)\bar{\imath} + \left(-\frac{5}{3} + \frac{9}{2}\right)\bar{\jmath}$$

$$= -\frac{17}{6}\bar{\imath} + \frac{17}{6}\bar{\jmath} \,,$$

joten piste B = $\left(-\frac{17}{6}, \frac{17}{6}\right)$.

b) Sisältäköön erä k kirjettä. Silloin

Alku postittaa $\frac{k}{30}$ kirjettä minuutissa,

Alku ja Kelpo yhdessä $\frac{k}{5}$ kirjettä minuutissa.

Siten kelpo postitti yksin $\frac{k}{5} - \frac{k}{30} = \frac{k}{6}$ kirjettä minuutissa. <u>Vastaus</u>: 6 minuutissa.

c) Lukujärjestelmässä, jonka kantaluku on k, on

$$234_k = 2k^2 + 3k + 4$$

$$56_k = \qquad 5k + 6,$$

ja $$234_k + 56_k = 2k^2 + 8k + 10$$

sekä $$312_k = 3k^2 + k + 2$$

Vähentämällä puolittain viimeisestä yhtälöstä viimeistä edellinen saadaan yhtälö

$$0 = k^2 - 7k - 8,$$

jonka juuret ovat 8 ja -1. Koska kantaluvun k on oltava positiivinen kokonaisluku (≥ 2), vain $k = 8$ kelpaa.
Vastaus: $k = 8$.
Huomautus: koska k on 8, summa

$$234_k + 56_k = 2k^2 + 8k + 10$$

voidaan sieventää muotoon

$$3k^2 + k + 2,$$

jolloin se on muodoltaankin sama kuin 312_k .

1996 Funktio $f: R \to R$ toteuttaa epäyhtälön (1) $f(x) - f(y) \geq x - y$ kaikilla arvopareilla (x, y), joissa $x > y$. Osoita, että f on kasvava. Osoita edelleen: Jos f on derivoituva, $f'(x) \geq 1$ kaikilla $x \in R$. Muodosta esimerkki funktiosta, joka täyttää ehdon (1) ja on epäjatkuva R:ssä. [K8, pitkä]

Ratkaisu
Kaavasta (1) seuraa: Jos $x > y$,

$$f(x) - f(y) \geq x - y > 0$$

eli $f(x) > f(y)$. Siis f on kasvava funktio (jopa aidosti kasvava).

Jos erityisesti f on derivoituva, kaavasta (1) seuraa, että

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 1, \text{ kun } h > 0$$

ja siis

$$f'(x) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 1.$$

Esimerkki funktiosta, joka täyttää ehdon (1) ja jolla on epäjatkuvuuskohta R:ssä:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x < 0, \\ x+1, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

Ehto (1) on voimassa:

1° $x, y < 0$, $x > y$. Silloin

$$f(x) - f(y) = x - y \geq x - y.$$

2° $x, y \geq 0$, $x > y$. Silloin

$$f(x) - f(y) = x + 1 - (y + 1) = x - y \geq x - y.$$

3° $x \geq 0$, $y < 0$. Silloin

$$f(x) - f(y) = x + 1 - y > x - y \geq x - y.$$

Funktio f on epäjatkuva origossa, sillä

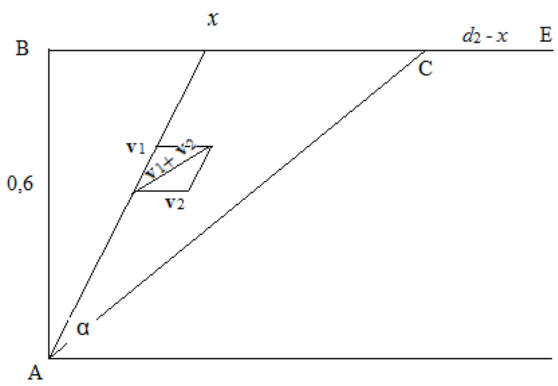
$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0 \neq 1 = f(0).$$

1997 Henkilön on päästävä suoran joen toisella puolella olevaan pisteeseen E, jonne on henkilöä lähinnä olevasta vastarannan kohdasta matkaa 5,2 km myötävirtaan. Henkilön veneen nopeus veteen nähden on 3,2 km/h, joen virtausnopeus 2,3 km/h ja henkilön kävelynopeus 5,9 km/h. Joen leveys on 600 m. Mikä on nopein reitti, kun joki ylitetään suoraviivaisesti, ja kuinka kauan matka pisteeseen E kestää? [S10, pitkä]

Ratkaisu

Olkoon veneen nopeusvektori veteen nähden $\mathbf{v}_1$ (v_1 = 3,2 km/h) ja joen virtauksen nopeusvektori $\mathbf{v}_2$ (v_2 = 2,3 km/h).

Koska joki ylitetään suoraviivaisesti, $\mathbf{v}_1$:n suunta on kiinteä, joten $\mathbf{v}_1$ on vakiovektori (kuten myös $\mathbf{v}_2$). Olkoon $\mathbf{v}_1$:n ja joen lähtörannan välinen kulma α (kuvio), jolloin



$$\mathbf{v}_1 = v_1\,(\cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \sin\alpha\cdot\mathbf{j}),$$

kun **i**:n suunta on sama kuin joen virtaussuunta ja **j**:n suunta lähtörannalta vastarannalle päin.

Vastaavasti on

$$\mathbf{v}_2 = v_2\cdot\mathbf{i},$$

jolloin veneen nopeusvektori rantaan nähden on

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = v_1(\cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \sin\alpha\cdot\mathbf{j}) + v_2\,\mathbf{i}$$

$$= (v_1\cos\alpha + v_2)\,\mathbf{i} + v_1\sin\alpha\cdot\mathbf{j}$$

ja veneen paikkavektori (kun origoksi valitaan lähtöpiste A)

$$\mathbf{s} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = t((v_1\cos\alpha + v_2)\,\mathbf{i} + v_1\sin\alpha\cdot\mathbf{j}),$$

missä t on matkaan s käytetty aika.

Koko venematkaan käytetty aika $t = t_1(\alpha)$ saadaan yhtälöstä

$$t_1(\alpha)\cdot v_1\cdot\sin\alpha = d_1\ \ (= 0{,}6\text{ km}),$$

josta seuraa

$$t_1(\alpha) = \frac{d1}{v1\ \sin\alpha}\,.$$

Vastaavasti paikkavektori

$$\mathbf{s} = \frac{d1}{v1\ \sin\alpha}\,((v_1\cos\alpha + v_2)\,\mathbf{i} + v_1\sin\alpha\cdot\mathbf{j}),$$

Joten rantautumiskohdassa C (kuvio)

$$x = \mathbf{BC} = \frac{d1}{v1\ \sin\alpha}\left(v_1 \cos\alpha\ + v_2\right)$$

ja käveltävä matka

$$\mathbf{CE} = d_2 - x,$$

missä $d_2 = 5{,}2$ km. Tähän matkaan kuluva aika nopeudella $v_3 = 5{,}9$ km/h

$$t_2\,(\alpha) = \frac{d2 - x}{v3} = \frac{d2}{v3} - \frac{d1}{v1\ v3\ \sin\alpha}\left(v_1 \cos\alpha + v_2\right)$$

ja koko matkaan **AC + CE** kuluva aika

$$t(\alpha) = t_1\,(\alpha) + t_2\,(\alpha)$$

$$= \frac{d1}{v1 \cdot \sin\alpha} + \frac{d2}{v3} - \frac{d1}{v1\ v3\ \sin\alpha}\left(v_1 \cos\alpha\ +\ v_2\right)$$

$$= \frac{d2}{v3} + \frac{d1}{v1\ v3} \cdot \frac{v3 - v2 - v1\ \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{52}{59} + \frac{3}{236} \cdot \frac{9 - 8\ \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Tässä kulma α vaihtelee rajojen $\overline{arc}\tan\frac{3}{26} \approx 0{,}11$ (suora soutu **AE**) ja $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ (soutu **AB**) välissä.

$t(\alpha)$:n pienin arvo tällä välillä saadaan derivaatan $t\,'(\alpha)$ nollakohdista.

$t\,'(\alpha)$ on

$$= \frac{3}{236} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot 8\sin\alpha - (9 - 8\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{3}{236} \cdot \frac{8\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 9\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{3}{236} \cdot \frac{8 - 9\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0,$$

kun $\cos\alpha = \frac{8}{9}$ ja $\alpha \approx 0{,}4444759$ rad $\approx 27{,}27°$.

Vastaava aika

$$t(\alpha) = \frac{52}{59} + \frac{3}{4 \cdot 59} \cdot \frac{9 - \frac{64}{9}}{\sqrt{1 - \frac{64}{81}}}$$

$$= \frac{52}{59} + \frac{3}{4 \cdot 59} \cdot \frac{81 - 64}{\sqrt{17}}$$

$$= \frac{52}{59} + \frac{3}{4 \cdot 59} \cdot \sqrt{17}$$

$$= \frac{1}{236} (208 + 3\sqrt{17})$$

$$\approx 0{,}9338 \text{ h} \approx 56 \text{ min}$$

on pienin mahdollinen, sillä tarkasteltavalla välillä $\cos \alpha$ on vähenevä ja erotus

$$\frac{8}{9} - \cos \alpha$$

$t' (\alpha)$:n osoittajassa muuttuu negatiivisesta positiiviseksi ylitettäessä $t' (\alpha)$:n nollakohdan.

Nopeimmassa reitissä matka

$$\mathbf{BC} = \frac{3}{16} \cdot \frac{3{,}2 \cdot \frac{8}{9} + 2{,}3}{\frac{\sqrt{17}}{9}}$$

$$= \frac{3}{160 \cdot 17} (32 \cdot 8 + 23 \cdot 9)\sqrt{17}$$

$$= \frac{3 \cdot 463}{160 \cdot 17} \sqrt{17} \approx 2{,}11 \text{ km}$$

Kävelymatkan **CE** pituus on tällöin

5,2 km - 2,11 km = <u>3,09 km</u>.