1998

Yhtälö on määritelty, kun $2x+3\neq 0$, joten on oltava $x\neq -\dfrac{3}{2}$.

Yhtälö voidaan kirjoittaa yhtäpitävään muotoon

$\dfrac{x(x-3)}{2x+3}-\dfrac{(x-3)(2x+3)}{2x+3}=0$, ja edelleen $\dfrac{(x-3)(-x-3)}{2x+3}=0$.

Tästä saadaan (määrittelyehdon täyttävät) yhtälön ratkaisut $x=3$ tai $x=-3$.

1999

Tehtävän ensimmäinen kysymys:

Päättely 1:

Kukansiemenen löytymistodennäköisyys on $1-0,05=0,95$. Siementen itämistodennäköisyys on 0,95. Se, että puutarhuri saa itävän kukansiemenen edellyttää, että kyseessä on kukansiemen ja että se itää. Tämän todennäköisyys on edellisten todennäköisyyksien tulo eli $0,95\cdot 0,95=0,95^2$.
Binomitodennäköisyyskaavan avulla saadaan:

$$P(\text{"Vähintään 19 kukantainta"})=P(\text{"19 tainta tai 20 tainta"})=$$
$$=P(\text{"19 tainta"})+P(\text{"20 tainta"})=\binom{20}{19}\left(0,95^2\right)^{19}\left(1-0,95^2\right)+\binom{20}{20}\left(0,95^2\right)^{20}\approx 0,41.$$

Päättely 2:

Puutarhuri voi saada vähintään 19 kukantainta joko niin, että pussissa on 19 kukansiementä ja nämä kaikki itävät tai, että pussissa on 20 kukansiementä ja nämä kaikki itävät tai näistä itää 19.

Lasketaan eo. (erillisten) tapahtumien todennäköisyydet yhteen. Kukin tapahtuma voidaan tulkita toistokokeena ja todennäköisyydet laskea binomitodennäköisyyden kaavan avulla.

Todennäköisyys, että pussissa on 20 kukansiementä ja kaikki itävät on

$$\underbrace{0,95^{20}}_{\text{kaikki kukan-siemeniä}}\cdot\underbrace{0,95^{20}}_{\text{kukin itää}}=0,95^{40}.$$

Todennäköisyys, että pussissa on 20 kukansiementä, joista 19 itää on

$$\underbrace{0,95^{20}}_{\text{kaikki kukan-siemeniä}}\cdot\underbrace{\binom{20}{19}\cdot 0,95^{19}}_{\text{19 kukan-siementä itää}}\cdot\underbrace{0,05}_{\text{yksi ei idä}}=0,95^{39}.$$

Todennäköisyys, että pussissa on 19 kukansiementä, joista 19 itää on

$$\underbrace{\binom{20}{19}\cdot 0{,}95^{19}}_{\text{19 kukansiementä}}\cdot \underbrace{0{,}95^{19}}_{\substack{\text{kaikki kukan-}\\ \text{siemenet itävät}}} \cdot \underbrace{0{,}05}_{\substack{\text{yksi rikka-}\\ \text{ruohon siemen}\\ \text{itää}}} = 0{,}95^{38}.$$

Todennäköisyys, että puutarhuri saa vähintään 19 kukantainta on siten

$$0{,}95^{40} + 0{,}95^{39} + 0{,}95^{38} \approx 0{,}41$$

Tehtävän jälkimmäinen kysymys:

Todennäköisyys, että puutarhuri kylvää yhden rikkaruohonsiemenen on komplementti sille, että kaikki siemenet olisivat kukansiemeniä (tässä osassa tehtävää ei itämistodennäköisyyttä tarvita lainkaan):

$$P(\text{"Vähintään yksi rikkaruohonsiemen"}) =$$

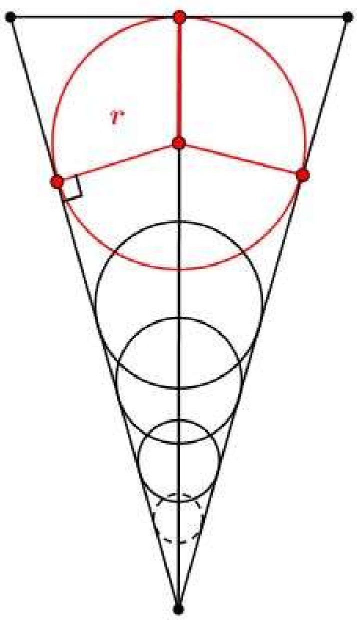
$$1 - P(\text{"Ei yhtään rikkaruohonsiementä"}) = 1 - \binom{20}{20} 0{,}95^{20} \approx 0{,}64.$$

2000

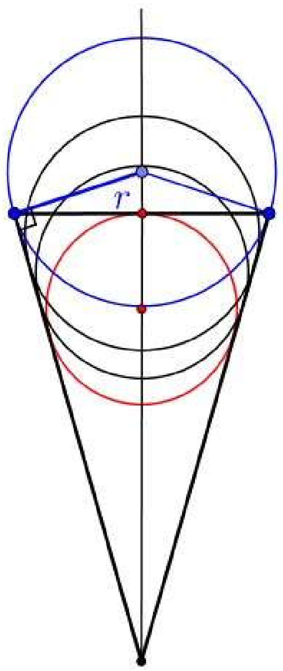
Kun pallo asetetaan tehtävän ehtojen mukaisesti astiaan niin, että se sivuaa kartion vaippaa, voidaan erottaa kaksi tapausta. Alla näistä poikkileikkauskuvat.

1) pallo uppoaa kokonaan astiaan (kuva 1),

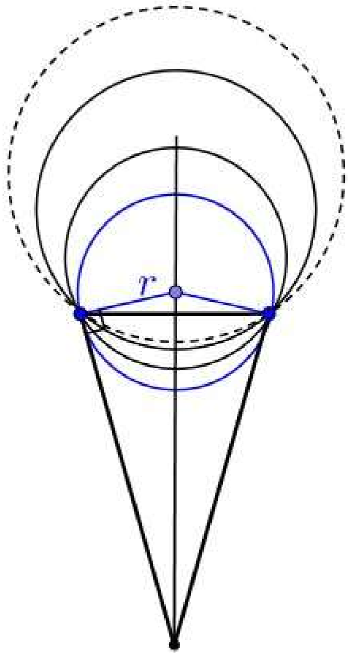
2) pallo uppoaa vain osittain (kuva 2 ja kuva 3).



kuva 1



kuva 2



kuva 3

Kun pallo on kokonaan astiassa, on selvää, että se syrjäyttää eniten vettä, kun pallo on mahdollisimman suuri. Tätä tapausta esittää kuvan 1 punainen ympyrä. Tältä osalta tarkastelu voidaan siis rajoittaa koskemaan tapausta, jossa pallo sivuaa kartion pohjaympyrää (astiassa olevan veden pintaa).

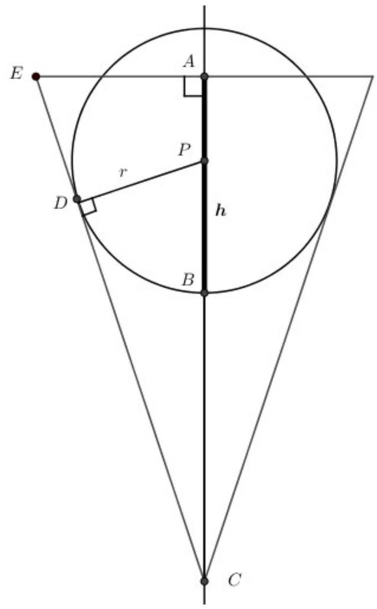
Kun pallo on vain osittain astiassa, se syrjäyttää aina jonkin pallosegmentin tilavuuden verran vettä. Kuvassa 2 punainen ympyrä kuvaa tilannetta, jossa pallo vielä juuri ja juuri sivuaa kartion pohjaa (kyseessä on sama pallo kuin kuvan 1 punaisella ympyräviivalla merkitty pallo). Kun pallon koko tästä kasvaa, päädytään jossain vaiheessa tilanteeseen, jossa pallo sivuaa kartion vaippaa pohjaympyrällä kohtisuorasti (sininen ympyrä) (kuva 2 ja 3).

Kun pallon koko tästä kasvaa (edelleen sivuten kartion pohjaympyrää), se ei voi enää syrjäyttää vettä enempää kuin se pallo, jota kuvaa sininen ympyrä kuvassa 3 (ja kuvassa 2), koska jokainen tällainen pallo uppoaa astiaan vähemmän.

Tarkasteltaviksi jäävät siis kuvan 2 tilanteet, joiden joukosta haetaan upoksissa olevan suurimman pallosegmentin tilavuus, jota verrataan kuvan 1 (tai kuvan 2) punaisen pallon tilavuuteen ja kuvan 2 (tai kuvan 3) sinisen pallon upoksissa olevan segmentin tilavuuteen.

Kyseessä on ääriarvotehtävä.

Olkoon kartion pohjan keskipiste *A*, kärki *C*, pallon keskipiste *P*, piste *B* pallon piste, joka on lähinnä kartion kärkeä, *D* pallon ja kartion vaipan sivuamispiste sekä *E* kartion poikkileikkauskuviossa kartion pohjaympyrän ja sivujanan leikkauspiste. *P* voi sijaita joko niin kuin kuvassa tai se voi olla myös janan *CA* jatkeella (*A*:sta ylöspäin). Laskut ovat kuitenkin samat molemmissa tapauksissa.



Janan *CA* pituus saadaan Pythagoraan lauseella:
$CA = \sqrt{11{,}0^2 - 6{,}6^2} = 8{,}8$. Jätetään yksiköt tässä vaiheessa pois. Yhdenmuotoisista kolmioista *CAE* ja *CDP* saadaan $\frac{CP}{11{,}0} = \frac{r}{6{,}6}$, josta $CP = \frac{11{,}0}{6{,}6}r = \frac{5}{3}r$.

Pallosta kartion sisällä olevan pallosegmentin korkeus $h = BA = CA - CP + PB =$

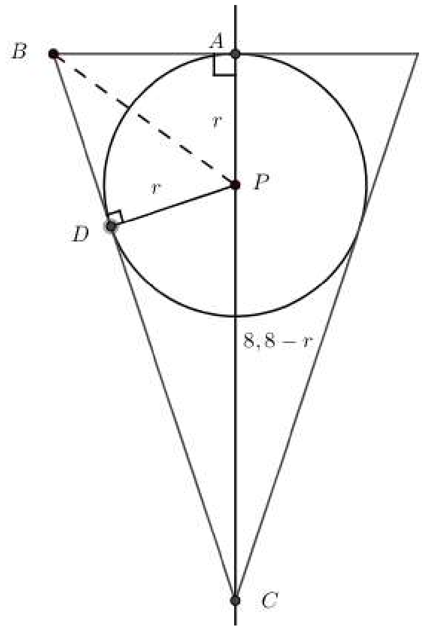
$$= 8{,}8 - \frac{5}{3}r + r = 8{,}8 - \frac{2}{3}r.$$

Kartiosta pois valuva vesimäärä on suurin, kun segmentin tilavuus on suurin.

Sijoitetaan pallosegmentin tilavuuden kaavaan $V = \pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right)$ yo. kaavasta

$h = 8{,}8 - \frac{2}{3}r$ ratkaistu $r = \frac{3}{2}(8{,}8 - h)$, jolloin maksimoitava funktioksi saadaan sievennysten jälkeen $V(h) = \pi\left(13{,}2h^2 - \frac{11}{6}h^3\right)$.

Etsitään seuraavaksi tarkasteltavana olevan funktion määrittelyjoukko eli haetaan h:n vaihteluväli. Nyt riittää rajoittaa h niiden arvojen väliin, jotka vastaavat alussa esitettyjä rajatilanteita (punainen ja sininen ympyrä kuvissa 1 – 3).

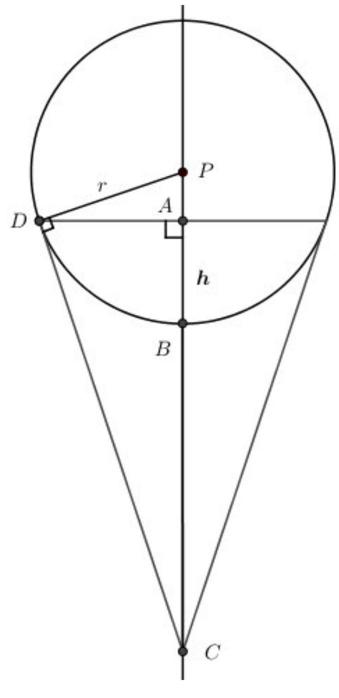


Jos pallo on kokonaan astian sisällä, se syrjäyttää vettä eniten, kun pallo on mahdollisimman suuri. Tämä tilanne vallitsee oheisen kuvion tilanteessa, ja riittää siis laskea tätä tilannetta vastaava h:n arvo, joka on tietysti sama kuin pallon halkaisija.

Esim. kulmanpuolittajalauseella (kolmion ABC kulman $\angle ABC$ puolittaja BP jakaa vastaisen sivun viereisten suhteessa), saadaan yhtälö $\frac{r}{8{,}8 - r} = \frac{6{,}6}{11{,}0}$, josta $r = 3{,}3$.

(Myös yhdenmuotoisten kolmioiden avulla saadaan sama verranto.) Tällöin segmenttinä on siis koko pallo ja $h = 6{,}6$.

Kun pallon koko kasvaa ja osa pallosta on astian ulkopuolella, on ääritilanne esitetty oheisessa kuviossa. Tällöin saadaan yhdenmuotoisista kolmioista yhtälö $\frac{PD}{CD} = \frac{DA}{CA}$ ja siis



$\frac{r}{11{,}0} = \frac{6{,}6}{8{,}8}$, josta $r = 8{,}25$. Tällöin

$h = PB - PA = r - PA = r - (PC - AC) =$

$r - PC + AC = 8{,}25 - \frac{11}{6{,}6} \cdot 8{,}25 + 8{,}8 = 3{,}3$.

(Tai suoraan aiemmin lasketusta kaavasta

$h = 8{,}8 - \frac{2}{3}r = 8{,}8 - \frac{2}{3} \cdot 8{,}25 = 3{,}3$.)

Funktion V määrittelyjoukoksi voidaan näin ollen valita $]3{,}3; 6{,}6[$. Muodostetaan V:n derivaatta ja määritetään (jatkuvan) funktion V suurin arvo tarkasteluvälillä.

$V'(h) = \pi\left(26{,}4h - 5{,}5h^2\right) = 0$, kun $h = 0$ tai $h = 4{,}8$.

Näistä arvoista vain jälkimmäinen sijoittuu tarkasteluvälille.

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten $V'(h) > 0$, kun $h \in]0;4,8[$ ja $V'(h) < 0$, kun $h \in]4,8;6,6[$. Funktio *V* saa siis maksimiarvonsa välillä $]3,3;6,6[$ kohdassa $h = 4,8$, ja $V(4,8) = \pi\left(13,2 \cdot 4,8^2 - \frac{11}{6} \cdot 4,8^3\right) \approx 318,4$.

Muissa tarkasteltavissa tapauksissa syrjäytyvän veden tilavuus:

Kun pallo on kokonaan upoksissa: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3,3^3 \approx 150,5$.

Toinen ääritilanne: $V(3,3) = \pi\left(13,2 \cdot 3,3^2 - \frac{11}{6} \cdot 3,3^3\right) \approx 244,6$.

Suurin tilavuus saadaan arvolla $h = 4,8$, jota vastaava pallon säteen arvo on $r = \frac{3}{2}(8,8 - 4,8) = 6$.

Astiasta valuva vesimäärä on siten suurin, kun pallon säde on 6,0 cm.

2001

Kuvatkoon funktio $E = E(t)$, missä $t > 0$, yhteiskunnan elintasoa ajan *t* funktiona. Tällöin derivaatta $E'(t)$ kuvaa elintason muutosta. Elintason kasvu on kääntäen verrannollinen jo saavutettuun elintasoon, joten $E'(t) = k \cdot \frac{1}{E(t)}$, missä *k* on vakio ja $E'(t) > 0$, koska kyseessä on elintason kasvu. Tällöin myös $k > 0$.

Kysytty differentiaaliyhtälömalli voidaan nyt esittää esimerkiksi muodossa $\frac{dE}{dt} = \frac{k}{E}$, missä $k > 0$.

Yhtälön ratkaisu saadaan separoimalla muuttujat. Aluksi saadaan $E\,dE = k\,dt$, josta puolittain integroimalla $\frac{1}{2}E^2 = kt + D$, josta $E = \pm\sqrt{2kt + C}$, missä $C = 2D > 0$.

Koska vain positiivinen juuri kelpaa, saadaan ratkaisuksi $E(t) = \sqrt{2kt + C}$.

Tässä $E'(t) = \frac{k}{\sqrt{2kt + C}} > 0$ ja $E(t)$ on määritelty kaikilla $t > 0$, joten elintason kasvu on jatkuvaa.

Muutoksen luonnetta voidaan tutkia elintason kasvun eli $E'(t)$:n derivaatan avulla.

$$E''(t) = D\frac{k}{\sqrt{2kt+C}} = k\,D(2kt+C)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{k}{2}(2kt+C)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2k = -\frac{k^2}{\sqrt{(2kt+C)^3}} < 0$$

Tämä nähdään myös suoraan muodosta $E''(t) = -\frac{k\,E'(t)}{E^2} < 0$.

Koska kasvun derivaatta on negatiivinen, on kasvu hidastuvaa.

$\lim_{t\to\infty} E(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{2kt+C} = \infty$, joten elintaso ei lähesty mitään vakiotasoa.

2002

Olkoon muropaketin paino (oik. massa) ennen kokomuutosta *m* (jotain yksikköä, esim. kg) ja hinta *h* (jotain yksikköä, esim. euroa). Olkoon lisäksi myyntimäärä tällöin *v* kpl. Kokomuutoksen jälkeen uudet arvot ovat $1{,}10m$; $1{,}12h$ ja $0{,}90v$.

a) Verrataan myyntejä: $\frac{1{,}10m \cdot 0{,}9v}{mv} = 0{,}99$.

b) Verrataan myyntejä: $\frac{1{,}12h \cdot 0{,}9v}{hv} = 1{,}008$.

Vastaukset: a) Myynti väheni painona 1 prosentin, b) rahana myynti lisääntyi 0,8 prosenttia.

2003

Koska mainitut kulmat ovat kolmion kulmia, pätee yhteys $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Tästä saadaan esim. $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ ja sijoittamalla tämä annettuun yhtälöön, saadaan $\sin\alpha \sin\beta = \cos(180° - \alpha - \beta) = \cos(180° - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta) =$

$= -(\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)$.

Tästä seuraa $\cos\alpha \cos\beta = 0$, mikä pätee, jos $\cos\alpha = 0$ tai $\cos\beta = 0$.

Siis joko $\alpha = 90°$ tai $\beta = 90°$ ja siis kolmiossa on välttämättä 90° kulma ja kolmio on siis suorakulmainen.

2004

Fermat'n pieni lause:

Jos *p* on alkuluku ja $a \in \mathbb{Z}$ ei ole jaollinen *p*:llä, niin $a^{p-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$.

Tämä voidaan luonnehtia myös seuraavasti: Jos *p* on alkuluku ja $a \in \mathbb{Z}$ ei ole jaollinen *p*:llä, niin on olemassa $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $a^{p-1} - 1 = kp$.

Jaetaan tarkastelu kahteen tapaukseen. Tarkastellaan aluksi tapausta, jossa luku 2003 ei ole luvun $n \in \mathbb{N}$ tekijä ja sitten tapausta, jossa 2003 on luvun $n \in \mathbb{N}$ tekijä.

Havaitaan, että luku 2003 on alkuluku.

Jos luku 2003 ei ole luvun $n \in \mathbb{N}$ tekijä, niin Fermat'n pienen lauseen mukaan $n^{2003-1} - 1 = n^{2002} - 1 = 2003k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$.

Tällöin $n^{2003} - n = n\left(n^{2002} - 1\right) = n \cdot 2003k = \underbrace{nk}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 2003$.

Siis $n^{2003} \equiv n \pmod{2003}$.

Jos sitten luku 2003 on luvun $n \in \mathbb{N}$ tekijä ts. $n = k \cdot 2003, k \in \mathbb{Z}$, niin

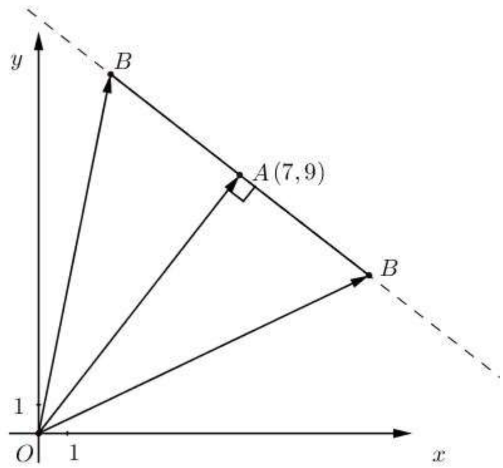
$n^{2003} - n = (k \cdot 2003)^{2003} - k \cdot 2003 = k \cdot 2003\left[(k \cdot 2003)^{2002} - 1\right] = l \cdot 2003$, missä

$l = k \cdot (k \cdot 2003)^{2002} - 1$ ja $l \in \mathbb{Z}$.

Tällöinkin siis $n^{2003} \equiv n \pmod{2003}$.

Näin väite on todistettu kaikille $n \in \mathbb{N}$.

2005



Pisteen O sijainti on laskujen kannalta epäoleellista. Tilanteen hahmottamiseksi piirretään kuva, jossa pisteeksi O on valittu origo. Kuvan perusteella huomataan, että vaadittuja vektoreita voi olla kaksi. $\overline{OA} \perp \overline{AB}$, jolloin $\overline{OA} \cdot \overline{AB} = 0$. Merkitään $\overline{AB} = x\overline{i} + y\overline{j}$, jolloin $(7\overline{i} + 9\overline{j}) \cdot (x\overline{i} + y\overline{j}) = 0$ ja siis

$7x + 9y = 0$, josta $x = -\frac{9}{7}y$.

Pituusehto $\left|\overline{AB}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{OA}\right|$, johtaa yhtälöön

$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{7^2 + 9^2}$, josta saadaan yhtäpitävästi $x^2 + y^2 = \frac{65}{2}$. Sijoitetaan tähän $x = -\frac{9}{7}y$, ja ratkaistaan saatava yhtälö $\frac{81}{49}y^2 + y^2 = \frac{65}{2}$.

Ratkaisuina ovat $y = \pm\frac{7}{2}$ ja näitä vastaavat x:n arvot ovat $x = \mp\frac{9}{2}$.

Vektori $\overline{OB}$ on nyt joko

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = 7\overline{i} + 9\overline{j} - \frac{9}{2}\overline{i} + \frac{7}{2}\overline{j} = \frac{5}{2}\overline{i} + \frac{25}{2}\overline{j} \text{ tai}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = 7\overline{i} + 9\overline{j} + \frac{9}{2}\overline{i} - \frac{7}{2}\overline{j} = \frac{23}{2}\overline{i} + \frac{11}{2}\overline{j}\,.$$

2006

Jono (x_n) on geometrinen, joten sen yleinen termi on $x_n = aq^{n-1}$ $, n = 1, 2, \ldots$
Vastaavasti jonon (y_n) yleinen termi on $y_n = bp^{n-1}, n = 1, 2, \ldots$

Tulojonon (z_n) yleinen termi on näin ollen $z_n = x_n y_n = aq^{n-1} \cdot bp^{n-1} = ab(qp)^{n-1}$.

Jonon (z_n) peräkkäisten termien suhde on $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = \dfrac{ab(pq)^n}{ab(pq)^{n-1}} = ab$, joka on jonon indeksistä *n* riippumaton vakio. Näin ollen tulojono (z_n) on geometrinen.

Jos geometrinen lukujono (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu, niin ei ole välttämättä niin, että tulojono hajaantuu. Tähän riittää vastaesimerkki:

Olkoon $x_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ ja $y_n = 2^{n-1}$. Selvästi nämä ovat geometrisia lukujonoja, joista (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu. Kuitenkin on $z_n = x_n y_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot 2^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, joka on suppeneva geometrinen lukujono, koska suhdeluku $\dfrac{1}{2}$ on itseisarvoltaan pienempi kuin 1.

2007

a) $$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2x^2\right) dx = \Big/_0^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{2}{3}x^3\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0 = \frac{7}{12}$$

b) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ josta } f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

c) $$e^{2\ln x} - 2x^2 = e^{\ln x^2} - 2x^2 = x^2 - 2x^2 = -x^2 \quad (x > 0)$$