RATKAISUT 2008–2017

2008 a) Paraabelien $y = x^2 - 3$ ja $y = x^2 + 2x + 1$ leikkauspisteet saadaan määritettyä, kun ensin ratkaistaan yhtälö

$$x^2 - 3 = -x^2 + 2x + 1,$$

eli

$$2x^2 - 2x - 4 = 0,$$

joka on yhtäpitävä yhtälön

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

Kun $x = 2$, on $y = x^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$, ja kun $x = -1$, on $y = x^2 - 3 = (-1)^2 - 3 = -2$. Leikkauspisteiden koordinaatit ovat siis $(2, 1)$ ja $(-1, -2)$.

b) Leikkauspisteiden välissä $-x^2+2x+1 > x^2-3$, sillä $-x^2+2x+1$ on alaspäin ja $x^2 - 3$ ylöspäin aukeava paraabeli. Pinta-ala saadaan siis laskemalla integraali

$$\int_{-1}^{2} \big((-x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 3)\big)\, dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 4 \cdot 2\right) - \left(-\frac{2}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1)\right) = 9.$$

Leikkauspisteiden väliin jäävän alueen pinta-ala on siis 9.

2009 Merkitään $P(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 7$. Lasketaan aluksi polynomin derivaatta:

$$P'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 36x = 12x(x^2 - 2x - 3).$$

Koska $P(0) = 7$, ei yhteinen nollakohta voi olla $x = 0$, vaan sen on toinen derivaatan kahdesta muusta nollakohdasta. Lasketaan nyt nämä nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla. Tiedetään, että jos $x^2 - 2x - 3 = 0$, niin

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Nyt riittää selvittää alkuperäisen polynomin arvot näissä pisteissä. Lasketaan:

$$P(3) = 3 \cdot 3^4 - 8 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 7 = -128$$

ja

$$P(-1) = 3(-1)^4 - 8(-1)^3 - 18(-1)^2 + 7 = 0.$$

Polynomin $3x^4-8x^3-18x^2+7$ ja sen derivaatan yhteinen nollakohta on siis $x = -1$.

2010 Koska opiskelija tietää oikean vastauksen kymmeneen väitteeseen, riittää tarkastella niitä 15 väitettä, joiden vastauksen hän joutuu arvaamaan. Läpipääsyyn riittää, että hän arvaa näistä vähintään viisi oikein.

Lasketaan aluksi komplementtitodennäköisyys, eli todennäköisyys sille, että opiskelija ei pääse läpi, vaan saa korkeintaan neljä oikein. Arvatessa oikean ja väärän vaihtoehdon todennäköisyydet ovat samat, eli molemmat todennäköisyydet ovat $\frac{1}{2}$

Todennäköisyys sille, että kaikki menevät väärin on $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$.

Todennäköisyys sille, että täsmälleen yksi on oikein on $15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} = 15\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$, sillä mikä tahansa 15 tehtävästä voi olla oikein.

Täsmälleen kahden oikean todennäköisyys on $\binom{15}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \binom{15}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$, koska mitkä tahansa kaksi voivat olla oikein, ja kaksi voidaan valita 15 vaihtoehdosta $\binom{15}{2}$ tavalla.

Vastaavasti täsmälleen kolmen oikean todennäköisyys on $\binom{15}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ ja täsmälleen neljän oikean todennäköisyys on $\binom{15}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$.

Todennäköisyys läpipääsylle on siis

$$1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{15} + 15\left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \binom{15}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \binom{15}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right) \approx 0,94,$$

eli opiskelija pääsee läpi noin 94% todennäköisyydellä.

2011 Olkoon $f(x) = ax + b$.

a) Lasketaan integraali $\int_0^1 f(x)dx$:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (ax+b)dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + bx\right]_0^1 = \frac{a}{2} + b.$$

b) Johdetaan ensin lauseke summalle S_n. Funktion lauseke sijoittaen saadaan

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a \cdot \frac{i}{n} + b\right) = \frac{a}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b \\ &= \frac{a}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + b = \frac{a(n+1)}{2n} + b. \end{aligned}$$

Huomataan seuraavaksi, että

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{f(0)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{f(0)}{n} - \frac{f(1)}{n} + \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \frac{b}{n} - \frac{a+b}{n} + S_n = -\frac{a}{n} + \frac{a(n+1)}{2n} + b = \frac{a(n-1)}{2n} + b \end{aligned}$$

Joten

$$\begin{cases} S_n = \frac{a(n+1)}{2n} + b \\ s_n = \frac{a(n-1)}{2n} + b. \end{cases}$$

c) Lasketaan ensin summan S_n raja-arvo:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a(n+1)}{2n}+b\right) = \lim_{\to\infty}\left(a\frac{1+\frac{1}{n}}{2}+b\right) = \frac{a}{2}+b.$$

Lasketaan seuraavaksi erotuksen $S_n - s_n$ raja-arvo. Käytetään tässä hyväksi muotoa $s_n = \frac{b}{n} - \frac{a+b}{n} + S_n$, joka kolmanneksi viimeinen lauseke a)-kohdassa summaa s_n laskettaessa:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - \left(\frac{b}{n} - \frac{a+b}{n} + S_n\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{b}{n} + \frac{a+b}{n}\right) = 0.$$

Siispä $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{2} + b$ ja $\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$.

Tehtävässä lasketut summat ja raja-arvot liittyvät integraalien määrittelyyn Darboux'n tai Riemannin summien avulla. Lauseke S_n on tässä yläsumma ja s_n alasumma. Kun näiden raja-arvo on sama, on integraali määritelty.

2012 Kirjoitetaan ensin logaritmi osamäärän avulla:

$$\lim_{x\to\infty}(\ln(4x+3) - \ln(3x+4)) = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{4x+3}{3x+4}.$$

Sievennetään seuraavaksi jakaen parametrilla x, jonka jälkeen raja-arvo onkin helppo laskea:

$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{4x+3}{3x+4} = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{4+\frac{3}{x}}{3+\frac{4}{x}} = \ln\frac{4}{3},$$

sillä $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x} = 0$. Siispä

$$\lim_{x\to\infty}(\ln(4x+3) - \ln(3x+4)) = \ln\frac{4}{3}$$

2013 Lähdetään liikkeelle havainnosta, että $\cos y + \cos z = 0$, jos $z = 2\pi n + \pi + y$ tai $z = 2\pi n + \pi - y$ jollakin kokonaisluvulla n. Kun $\cos(2x) + \cos(3x) = 0$, on siis pädettävä että $2x = 2\pi n + \pi + 3x$ tai $2x = 2\pi n + \pi - 3x$. Käsitellään nämä tapaukset erikseen.

Käsitellään ensin tapaus $2x = 2\pi n + \pi + 3x$, eli $-x = 2\pi n + \pi$. Koska n voi olla mikä tahansa kokonaisluku, voidaan tämä kirjoittaa siistimmässä muodossa $x = 2\pi m + \pi$, missä m on mikä tahansa kokonaisluku.

Käsitellään nyt tapaus $2x = 2\pi n + \pi - 3x$, joka voidaan kirjoittaa muodossa $5x = 2\pi n + \pi$, eli $x = \frac{2}{5}\pi n + \frac{\pi}{5}$, missä n on mielivaltainen kokonaisluku.

2014 a) Todistettava epäyhtälö $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ on yhtäpitävä epäyhtälön $2xy \leq x^2 + y^2$ kanssa. Siirtäen kaikki termit oikealle puolelle, saadaan tämä epäyhtälö puolestaan yhtäpitävään muotoon $0 \leq x^2 - 2xy + y^2$, jolloin oikealta puolelta tunnistetaan neliö: $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$, joka on neliönä varmasti epänegatiivinen. Epäyhtälö $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ on siis tosi, sillä se on yhtäpitävä epäyhtälön $(x-y)^2 \geq 0$ kanssa.

b) Todistetaan, että $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq 1$, kun $x_k = \frac{a_k}{A}$ ja $y_k = \frac{b_k}{B}$, missä $A = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} > 0$ ja $B = \sqrt{b_1^2 + \cdots b_n^2} > 0$.

a-kohdan epäyhtälön nojalla

$$x_k y_k \leq \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2),$$

kun $1 \leq k \leq n$. Summataan nämä termit yhteen. Saadaan

$$\begin{aligned}
x_1y_1 + \cdots + x_ny_n &\leq \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2) \\
&= \frac{1}{2}\left((x_1^2 + \cdots x_n^2 + (y_1^2 + \cdots + y_n^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a_1^2}{A^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{A^2}\right) + \left(\frac{b_1^2}{B^2} + \cdots + \frac{b_n^2}{B^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{A^2} + \frac{b_1^2 + \cdots + b_n^2}{B^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A^2}{A^2} + \frac{B^2}{B^2}\right) = 1,
\end{aligned}$$

joten väite on todistettu.

c) Johdetaan nyt Cauchyn epäyhtälö

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Mikäli $A = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} = 0$, on pädettävä myös $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Vastaavasti, jos $B = \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2} = 0$, on pädettävä $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Molemmissa tapauksissa myös epäyhtälön vasen puoli on nolla, jolloin epäyhtälö pätee. Voidaan siis olettaa, että $A > 0$ ja $B > 0$, kuten b-kohdassakin oletettiin. Tällöin b-kohdan epäyhtälön nojalla

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq 1.$$

Sijoitetaan parametrien x_k ja y_k lausekkeet epäyhtälöön, jolloin epäyhtälö muuttuu muotoon

$$\frac{a_1}{A} \cdot \frac{b_1}{B} + \cdots + \frac{a_n}{A} \cdot \frac{b_n}{B} \leq 1.$$

Koska $A, B > 0$, voidaan epäyhtälö kertoa puolittain luvulla AB merkin kääntymättä. Saadaan

$$a_1b_1 + \cdot a_nb_n \leq AB = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2},$$

jolloin väite on todistettu.

2015 a) Origon kautta kulkevan suoran yhtälö on muotoa $y = kx$, kun suora ei ole y-akselin suuntainen. Koska tehtävänannon suora kulkee pisteen $(3, 4)$ kautta origon lisäksi, ei suora ole y-akselin suuntainen. Piste $(3, 4)$ on suoralla, joten kulmakertoimen k on toteutettava yhtälö $4 = k3$, joten $k = \frac{4}{3}$. Suoran yhtälö on siis $y = \frac{4}{3}x$.

b) Origokeskisen ympyrän yhtälö on muotoa $x^2 + y^2 = r$, missä r on säde. Piste on ympyrällä, joten säteen on toteutettava yhtälö $3^2 + 4^2 = r^2$, eli $r^2 = 25$. Säde on epänegatiivinen, joten $r = 5$. Ympyrän yhtälö on siis $x^2 + y^2 = 5^2$.

c) Sellaisen ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on origossa yhtälö on muotoa $y = ax^2$, missä $a > 0$. Sijoitetaan piate $(3, 4)$ yhtälöön. Saadaan $4 = a \cdot 3^2 = 9a$, joten $a = \frac{4}{9}$, eli paraabelin yhtälö on $y = \frac{4}{9}x^2$.

2016 a) Tehtävän voisi ratkaista myös induktiolla tuntematta lukuteorian käsitteitä. Jotta saadaan selville viimeinen numero, lasketaan jakojäännös kymmenellä jaettaessa. Huomataan, että $2016 \equiv 6 \pmod{10}$, joten $2016^{2016} \equiv 6^{2016} \pmod{10}$. Koska $6^2 = 36 \equiv 6 \pmod{10}$, on pädettävä myös $6^n \equiv 6 \pmod{10}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, joten ennen kaikkea $2016^{2016} \equiv 6^{2016} \equiv 6 \pmod{10}$. Viimeinen numero on siis kuusi.

b) Kirjoitetaan luku muodossa

$$2016^{2016} = 10^(\lg 2016^{2016}) \approx 10^{6661,852904} \approx 7,13 \cdot 10^{6661}.$$

Koska $10^{6661,85290} \approx 7,13 \cdot 10^{6661}$ ja $10^{6661,85291} \approx 7,13 \cdot 10^{6661}$, säilyvät kaksi ensimmäistä numeroa samoina, vaikka eksponenttia pyöristettäisiin ylös- tai alaspäin. Tarkkuus on siis riittävä. Ensimmäiset kaksi numeroa ovat 71.

c) Luvun numeroiden lukumäärä on luvun kymmenkantainen logaritmi ylöspäin pyöristettynä, tai jos kymmenkantainen logaritmi on kokonaisluku, niin tällöin se lisättynä yhdellä. Koska

$$\lg 2016^{2016} \approx 6661,86,$$

joten luvussa 2016^{2016} on 6662 numeroa.

2017 Merkitään neliön N_1 sivun pituutta $\sqrt{9}s = 3s$, neliön N_2 sivun pituutta $\sqrt{2}s$ ja neliön N_3 sivun pituutta $\sqrt{11}s$. Nyt neliön N_2 ala on $2s^2$. Kolmion K sivut ovat siis $3s$, $\sqrt{2}s$ ja $\sqrt{11}s$.

Kolmion alan voi määrittää useallakin keinolla. Käydään nyt läpi kaksi erilaista tapaa. Ensin Pythagoraksen lauseeseen perustuva. Koska $(\sqrt{11}s)^2 = 11s^2 = 2s^2 + 9s^2 = (\sqrt{2}s)^2 + (3s)^2$, on kolmio K suorakulmainen. Sen kateettien pituudet ovat $\sqrt{2}s$ ja $3s$, joten sen ala on

$$\frac{3\sqrt{2}s^2}{2}.$$

Toinen näppärä tapa määrittää kolmion ala perustuu Heronin kaavaan. Tällöin ei tarvitse tarkistaa, että kolmio on suorakulmainen. Heronin kaavan nojalla kolmion ala on

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\sqrt{2}s + 3s + \sqrt{11}s}{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}s + 3s + \sqrt{11}s}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}s - 3s + \sqrt{11}s}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}s + 3s - \sqrt{11}s}{2}} \\
&= \frac{s^2}{4}\sqrt{\left((3+\sqrt{11})^2 - 2\right)\left(2 - (\sqrt{11}-3)^2\right)} \\
&= \frac{s^2}{4}\sqrt{2\left((3+\sqrt{11})^2 + (\sqrt{11}-3)^2\right) - 4 - (3+\sqrt{11})^2(\sqrt{11}-3)^2} \\
&= \frac{s^2}{4}\sqrt{80-4-4} = \frac{s^2\sqrt{72}}{4} = \frac{3\sqrt{2}s^2}{2}.
\end{aligned}$$

Kolmion ja neliön N_2 pinta-alojen suhde on siis

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}s^2}{2}}{2s^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$