
Tehtäviä vuosilta 1958 – 1967

1958 Pyörähtäessään korkeusjanansa ympäri tasakylkinen kolmio muodostaa kartion, jonka tilavuus on A , ja pyörähtäessään kylkensä ympäri kappaleen, jonka tilavuus on B . Laske kolmion huippukulma, kun $B = 3A$. (Syksy 9, lyhyt ja pitkä 9.)

1959 Pankki maksaa indeksitilillä A olevalle talletukselle vuoden kuluttua indeksilisää p % ja B -tilillä vastaavasti $p/2$ %, jos indeksi on vuoden aikana noussut p %. Kummallekin tilille lisätään vuoden kuluttua $3,5$ %:n korko. B -tili on verovapaa. Kuinka monta prosenttia indeksin pitäisi vähintään nousta vuoden aikana, jotta A -tili olisi ainakin yhtä edullinen kuin B -tili tallettajalle, joka A -tililtä saamastaan indeksilisästä ja korosta maksaa 30 % veroja? (Syksy 1, lyhyt ja pitkä.)

1960 Määrää a :lle ja b :lle sellaiset arvot, että yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} ax + y - 1 = 0, \\ bx - ay + 2 = 0 \end{cases}$$

on useampia ratkaisuja x, y . (Syksy 10, pitkä.)

1961 Olkoon c tasasivuisen kolmion sisään piirretty ympyrä; sen ulkopuolelle jääviin kolmeen kärkikuvioon piirretään kuhunkin ympyrä, joka sivuaa c :tä ja kahta kolmion sivua, näiden ulkopuolelle jääviin kolmion kärkikuvioihin vastaavanlaiset ympyrät jne. loppumattomiin. Laske kaikkien ympyröiden kokonaispinta-alan suhde kolmion pinta-alaan. (Syksy 2, pitkä.)

1962 Tasasivuisen kolmion ABC kärjet yhdistetään ympäri piirretyn ympyrän kaarella AC olevaan mielivaltaiseen pisteeseen P . Osoita, että $PB = PA + PC$. (Kevät 6, pitkä; lyhyt opastuksella: ”Todistusta varten erota BP :stä jana $BD = PA$.”)

1963 Sarjan ensimmäinen termi on kaksi kolmasosaa toisesta, toinen kolme neljäsosaa kolmannesta, kolmas neljä viidesosaa neljännestä jne. Sarjan n :s termi on u . Ilmaise n ensimmäisen termin summa $n:n$ ja $u:n$ avulla. (Kevät 2, pitkä.)

1964 Neliöön $ABCD$ on piirretty kolmio EFG siten, että kärki E on sivun CD keskipisteessä ja kärjet F ja G ovat A -kulman kyljillä yhtä etäällä A :sta. Miten suuri osa neliöstä on kolmio, kun sen ala on mahdollisimman suuri? (Syksy 6, lyhyt.)

1965 Osoita, että käyrät

$$x^2 - 2ay - a^2 = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + 2by - b^2 = 0$$

leikkaavat toisensa kohtisuorasti (s.o. leikkauspisteisiin piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan) kaikilla $a:n$ ja $b:n$ samanmerkkisillä arvoilla. (Syksy 4, pitkä.)

1966 Kartion kärki on R -säteisen pallon keskipisteessä ja pohjaympyrä pallon pinnalla. Määrää kartion tilavuuden suurin mahdollinen arvo. (Kevät 7, lyhyt.)

1967 Ratkaise z yhtälöstä $\bar{z} - z = i\bar{z} + 4$, missä i on imaginaariyksikkö ja $z = x + iy$ ja $\bar{z} = x - iy$ sekä x ja y reaalilukuja. (Kevät 5, pitkä.)