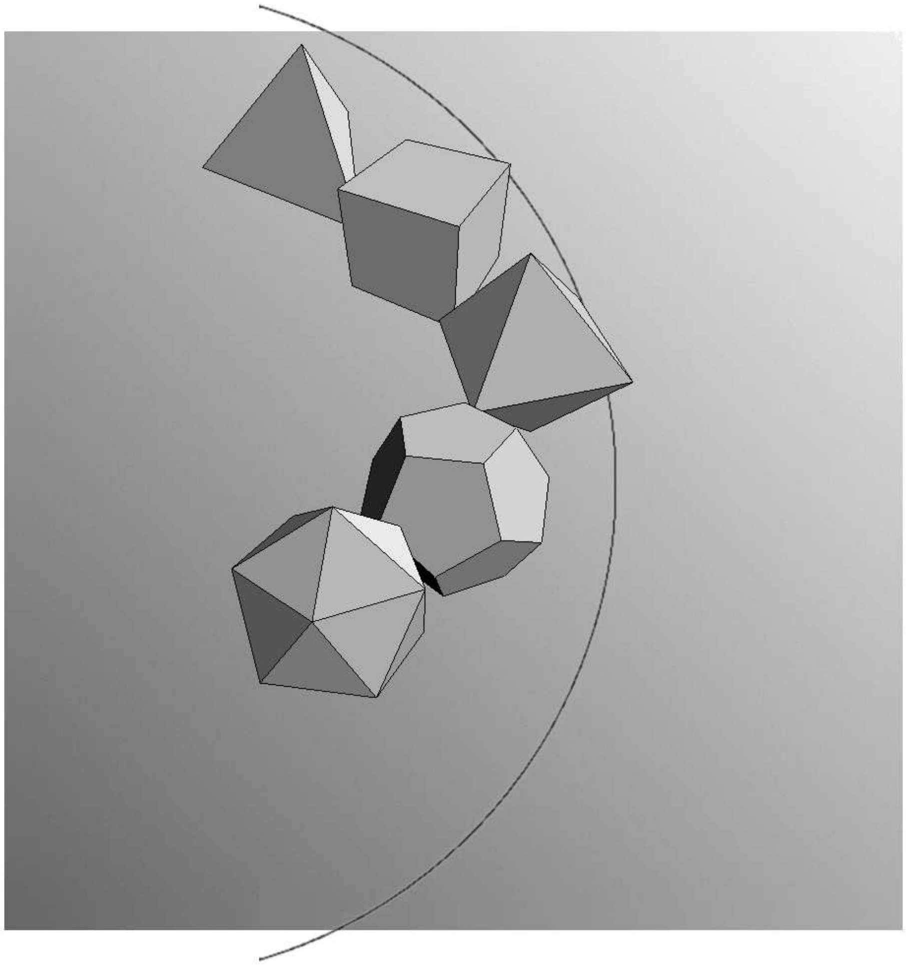
Solmu

matematiikkalehti

2/1996-97



http://www.math.helsinki.fi/Solmu/

Solmu 2/1996-97

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto
http://www.math.helsinki.fi/Solmu/

Päätoimittaja *Kerkko Luosto*
Toimitussihteeri *Jouni Seppänen*

Sähköposti (Internet)
Kerkko.Luosto@Helsinki.FI
Jouni.Seppanen@Helsinki.FI

Materiaali seuraavaan numeroon pyydetään toimittamaan 30.4. mennessä ja syksyn ensimmäiseen numeroon 10.8. mennessä.

Lehden aloittamisen ovat tehneet taloudellisella tuellaan mahdolliseksi Nokia (http://www.nokia.com) ja Taloudellinen Tiedotustoimisto (http://www.tat.fi). Taloudellisen Tiedotustoimiston kotisivuilta löytyy mm. nuorisotutkimusta ja ajankohtaista tietoa teollisuudesta.

Kiitämme Kullervo Niemistä ja Päivölän kansanopiston matematiikkalinjan opiskelijoita yli tuhannen lehden postittamisesta sekä Uoti Urpalaa avusta monitahokkaiden kuvien luomisessa.

Huom! Solmua jaetaan jokaiseen kouluun vain yksi kappale. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus

Tämänkertainen Solmu on edellistä selvästi paksumpi ja mielestäni myös monipuolisempi. Tehtävien ja proosamuotoisten artikkelien lisäksi lehdessä on parikin kirjoitusta suoraan matematiikasta: monitahokkaita ja verkkoja. Stephen Hawkingin kirja Ajan lyhyt historia teki kuuluisaksi väittämän, että jokainen kaava puolittaa kirjan lukijakunnan. Aika vaikea lähtökohta matematiikan tunneille, etten sanoisi! Joka tapauksessa olemme osoittaneet huomattavaa kansalaisrohkeutta pyrkiessämme levittämään matemaattista materiaalia.

Uuden lehden ongelmana on aina tunnetuksi tuleminen. Solmua on levitetty kaikkiin Suomen lukioihin, mutta palautteen vähäisyydestä päätellen operaation menestys on ollut korkeintaan tyydyttävä. Toimittajakunta uskaltaa siis vielä toivoa saavansa enemmän kommentteja Solmun sisällöstä. Huomattakoon, että Solmu ei ole kaupallinen lehti, vaan sitä saa kopioida vapaasti omaan käyttöön ja opetustarkoituksiin yms. (Kaupallinen käyttö ei ole toki luvallista.) Solmun saatavuutta tietoliikenneverkon kautta pyritään helpottamaan tarjoamalla Solmun TEX- ja PostScript-versiot suoraan imuroitaviksi. Lehden toivotaan leviävän tällä tavoin ystäväpiireissä.

Kerkko Luosto

Toimitussihteerin palsta

Tämän numeron yleisönosastopalstalle tuli kirjoitus, jonka mukaan Internetistä ei ole mitään hyötyä. Suuri osa WWW-sivuista on toki melko turhia, ja kiinnostavan tiedon löytäminen on vaikeaa. Matematiikasta kiinnostuneelle suosittelen Yahoo-hakemiston matematiikkasivuja,[1] ja seuraavassa esittelen muutaman muun lähtöpisteen.

Minnesotalaisen Geometry Centerin[2] sivuilla on tietoa geometriasta ja kauniita kuvia. Geometry Center on myös tuottanut videoita,[3] jotka havainnollistavat modernia matematiikkaa kohtuullisen ymmärrettävällä tavalla. Ne saattaisivat sopia koulun matematiikkakerhossa katsottaviksi. (Kannattaa varata aikaa videoiden katsomiseen muutamaan kertaan ja mukana tulevien kirjasten lukemiseen.)

Math Forumissa[4] on paljon tietoa matematiikasta ja mm. viikottaisia tehtäviä.

Olli V. Lounasmaan raportti "Huippuyksikköä ei perusteta vaan se syntyy"[5] sisältää ehdotuksia eksaktien tieteiden tutkimuksen ja opetuksen kehittämiseksi.

Markku Halmetoja on julkaissut WWW:ssä muutakin kiinnostavaa[6] kuin tämän Solmun jutun Eulerin kaavasta. Samaiselle kaavalle on muuten paljon muitakin todistuksia; David Eppstein on kerännyt peräti viisitoista![7] Eppsteinilla on muitakin kiinnostavia ajanvietematematiikkasivuja.[8]

Internetix-projektin Matematiikan valmennussivuilla[9] on paljon kiinnostavaa materiaalia, ja lisää löytyy Internetixin kirjaston matematiikkaosastolta.[10]

Jouni Seppänen

[1] http://www.yahoo.com/text/Science/Mathematics/

[2] http://www.geom.umn.edu

[3] http://www.geom.umn.edu/video/

[4] http://forum.swarthmore.edu

[5] http://liisteri.hut.fi/muistio/index.html

[6] http://www.mantta.fi/%7Ehamlet/math/

[7] http://www.ics.uci.edu/%7Eeppstein/junkyard/euler/

[8] http://www.ics.uci.edu/%7Eeppstein/recmath.html

[9] http://www.internetix.ofw.fi/opinnot/lukio/matematiikan_valmennus/index.htm

[10] http://www.internetix.ofw.fi/kirjasto/51.htm

Monitahokkaista

Matematiikan voisi lyhyesti määritellä pyrkimykseksi löytää jonkin objektijoukon yleiset ominaisuudet ja kääntäen karakterisoida tutkittava joukko yleisten ominaisuuksiensa kautta. Tiedämme esimerkiksi, että euklidisessa geometriassa tasokolmion kulmien summa on oikokulma (radiaaneissa π) ja toisaalta, jos havaitsemme tasomonikulmion kulmien summan oikokulmaksi, tiedämme, että kyseessä on kolmio. Tässä kirjoituksessa tutustumme erääseen kaikille monitahokkaille yhteiseen ominaisuuteen ja sovellamme sitä parissa mielenkiintoisessa tapauksessa. Lopuksi palaamme peruskysymykseen hieman yleisemmällä tasolla. Tekstiin sisältyy lukijan pohdittaviksi tarkoitettuja kysymyksiä, joista palautteen, myös koko kirjoitusta koskevia kommentteja, voi lähettää sähköpostitse allekirjoittaneelle.

Tutkimamme monitahokkaat ovat tasojen rajaamia kolmiulotteisia reiättömiä kappaleita. Kappaleita rajoittavien tasojen osia (monikulmioita) kutsutaan tahkoiksi, tahkojen leikkausviivoja särmiksi ja särmien päätepisteitä kärjiksi. Jokainen särmä on yhteinen kahdelle tahkolle. Otamme tehtäväksi tutkia tahkojen, särmien ja kärkien lukumäärien välistä riippuvuutta. Olkoon tahkoja T, särmiä S ja kärkiä K kappaletta. Oletetaan edelleen, että tahkojen kulmamäärät ovat

$$n_1, n_2, \ldots, n_T.$$

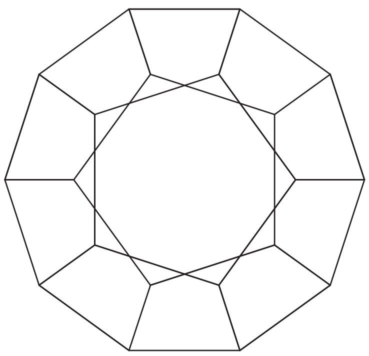
Koska jokaisessa tahkossa on särmien määrä sama kuin kulmien määrä ja jokainen särmä on yhteinen kahdelle tahkolle, on

$$2S = n_1 + n_2 + \cdots + n_T.$$

Monitahokkaan kaikkien tahkojen kaikkien kulmien summaan sisältyy tieto tutkittavien osien lukumääristä, joten laskemme kyseisen kulmasumman kahdella eri tavalla. Olkoon tämä summa X. Koska tasossa olevan n-kulmion kulmien summa[11] on $(n-2)\pi$, on

$$X = (n_1-2)\pi + (n_2-2)\pi + \cdots + (n_T-2)\pi = (n_1+n_2+\cdots+n_T-2T)\pi = (S-T)2\pi.$$

Ajatellaan nyt monitahokas projisoiduksi tasoon siten, että jokaisen tahkon projektio on kulmamäärältään tahkoa vastaava monikulmio. Tämä on mahdollista, koska tahokkaassa on äärellinen määrä tahkoja ja särmiä ja tahokas voidaan projisoida äärettömään moneen suuntaan. Jos kaikissa projektioissa jokin tahko projisoituisi janaksi tai jokin särmä pisteeksi, täytyisi tahkoja ja särmiä olla ääretön määrä. Projektiokuvio on monikulmio, jossa on päällekkäin tahokkaan ylä- ja alapuolen kuva. Oheinen kuvio pyrkii havainnollistamaan tilannetta. Selvyyden vuoksi voi ylä- ja alapuolen kuvia ajatella erillisinä. Olkoon projektiokuvan reunalla K_1 kappaletta tahokkaan kärkien projektioita, alapuolisen kuvan sisällä K_2 kpl kärkien projektioita sekä yläpuolisen kuvan sisällä K_3 kappaletta kärkien projektioita. Tällöin kaikkien kulmien summa on



$$X = K_2 2\pi + (K_1-2)\pi + K_3 2\pi + (K_1-2)\pi = (K_1+K_2+K_3-2)2\pi = (K-2)2\pi.$$

Vertaamalla X:n lausekkeita saadaan

$$T - S + K = 2.$$

Tätä kutsutaan Eulerin monitahokaskaavaksi,[12] joissakin kirjoissa myös Eulerin–Descartesin kaavaksi. Descartes[13] keksi kaavan vuonna 1639, mutta se tuli tunnetuksi Eulerin uudelleen keksimänä vuonna 1751.

[11] http://www.mantta.fi/%7Ehamlet/math/induktio/
[12] http://www.shu.edu/projects/reals/history/euler.html
[13] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/Mathematicians/Descartes.html

Platonin monitahokkaat

Monitahokasta sanotaan säännölliseksi, jos se on kupera (mitkä tahansa kaksi sisäpistettä voidaan yhdistää janalla, joka on kokonaan monitahokkaan sisällä), jos sen kaikki tahkot ovat yhteneviä ja jos jokainen monitahokkaan kärki on yhteinen samalle määrälle tahkoja. Säännöllisiä monitahokkaita, joita kutsutaan myös Platonin monitahokkaiksi, on olemassa vain kansikuvassa näkyvät viisi kappaletta. Tämän asian todistus sisältyy Euklideen Elementa-teoksen kolmanteentoista kirjaan ja on koko kyseisen teoksen huipentuma. Käymme lyhyesti läpi asian perustelun.

Monitahokkaan jokainen kärkipiste on yhteinen vähintään kolmelle eri tahkolle, jotka ovat säännöllisiä monikulmioita. Jos määrättyyn kärkeen liittyvät tahkot irroitetaan kappaleesta, leikataan auki yhtä särmää pitkin ja levitetään tasoon, on näin saatavan kulman oltava pienempi kuin täysikulma. Täten ainoastaan seuraavat viisi tapausta ovat mahdollisia:

- jokainen kärki on yhteinen kolmelle tasasivuiselle kolmiolle,
- jokainen kärki on yhteinen neljälle tasasivuiselle kolmiolle,
- jokainen kärki on yhteinen viidelle tasasivuiselle kolmiolle,
- jokainen kärki on yhteinen kolmelle neliölle ja
- jokainen kärki on yhteinen kolmelle säännölliselle viisikulmiolle.

Tähän listaan voidaan päätyä täsmällisemminkin: jokainen tahko on p-kulmio ($p > 2$), jokainen kärki on yhteinen q:lle tahkolle ($q > 2$) ja ylläkuvattu tasoon levitetty kulma on pienempi kuin täysikulma. Johda tästä epäyhtälö ja etsi sen kokonaislukuratkaisut (p, q).

Pidämme kappaleiden olemassaoloa annettuna tosiasiana ja katsomme Eulerin kaavan avulla, miten voidaan päätellä kappaleiden tahkojen, kärkien ja särmien lukumäärät. On helppo nähdä, että kuudesta neliöistä muodostuu kuutio ja että neljästä tasasivuisesta kolmiosta muotoutuu tetraedri, mutta voi olla hankalampi tajuta, kuinka monta viisikulmiota tarvitaan monitahokkaan muodostamiseksi. Olkoon tahkoja T kappaletta. Koska joka tahkossa on viisi sivua ja jokainen särmä on yhteinen kahdelle tahkolle, on särmien määrä $S = 5T/2$. Koska jokaisessa tahkossa on viisi kärkeä ja jokainen tahokkaan kärki on yhteinen kolmelle tahkolle, on kärkien lukumäärä $K = 5T/3$. Sijoittamalla nämä Eulerin kaavaan, saadaan $T = 12$. Kärkien määrä on $K = 5 \cdot 12/3 = 20$ ja särmiä on $S = 5 \cdot 12/2 = 30$; kappale on säännöllinen 12-tahokas eli dodekaedri.

Jokaisella Platonin kappaleella on ns. duaalinen kappale, joka saadaan aikaan yhdistämällä sivutahkojen painopisteet lähinnäolevien tahkojen painopisteisiin. Duaaliset kappaleet ovat myös säännöllisiä monitahokkaita. Laadi taulukko Platonin kappaleiden tahkojen, särmien ja kärkien lukumääristä ja päättele siitä, mikä on minkäkin duaalinen kappale.

Vuosisatojen saatossa Platonin kappaleet ovat olleet myös taikauskoisten pohdintojen kohteina. Antiikin ihmiset liittivät neljä niistä tuon ajan tunnettuihin peruselementteihin veteen, tuleen, maahan ja ilmaan. Viides kappale, dodekaedri, liitettiin myöhemmin eetteriin. Kepler yritti suhteuttaa planeettojen keskimääräisiä etäisyyksiä Auringosta sisäkkäin asetettujen Platonin kappaleiden sisään ja ympäri piirrettyjen pallojen säteisiin. (Tästä on mielenkiintoinen kuvaus Raimo Lehden teoksessa "Tanssi Auringon ympäri", Gummerus 1989, ISBN 951-749-104-2) Kappaleita on myös käytetty taikakaluina. Nykyisin niitä voi ostaa arpanoppina ns. roolipelitarvikkeita myyvistä liikkeistä.

Matemaatikoita Platonin kappaleet kiinnostavat symmetrioittensa takia. Kappaleilla on lukuisia symmetria-akseleita, joiden ympäri voidaan suorittaa kiertoja niin, että kierretyt kappaleet yhtyvät alkuperäisiin kappaleisiin. Kiertoja voidaan yhdistellä ja ne muodostavat järjestelmiä, joita matematiikassa kutsutaan ryhmiksi. Ryhmäteoria syntyi 1800-luvulla ja ryhmät ovat osoittautuneet yhdeksi kaikkein tärkeimmistä matemaattisista käsitteistä. Ne sukeutuvat esiin mitä merkillisimmissä yhteyksissä sekä matematiikassa että uudemmassa fysiikassa. Platonin kappaleiden pyörittely havainnollistaa eräitä äärellisiä ryhmiä. Jotkut matemaatikot kutsuvatkin Platonin kappaleita symmetriaryhmiensä varjoiksi! Lisää tietoa ryhmistä löytyy esimerkiksi Spectrum-tietokirjan algebra-artikkelista. Tutustu myös matemaattiseen multimediaan[14] ja ryhmäteorian historiaan.[15]

[14] http://www.math.jyu.fi/%7Eparkkone/juhlaohjelma.html

[15] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/HistTopics/Development_group_theory.html

Fullereenit

Noin kymmenen vuotta sitten löydettiin eräästä tähtien välisestä pölypilvestä molekyylejä, joiden spektroskooppinen analyysi osoitti koostuvan tasan 60:stä hiiliatomista. Tuolloin tunnetut hiilen allotrooppiset muodot, timantti ja grafiitti, eivät kelvanneet selityksiksi, sillä niissä voi olla hiiltä vaihteleva määrä. Grafiitti on tasomainen, säännöllisistä 6-kulmioista koostuva rakennelma. Jos 6-kulmioita korvataan 5-kulmioilla, taso käyristyy ja tietyllä määrällä 5-kulmioita se sulkeutuu monitahokkaaksi. Tutkijat löysivät molekyylin muodon teippaamalla kartongista leikattuja 5- ja 6-kulmioita yhteen. Tulos osoittautui tavallisen jalkapallon näköiseksi 60-kärkiseksi monitahokkaaksi. Eulerin monitahokaskaavan tunteminen olisi ehkä nopeuttanut molekyylin muodon keksimistä muutamalla tunnilla! Molekyyli nimettiin fullereeniksi Fuller-nimisen arkkitehdin mukaan, joka oli jo 60-luvulla rakentanut kyseisen monitahokkaan muotoisia rakennuksia. Laske Eulerin kaavaa soveltaen, kuinka monta 5- ja 6-kulmiota on kyseisessä molekyylissä. Mitkä muut hiiliatomien lukumäärät ovat teoreettisesti mahdollisia, kun oletetaan sivutahkot 5- ja 6-kulmioiksi? Voisiko 60-kärkisen monitahokkaan rakentaa 4-kulmioista ja 6-kulmioista? Entä 4-kulmioista ja 5-kulmioista? Fullereenin löytäjät Robert Curl, Harold Kroto ja Richard Smalley saivat Nobelin kemian palkinnon vuonna 1996.

Lisää Eulerin kaavasta

Tutustumme lopuksi 2-ulotteisten pintojen luokitteluun Eulerin kaavaan nojautuen. Tarvittavat käsitteet ja argumentit esitellään intuitiivisesti. Niiden tarkka matemaattinen määrittely ja todistusten läpivienti niiden avulla olisikin tutkija-tasoista yliopistomatematiikkaa. Tässä on tarkoitus saada ainoastaan yleiskuva asiasta.

Tutkimme konkreettisten 3-ulotteisten kappaleitten 2-ulotteisia pintoja. Tahko-särmä-kärki-rakenne ajatellaan pinnalle piirretyksi viivoitukseksi, jossa pinta jakaantuu monikulmioiden kaltaisiin alueisiin, joita pidetään tahkoina. Alueiden reunat muodostuvat särmistä, joiden ei tarvitse olla suoraviivaisia. Särmien risteyskohtia pidetään kärkinä. Särmillä on kärjet päätepisteinä. Päätepisteet voivat yhtyä, jolloin särmä on sulkeutuva rengas. Yhtyneet päätepisteet lasketaan yhdeksi kärjeksi. Oletamme lisäksi, että pinnoilla on seuraava suunnistusominaisuus: särmiä piirtäessämme pysymme koko ajan joko kappaleen ulkopinnalla tai kappaleen sisäpinnalla, mutta emme pääse huomaamattomasti liukumaan ulkoa sisään tai päinvastoin. Tämän voi sanoa hieman matemaattisemmin seuraavasti: jos annamme kappaleen pinnan normaalivektorin kulkea kappaleen pintaa pitkin minkä tahansa lähtöpisteeseen palaavan reitin, on vektori takaisin palattuaan samoin päin kuin lähtiessä. Esimerkiksi Möbiuksen nauhalla ei ole tätä ominaisuutta. Sen pinnalta löytyy reitti, jota pitkin kulkien vektori on yhden kierroksen jälkeen ylösalaisin.

Merkitään seuraavassa lausekkeen $T - S + K$ arvoa E:llä. E:tä kutsutaan pinnan Euler-karakteristikaksi. Todistamme induktiolla, että $E(\text{pallo}) = 2$.

1) Piirretään pallon pinnalle kiinteästä pisteestä alkaen sulkeutuva rengas. Pallon pinta jakaantuu 2:ään tahkoon, joita rajoittaa 1 särmä. Valittu kiinteä alkupiste on kärki. Täten $T - S + K = 2 - 1 + 1 = 2$, eli Eulerin kaava toteutuu tässä tapauksessa.

2) Oletetaan pallon pinta viivoitetuksi niin, että $T - S + K = 2$. Käydään läpi kaikki mahdolliset tavat muuttaa lukumääriä T, S ja K ja osoitetaan, että lausekkeen $T - S + K$ arvo pysyy vakiona. Tässä malliksi yksi tapaus:

Olkoon erään tahkon reunalla p kärkeä. Valitaan tahkon sisältä piste uudeksi kärjeksi ja yhdistetään se tahkon reunalla oleviin kärkiin toisiaan leikkaamattomilla viivoilla. Tällöin T, S ja K muuttuvat seuraavasti:

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow T' = T - 1 + p \\ S &\longrightarrow S' = S + p \\ K &\longrightarrow K' = K + 1 \end{aligned}$$

Välittömästi nähdään, että $T' - S' + K' = T - S + K = 2$. Käy läpi yksityiskohtaisesti kaikki muut mahdollisuudet muuttaa T:n, S:n ja K:n lukumääriä.

3) Koska kaava pitää paikkansa 1-kohdan tapauksessa ja kohdan 2 reformaatiot eivät muuta lausekkeen E arvoa, kaava on tosi kaikille mahdollisille pallopinnan viivoituksille.

4) Pallon voi takoa eri muotoihin, kunhan ei revi sitä eikä tee reikiä. Tahkojen, särmien ja kärkien lukumäärät säilyvät ja näin kaikille pallon kaltaisille pinnoille $E(\text{pinta}) = T - S + K = 2$.

Munkkirinkilän eli toruksen Euler-karakteristikalla on toinen arvo. Liimaamalla suorakulmion mallinen paperi lieriöpinnaksi ja liittämällä lieriön päät yhteen nähdään toruksen pinnalla viivoitus, jossa on 1 kärki (suorakulmion kärjet yhtyvät siinä), 2 särmää (molemmat liimaus-saumat) ja 1 tahko (koko suorakulmio), joten $E(\text{torus}) = 1 - 2 + 1 = 0$. Induktio toimii samoin kuin pallon tapauksessa.

Torus-pinta voidaan ajatella syntyneeksi myös niin, että liitetään pallopintaan yksi kahva ja muotoillaan näin saatu pinta munkkirinkilän näköiseksi. Kahvaksi kelpaa lieriöpinta, jonka päät muotoillaan niin, että ne tulevat yhteneviksi kahden pallon pinnalla olevan erillisen tahkon kanssa. Taitetaan lieriö sopivasti, liitetään sen päät valittuihin tahkoihin ja piirretään särmä ensimmäisen tahkon reunalla olevasta kärjestä toisessa päässä olevan tahkon reunalla olevaan kärkeen. Tällöin tahkojen määrä vähenee yhdellä ja särmien määrä vastaavasti kasvaa yhdellä, joten Euler-karakteristikan arvo pienenee kahdella. Kahvaksi ei kelpaa sivusaumaton lieriö, koska sen vaippaa ei voi mieltää tahkoksi, jonka pitäisi olla monikulmio. Kahvan poistaminen palauttaa tilanteen ennalleen eli E:n arvo kasvaa 2:lla.

Ilmeisesti jokainen kahvan liittäminen pudottaa E:n arvoa 2:lla ja vastaavasti jokainen kahvan poisto kasvattaa sitä 2:lla, joten yleisesti pätee

$$E(n\text{-kahvainen pinta}) = 2 - 2n.$$

Pinnat voidaan siis erotella luokkiin kahvamäärän perusteella ja luokka selviää laskemalla tavalla tai toisella pinnan Euler-karakteristika.

Kriittinen lukija kysynee, miksi pitää nähdä näin paljon vaivaa nähdäkseen, onko annettu pinta pallo vai rinkilä, kun asia selviää katsomalla. Näin tietenkin onkin, kun on käytettävissä avaruuden kolmas ulottuvuus ja voimme tarkastella pintaa ulkopuolelta. Mutta jos olisimme toruksen pinnalla asuvia kaksiulotteisia olioita, joille avaruuden kolmas ulottuvuus olisi tuntematon, emme voisi tarkkailla maailmankaikkeuttamme ulkoapäin. Voisimme operoida vain pinnan sisällä. Silloinkin, jos matematiikkaa harrastaisimme, päätyisimme käsitykseen maailmankaikkeutemme luonteesta kolmioimalla asuinpintamme ja laskemalla suureet T, S ja K. Laskelma $T - S + K = 0$ osoittaisi, että maailmankaikkeutemme on rinkilän mallinen. Olemme 2-ulotteista pintaa vaikeamman 3-ulotteisen avaruutemme kanssa periaatteessa samassa asemassa kuin nuo kuvitellut 2-ulotteiset oliot. Emme voi tarkastella 3-ulotteisesta maailmaamme jostakin sen ulkopuolelta. Meidän on pystyttävä selvittämään avaruutemme luonne avaruuden sisältä poistumatta. Tässä 2-ulotteisten pintojen tutkiminen saattaa antaa vihjeen oikeasta lähestymistavasta.

Pintojen luokittelu kuuluu topologiaksi kutsuttuun matematiikan alaan. Sen juuret juontavat 1700-luvulle, mutta pääosa topologiasta on luotu kuluneella vuosisadalla. Lisää tietoa topologiasta saat jo mainitusta Spectrum-tietokirjasta. Tutustu myös topologian historiaan.[16]

Markku Halmetoja, Mäntän lukio
hamlet@mantta.fi

Pál Erdősin matematiikasta

Edellisessä solmussa oli Marjatta Näätäsen kirjoitus Pál Erdősistä. Siitä ilmeni oivallisesti, että Erdős oli todellinen nukkavierun professorin karikatyyri. Vaikka hyväksyttäisiinkin se seikka, että matemaatikot poikkeavat toisistaan luonteeltaan vähintään yhtä paljon kuin ihmiset yleensäkin, jäljelle jää kysymys, miten jokin tieteenala voi lumota tieteilijän niin, että hän omistautuu sille täysin, elää askeettisesti ja suhtautuu arkipäiväisiin asioihin suorastaan välipitämättömästi. Erdősin tapauksessa kysymykseen on tavallista helpompi vastata, sillä hänen työpanoksensa kohdistui aloille, joiden tutkimusongelmien ymmärtämiseen riittää hyvä matemaattinen yleissivistys.

[16] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/HistTopics/Topology_in_mathematics.html

Erdősin tuotanto oli ennenkuulumattoman laaja, toista tuhatta artikkelia. Tätä kannattaa verrata siihen, että useilla matematiikan aloilla jo yhden artikkelin julkaisemista vuodessa pidetään hyvän tutkijan merkkinä. Vaikka Erdős tuskin oli vuosisadan huomattavin matemaatikko, ja tuotteliaisuuteenkin nähden on esitettävä se varaus, että laatu on usein määrää tärkeämpi tekijä, Erdős oli kiistatta kaikkien aikojen yhteistyökykyisin matemaatikko: hänellä oli yhteisjulkaisuja ainakin neljän sadan muun tutkijan kanssa. Erdősin tuotannon kattavan tarkastelun sijasta on joka tapauksessa järkevintä tyytyä yhteen, anekdoottimaiseen, mutta jollain tavalla tyypilliseen esimerkkiin.

Erdős havainnollisti matematiikan, tai oikeastaan nimenomaisesti todistamisen, voimaa seuraavan väitteen avulla.

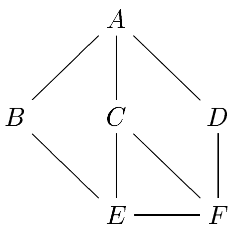
> "Mielivaltaisesta 6 hengen ryhmästä voidaan valita 3, jotka ovat joko kaikki keskenään tuttuja tai joista kukaan ei tunne ketään toista."

Tuttuus oletetaan luonnollisesti molemminpuoliseksi. Miten moinen väite todennetaan? Helppoa, voisi ajatella, käydään vain läpi kaikki tapaukset. Kunkin parin kohdalla on kaksi mahdollisuutta: joko ao. henkilöt tuntevat toisensa tai eivät. Parin voi kuuden hengen joukosta valita $\binom{6}{2} = 15$ eri tavalla. Siis tarkasteltavia tapauksia on $2^{15} = 32\ 768$ kappaletta. Tässä vaiheessa halukkuus väitteen tapaus tapaukselta tutkimiseen laimennee huomattavasti.

Väitteen voi kuitenkin suoraan todistaa oikeaksi. Olkoon nimittäin A yksi tarkasteltavista kuudesta henkilöstä. Tuttuus ja tuntemattomuus ovat sikäli symmetrisessä asemassa, että henkilön A voi olettaa tuntevan vähintään puolet muista, siis vähintään kolme henkeä; olkoot nämä B, C ja D. Jos kukaan näistä ei tunne toisiaan, $\{B, C, D\}$ on kolmen toisiaan tuntemattoman joukko. Muuten esimerkiksi B tuntee C:n, ja $\{A, B, C\}$ on kolmen tutun joukko. Näin väite on todistettu. Mainittakoon, että juuri tämä oli tehtävänä yhdysvaltalaisessa Putnam-kilpailussa vuonna 1953.

Tietokoneesta innostunut saattaisi protestoida, että tapauskohtaisen ratkaisutavan hylkääminen oli hätiköityä. 32 768 tapausta on tosin ihmiselle raskas urakka, mutta nykymikrolle vain silmänräpäys. Kritiikki on kuitenkin aiheetonta, koska käsittelemämme väite yleistyy. Niinpä samanlaisin ideoin voidaan osoittaa, että 18 hengen joukosta voidaan aina valita 4 tutun tai 4 toisiaan tuntemattoman joukko, ja $2^{\binom{18}{2}} = 2^{153}$ tapausta riittänee nujertamaan kaikki tietokoneet, vaikka ilmiselvästi samanlaiset tapaukset onnistuttaisiin yhdistelemään.

Yleisesti voidaan osoittaa, että 4^n hengen joukosta voidaan valita n tutun tai n toisiaan tuntemattoman joukko, kun $n \in \mathbb{N}$. Luonnollisestikaan tuloksen pätevyys ei rajoitu vain ihmisiin ja keskinäiseen tuttuuteen, vaan yhtä hyvin voitaisiin käsitellä esim. kaupunkeja ja niiden välisiä suoria junayhteyksiä. Tavallisesti asia esitetäänkin abstraktimmin verkkoteoreettisesti, ja ihmisten ja tuttuuden sijasta puhutaan solmuista ja särmistä.



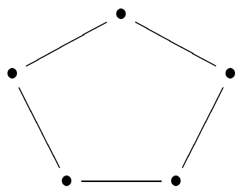
Yllä oleva verkko on $G_0 = (V_0, E_0)$, missä $V_0 = \{A, B, C, D, E, F\}$ on solmujen joukko ja

$$E_0 = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, E\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{D, F\}, \{E, F\}\}$$

särmien joukko. Verkon G_0 voi ajatella kuvaavan kuutta henkeä ja sitä, että A tuntee henkilöt B, C ja D, E B:n, C:n ja F:n sekä F C:n ja D:n. Kun $G = (V, E)$ on mielivaltainen verkko, niin joukkoa $K \subset V$ kutsutaan verkon G *klikiksi*, jos sen jokainen solmu on toiseen yhteydessä, ts. jos $\{x, y\} \in E$ kaikilla eri $x, y \in K$. Vastaavasti $R \subset V$ on *riippumaton* joukko, jos sen solmujen välillä ei ole lainkaan särmiä, ts. $\{x, y\} \notin E$ kaikilla $x, y \in R$. Verkossa G_0 esimerkiksi $\{C, E, F\}$ on klikki ja $\{B, C, D\}$ riippumaton. Näiden käsitteiden avulla voidaan muotoilla

> **Ramseyn lause:** Jokaista $n \in \mathbb{N}$ vastaa sellainen $r \in \mathbb{N}$, että jos verkossa $G = (V, E)$ on vähintään r solmua, niin G sisältää n solmun klikin tai n solmun riippumattoman joukon.

Lause on nimetty Frank Ramseyn mukaan, joka vuonna 1930 esitti sen hieman yleisemmässä muodossa kuin yllä. Edellä on jo todettu, että lauseessa voidaan valita $r = 4^n$. Kun $n \in \mathbb{N}$, merkitään $R(n)$:llä pienintä lukua r, jolle lauseen ehto on voimassa. Putnam-kilpailussakin esitetty tapaus osoitti, että $R(3) \leq 6$. Itse asiassa yhtäsuuruus on voimassa, $R(3) = 6$, sillä 5 solmun verkossa ei välttämättä ole kolmen solmun klikkiä tai riippumatonta joukkoa, kuten alla oleva viisikulmio osoittaa.



Tiedetään, että $R(4) = 18$, mutta suuremmilla argumenttien arvoilla nämä ns. Ramseyn funktion arvot eivät ole tarkasti tiedossa, esim. $43 \leq R(5) \leq 50$. Itse asiassa tarkkojen arvojen etsiminen on osoittautunut niin työlääksi, että se hädin tuskin vastaa tarkoitustaan. Sen sijaan asymptoottiset arviot, kuten yläraja $R(n) \leq 4^n$, ovat periaatteellisesti tärkeitä.

Tässä kohdassa Erdős palaa kuvaan, hän näet esitti Ramseyn funktiolle erittäin hyvän alarajan vuonna 1947. Ongelma piilee sopivien esimerkkiverkkojen löytymisessä. Jos nimittäin r solmun verkossa ei ole n solmun klikkiä eikä n solmun riippumatonta joukkoa, niin Ramseyn funktion määritelmän mukaan $R(n) > r$. Sopivia verkkoja on kuitenkin vaikea konstruoida, sillä ihmisillä on taipumus sisällyttää esimerkkeihin aina tietty määrä säännöllisyyttä, mikä edistää klikkien ja riippumattomien joukkojen syntymistä. Erdős oivalsi, että pulman voi kiertää valitsemalla verkko satunnaisesti. Kiinnitetään ensin tarkasteltavat $r, n \in \mathbb{N}$ ja r solmun joukko, vaikkapa $V = \{0, \ldots, r-1\}$. Sen jälkeen käydään läpi kaikki solmuparit yksitellen, ja jokaisen kohdalla arvotaan kruunaa ja klaava heittäen, yhdistetäänkö parin solmut vai ei. Jos joukossa $A \subset V$ on n solmua, se on klikki todennäköisyydellä $2^{-\binom{n}{2}}$ ja riippumaton joukko samoin todennäköisyydellä $2^{-\binom{n}{2}}$. Arvotun verkon G kaikkien n solmun klikkien ja riippumattomien joukkojen lukumäärän $\mathbf{X}$ odotusarvo on siis

$$\mathrm{E}\mathbf{X} = \binom{r}{n} \cdot 2^{1-\binom{n}{2}} \leq 2 \cdot \frac{(r \cdot 2^{-(n-1)/2})^n}{n!}.$$

Erityisesti tapauksessa $r = \sqrt{2}^{\,n}$ ja $n \geq 3$ saadaan

$$\mathrm{E}\mathbf{X} \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{2}^{\,n}}{n!} < 1.$$

Mutta tämä odotusarvohan ei voi olla pienempi kuin yksi, ellei satunnaismuuttuja $\mathbf{X}$ saa nollasta poikkeavalla todennäköisyydellä arvoa nolla. Tämä taas merkitsee, että ennemmin tai myöhemmin arvonta tuottaa r solmun verkon, jossa ei ole n solmun klikkejä eikä riippumattomia joukkoja. Siis

$$R(n) > \sqrt{2}^{\,n}.$$

Erdősin oivallus oli todellinen Kolumbuksen muna, ja sen arvoa lisää se, että konstruktiivisesti muodostettuja verkkoja käyttäen Ramseyn funktiolle ei ole pystytty todistamaan eksponentiaalisia alarajoja. Erdősin todistus oli lähtölaukaus satunnaismenetelmien käytölle kombinatoriikassa.

Kirjallisuutta: Erdősin tulos julkaistiin vuonna 1947 lehdessä Bulletin of American Mathematical Society (vol. 53, sivut 292–294). Kirjoituksen alasta on kattava kuvaus kirjassa R. L. Graham, B. L. Rothschild ja J. H. Spencer: Ramsey Theory, Wiley, 1980. Lukua $R(5)$ koskevat arviot perustuvat edellisen lisäksi artikkeliin B. D. McKay, S. Radziszowski: R(5,4)=25 lehdessä Journal of Graph Theory 19 (1995), sivut 309-322.

Mitä hyötyä matematiikasta?

Tavallinen käsitys on, ettei esimerkiksi biotieteissä ja ympäristötieteissä tarvita matematiikkaa. Näiden alojen tutkimus perustuu kuitenkin kokeelliseen toimintaan ja siitä saatavan aineiston tulkintaan. Ohessa asian selvittämiseksi eri alojen edustajien kertomuksia matematiikan tarpeellisuudesta heille.

$$\prod_{\alpha\in[{}^{n}O^{k-1}M_n]} \mathrm{Map}_*\big(S^{\mathbf{l}}(\alpha), S^{\mathbf{l}}_X(\alpha)\wedge E\Sigma_{n+}\big)^{\Sigma_\alpha} \simeq \mathrm{Nat}_{{}^{n}O^{k-1}M_n}(S^{\mathbf{l}}, S^{\mathbf{l}}_X \wedge E\Sigma_{n+})$$

$$C(R^{\mathbf{l}},\alpha) = \big(\prod_{s\in \underline{i_{k-1}}} C(R^{l_k}, |\alpha_k^{-1}(s)|)\big) \times C(R^{d_k\mathbf{l}}, d_k(\alpha))$$

$$P_nQ\mathrm{Map}_*(K,Y) \simeq \mathrm{Nat}_{M_n}(\Sigma^\infty K^{\wedge i}, \Sigma^\infty Y^{\wedge i})$$

$$D_nF(Y) \simeq \mathrm{Map}_*\big(K^{(n)}, QY^{\wedge n}\big)^{\Sigma_n}$$

$$QX = \mathrm{hocolim}_I \Omega^U S^U X$$

Tarvitaanko ympäristötieteissä matematiikkaa?

Ympäristötieteissä on keskeinen osa kokeiden suunnittelu ja saadun aineiston käsittely. Tätä varten tarvitaan matemaattisia ja tilastollisia menetelmiä. Limnologian peruskursseilla joutui parantamaan matematiikan tietojaan koulukurssin lyhyttä laajemmiksi. Asiat tulivat lyhyessä ajassa ja omaksuminen oli vaikeaa. Kadutti, ettei tullut luettua niitä koulussa - siellä ne annetaan pieninä paloina parin vuoden aikana, joten on aikaa sulattaa oppimansa.

Limnologi
(*Limnologi* on vesiekologi.)

Tarvitseeko psykologi matematiikkaa?

Kouluaikana en tiennyt, että psykologiassakin tarvitaan matematiikkaa. Itselleni olisi ollut hyödyksi matemetiikan peruskäsitteiden parempi ymmärtäminen, koska ilmiöitä tutkittaessa tarvitaan matemaattisia malleja. Samoin koeaineiston tarkasteluun ja testaukseen tarvitaan matemaattisia ja tilastollisia menetelmiä.

Psykologi

Tarvitseeko arkkitehti matematiikkaa?

Työskentelen asiantuntijana yrityksessä, joka tuo maahan arkkitehdeille tarkoitettua rakennussuunnitteluohjelmistoa. Ohjelmaa varten teen käyttäjille erilaisia objekteja (ikkuna, ovi, tuoli, kaappi, hyllykkö), joita käytetään mallinnettaessa rakennuksia tietokoneelle. Esimerkiksi ikkunalle käyttäjä voi antaa erilaisia mittatietoja, kuten leveys, korkeus tai lasimateriaali. Annettujen arvojen mukaisesti ohjelma tekee ikkunan kolmiulotteisen kuvauksen, työpiirustuksen ja laskee vielä mallissa käytetyt määrät kuten lattia tai seinäpinta-alat. Näiden älykkäiden objektien luomisessa hyödynnetään esimerkiksi trigonometrisia funktioita ja analyyttistä geometriaa alkaen ympyröistä ja parabeleista.

Lauri Melvasalo
arkkitehtiopiskelija

Mitä tekemistä matematiikalla on kännykän kuuluvuusalueen kanssa?

Teen VTT:llä (Valtion teknillinen tutkimuskeskus) tietoliikenneteorian mallinnusta. Mallinnamme esimerkiksi tukiaseman avulla saatavaa kännykän kuuluvuusaluetta. Jos asema on rakennuksen sisällä, on otettava huomioon mm. radiosignaalien heijastuminen seinistä. Mallissa on useita parametrejä, jotka voidaan sovittaa tilanteen mukaan.

Työssäni tarvitsen matematiikkaa, tällä hetkellä erityisesti jonoteoriaa, stokastiikkaa (esim. suurten poikkeamien teoriaa) ja optimointia. Tietoliikennetekniikka on erittäin nopeastikehittyvä ala, jota tutkitaan kaikissa teollistuneissa maissa. Yhtenä tarkoituksena on löytää tapoja käyttää olemassa olevia resursseja tehokkaammin heikentämättä palvelujen tasoa, esimerkiksi GSM-puheluissa varataan nykyisin kaksi taajuuskaistaa koko puhelun ajaksi, vaikka yleensä puhuu kerrallaan vain yksi ihminen.

Maarit Merikallio
diplomi-insinööri

Tietokonelingvistiikka ja matematiikka

Tietokonelingvistiikka taikka kieliteknologia on uusi tieteenala, joka tutkii ihmisten kielen käsittelemistä tietokoneella. Se on eräänlaista kielitiedettä, jonka kohteena ovat kielet kuten suomi, englanti tai suahili. Tavoitteena on saada tietokonekin "ymmärtämään" omalla tavallaan kieltä. Kun ymmärtäminen kaiken kaikkiaan on ylivoimainen tehtävä, tietokonelingvistiikka aloittaa tyvestä: ensin tunnistetaan sanoja, niiden taipumisesta huolimatta, sitten pääpiirteittäistä lauserakennetta, jne. Tutkimus on lähellä sitä, mitä yleisessä kielitieteessä tehdään sikäli, että etsitään tapoja kuvata sananmuodostusta ja lauseoppia yksittäisestä kielestä riippumattomilla yleisillä menetelmillä. Toisaalta tietokonelingvistiikka hyödyntää matematiikkaa ja tietojenkäsittelytieteen matemaattisia malleja, josta muodostetaan malleja ja rakennetaan kieliopin formalismeja.

Elämme kuulemma tietoyhteiskunnan kynnyksellä ja aikaa, jolloin tietoa on yhtäkkiä saatavilla lähes rajattomasti. Kieliteknologian haasteita ovatkin tämän tietotulvan hallitseminen löytämällä automaattisempia menetelmiä tietotulvan tekstien "ymmärtämiseen". Toinen tärkeä haaste on kansallisen identiteetin säilyttäminen tukemalla kykyä käsitellä tietokoneilla omia kieliämme siinä missä englantiakin tulevassa tietoyhteiskunnassa.

Viesti koululaisille humanistisiin tieteisiin kuuluvasta tietokonelingvistiikasta onkin se, että kiinnostus kieliin ei nykyään sulje pois matematiikkaa, vaan tulevaisuus avaa tällaisille yhdistelmille aivan erityisiä mahdollisuuksia. Ei ehkä niinkään kaavakirjan sujuvan käytön muodossa, vaan nimenomaan kykynä käsitellä abstrakteja asioita, todistaa ja ymmärtää (eikä vain muistaa ja toistaa). Toivoisinkin, että nykyajan lukiossa riittäisi aikaa johtaa asioita, ymmärtää todistuksia ja syy-seuraussuhteita, koska senlaatuinen tieto ei kerran opittuna häviä. Pitkä matematiikka on perinteisesti ollut tässä suhteessa antoisampi kuin lyhyt.

On tavallista kuulla, että kielioppi olisi tarpeettominta, mitä koulussa opetetaan. Harvoin ajatellaan, kuinka eksyksissä olisimme ympäröivässä luonnossa, ellemme erottaisi kuusta koivusta tai sorsaa varpusesta. Kieli ympäröi meitä hämäävän täydellisesti ja pidämme sitä helposti itsetään selvänä. Osaattehan taivuttaa suomen sanoja: 'koira' – 'koiria', mutta 'kaira' – 'kairoja'. Jopa tuntemattoman tai keksitynkin sanan, kuten 'puta' osaisitte taivuttaa 'putia'. Luultavasti ette kuitenkaan osaa sanoa millä perusteella tämän teette. Kielen rakenteen ja toiminnan kuvaamiseksi on opittava suunnistamaan, opittava tiettyjä maamerkkejä, kielioppi on juuri tätä. Kokeilkaa siis kaksitavuisia a-kirjaimeen loppuvia suomen kielen substantiiveja ja tarkkailkaa vaikka peilin edessä, kun äännätte niiden ensimmäistä vokaalia, niin selitys löytyy. Tarvitsitte kuitenkin tässä aika monta kieliopillista käsitettä.

Kimmo Koskenniemi
professori, tietokonelingvistiikka
Helsingin yliopisto

Matematiikan soveltaminen on kiehtovaa!

Peruskoulutukseni on ns. puhtaassa matematiikassa, jolta alalta väittelin v. 1980. Sivuaineinani opiskelin laajasti fysiikkaa. Väittelyni jalkeen tein n. neljä vuotta tutkimustyötä väitöskirjani aihepiirin tiimoilta mutta sitten seurasi huima hyppy tuntemattomaan.

Elettiin tietotekniikan voimakkaan murroksen aikaa. Tietokoneiden, erityisesti henkilökohtaisten työasemien saatavuus oli parantumassa dramaattisesti, erilaiset automaatiojärjestelmät, robotiikka ym. korkean teknologian ihmeet olivat näkyvästi esillä tiedotusvälineissä. Halusin päästä tästä kaikesta jotenkin osalliseksi ja matematiikan osaamiseni tarjosi siihen yllättäen oivan tilaisuuden, kun Teknillisessä korkeakoulussa toimiva tutkimusprojekti tarvitsi matemaatikkoa rakentamaan kolmiulotteisen avaruuden pintojen tietokonepohjaisia esitys- ja visualisointimenetelmiä. Seurasi reilun kolmen vuoden oppiaika tietotekniikassa ja matematiikan soveltamisessa, jonka huipentumana omiin matemaattisiin ideoihin perustuvat koneen osien tietokonemallit eräänä päivänä väikkyivät fotorealistisina kuvina työaseman kuvaputkella. Käydessäni vuosia myöhemmin katsomassa elokuvan Terminator 2, tunsin nostalgista ylpeyttä siitä, että itseasiassa tiesin varsin tarkkaan millaisille matemaattisille ideoille filmin parhaat erikoisefektit perustuivat.

Seikkailuni jatkui myöhemmin Rolf Nevanlinna-instituutissa, jossa tehtäväni oli käynnistää keinotekoisten hermoverkkojen matemaattinen tutkimus. Opin, että lentokenttien metallin paljastimessa, alkeishiukkasten etsimisessä ja proteiinimolekyylien kolmiulotteisen rakenteen selvittämisessä voidaan käyttää samanlaisia matemaattisia menetelmiä, ja että käsinkirjoitettujen numeroiden automaattista tunnistamista ja matkapuhelimen kuuluvuuden parantamista voidaan ajatella saman ongelman eri puolina.

Toiveeni siis toteutui ja olen voinut aitiopaikalta seurata uusimman teknologisen murroksen etenemistä. Pääsylipun tälle haastavalle mutta kiehtovalle ja hauskalle ajelulle on tarjonnut matemaattinen osaaminen. Toisinaan olen selvinnyt yliopiston peruskurssien tiedoilla mutta useammin kuitenkin uudet kysymykset ovat vaatineet kokonaan uusien matematiikan alojen opiskelua. Koska matematiikan soveltamisessa on myös tärkeää tuntea sovelluskohteen taustaa, ei uuden oppiminen ole rajoittunut vain matematiikkaan. Taito omaksua uusia abstrakteja järjestelmiä ja kyky asioiden teoreettiseen hahmottamiseen on käytännön laskutaidon ohella ollut työni kannalta matematiikan opiskelun hyödyllisintä antia. Kun manuaalit ja tuotteet vanhenevat yhä nopeammin, tulee kyky täsmälliseen ajatteluun ja uusien ideoiden tehokkaaseen omaksumiseen aina vain tärkeämmäksi.

Lasse Holmström
Rolf Nevanlinna -instituutti
Helsingin yliopisto

Mitä tekee topologi?

Muistaakseni olen aina pitänyt matematiikasta. Lapsena toiveammattini ei kuitenkaan ollut matemaatikko vaan astronautti. Tullessani yliopistoon 1983 aloin opiskella kemiaa. Fysiikan kautta vaihdoin opiskelualani matematiikkaan, josta väittelin tohtoriksi 1991. Väittelyni jälkeen olen työskennellyt tutkijana sekä Suomessa että ulkomailla. Tällä hetkellä hoidan assistentin virkaa Helsingin yliopiston matematiikan laitoksella.

Työhöni kuuluu jonkin verran opetusta, eli laskuharjoitusten pitoa. Suurin osa ajasta kuluu tutkimiseen. Tutkimusalani on algebrallinen ja differentiaalitopologia. Kuluneen, mutta toivottavasti hyväntahtoisen, sanonnan mukaan *topologi* on henkilö, joka ei erota munkkirinkilää kahvikupista. Toistaiseksi en ole nähnyt yhdenkään topologin yrittävän syödä kahvikuppia. Pitää kuitenkin paikkansa, että munkkirinkilä ja kahvikuppi ovat *homeomorfisia*, eli topologin näkökulmasta katsoen sama asia. Tämä tarkoittaa sitä, että munkkirinkilän muotoisesta, joustavasta aineesta tehdystä kappaleesta voidaan venyttämällä saada kahvikupin muotoinen. (Kummassakin on esim. "yhtä paljon reikiä".) Topologeja siis kiinnostaa kysymys, mitkä matematiikassa esiintyvät kappaleet tai avaruudet ovat homeomorfisia keskenään. Niin äärellis- kuin ääretönulotteisten objektien keskinäistä homeomorfisuutta voidaan tutkia. On mielenkiintoista, että suurimpiin vaikeuksiin yleensä törmätään pienissä ulottuvuuksissa kolme ja neljä.

Usein patologisimmista (joidenkin mielestä mielenkiintoisimmista) tapauksista pääsee eroon, kun olettaa tutkittavalla kohteella olevan differentioituvan rakenteen. (Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että tutkittavien objektien välisiä funktioita voidaan derivoida ja integroida.) Topologian tutkiminen differentiaalilaskentaa hyväksikäyttäen on differentiaalitopologiaa. Toisaalta on olemassa topologisia invariantteja, eli ominaisuuksia, jotka ovat samoja homeomorfisille avaruuksille aivan riippumatta siitä onko näillä avaruuksilla differentioituva rakenne vai ei. Usein tällaisten invarianttien tutkimisessa tarvitaan monimutkaista algebraa. Tällöin voidaan puhua algebrallisesta topologiasta.

Kuten edellisistä kappaleista voi päätellä, on tutkimukseni hyvin teoreettista, enkä esim. tee mitään mittauksia kuten kokeellisempien alojen tutkijat. Omasta mielestäni tällainen teoreettisuus on yksinomaan hauskaa. Kun laboratorioita ja mittalaitteita ei tarvita, matematiikkaa voi vallan mainiosti tutkia sekä kesämökillä että junassa. Tutkimus ei myöskään voi lopahtaa siihen, että projektilta loppuvat rahat tarvittavien laitteiden ostoon. Matemaatikko joutuu lukemaan paljon vähemmän kuin esimerkiksi humanististen alojen tutkijat, mutta toisaalta yhtä lausetta voi joutua miettimään hyvinkin pitkään! Matemaattiset artikkelit ovat nimittäin yleensä varsin lyhyitä, 10–20 sivua on aika tavallinen pituus.

Muihin tieteisiin verrattuna minua matematiikassa viehättää eniten sen eksaktisuus ja ajasta riippumattomuus. Kun jokin matemaattinen tulos on todistettu ja oikeaksi havaittu, se myös pysyy oikeana vuosisadasta toiseen. Antiikin kreikkalaisten geometriaa opetetaan (tai ainakin pitäisi opettaa!!) yhä kouluissa. Toisaalta matematiikassa ei sen eksaktin luonteen vuoksi voi olla kilpailevia koulukuntia, jotka yrittäisivät väittää toistensa tuloksia vääriksi. Matemaattisen väitteen todistus joko on oikein tai ei ole. Todistuksen paikkansa pitävyydestä kuka tahansa ongelmaan perehtynyt matemaatikko voi ottaa selvää lukemalla sen.

Marja Kankaanrinta
matematiikan laitos
Helsingin yliopisto

koonnut **Marjatta Näätänen**

Turistina matematiikassa

Lomakohteen ympäristöön on tapa tehdä tutustumisretkiä. Matematiikkaankin voi tehdä opintomatkoja. Retkellä pysähdytään tarkastelemaan muutamia kohteita. Osa kohteista esitellään, osaan saa tutustua omin päin. Kohteet on numeroitu, ja omin päin tutustumiseen tarkoitetut on merkitty $*$:llä. Retken päätteeksi voi vielä tutustua muutamaan lisäkohteeseen. – Seuraavan retken yhteydessä julkaistaan sitten niiden kohteiden esittelyt, jotka nyt jäävät retkeilijän omatoimisuuden varaan.

Ensimmäinen retki. Induktio – todistamisen työkalu

A Peruskierros

1 Induktioperiaate. Varsin monet matemaattiset väittämät ovat erikoistapauksia lauseesta, jonka yleinen muoto on 'kaikilla joukon A alkioilla x on ominaisuus $P(x)$'. Jos A on pieni, väittämän totuudesta voi vakuuttua vaikkapa tarkastelemalla jokaista A:n alkiota erikseen. Esimerkiksi lauseen 'kaikkien kaksinumeroisten yhdeksällä jaollisten lukujen numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä' totuudesta vakuuttuu tarkastelemalla lukuja 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 ja 99.

Jos joukko A on ääretön, esimerkiksi jokin kokonaislukujen joukon ääretön osajoukko, niin A:ta koskevien väitteiden todistaminen on mahdotonta sillä tavoin, että A:n lukuja tarkastellaan kutakin erikseen. Tällaisissa tapauksissa *induktio* on usein käyttökelpoinen menetelmä. Matemaattinen induktio on ehdottoman varma todistusmenetelmä, toisin kuin yleisen filosofisen kielenkäytön mukainen induktio, joka on erikoistapauksista yleisiä lainalaisuuksia päättelevä menetelmä. Toisinaan matemaattista induktiota kutsutaan myös *täydelliseksi induktioksi.*

Olkoon a kokonaisluku ja $P(n)$ jokin kokonaislukua n koskeva väite. Silloin $P(n)$ on tosi kaikilla $n \geq a$, jos seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa:

- (1) $P(a)$ on tosi.
- (2) Kaikilla $k \geq a$ siitä, että väite $P(k)$ on tosi seuraa, että väite $P(k+1)$ on tosi.

Induktiotodistus etenee kahdesssa vaiheessa: ensin vakuuttaudutaan siitä, että $P(a)$ on tosi. Tämä on usein triviaalia. Toisessa vaiheessa *oletetaan*, vaikka ei varmasti tiedetäkään, että $P(k)$ on tosi mielivaltaisella luvulla k, joka on $\geq a$, ja nojautumalla tähän olettamukseen, ns. *induktio-oletukseen*, osoitetaan, että $P(k+1)$ on tosi. Yhdessä (1) ja (2) takaavat, että $P(n)$ todella pätee kaikilla $n \geq a$: koska $P(a)$ pätee, ja P:n pätemisaluetta voidaan laajentaa askel kerrallaan aina yhtä suurempiin lukuihin, niin myös $P(n)$ nähdään todeksi.

2. Osoitetaan, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$ pätee

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Annetaan tälle väitteelle nimi $P(n)$.

Induktiotodistuksessa on kaksi vaihetta. Ensin havaitaan, että $P(1)$ eli

$$1 = 1 \cdot \frac{(1+1)}{2}$$

on varmasti tosi väite. Oletetaan sitten, että $P(k)$ on tosi väite eli että

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Mutta tällöin

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Koska $k + 2 = (k+1) + 1$, olemme saaneet väitteen $P(k+1)$, ja induktiotodistus on valmis.

3* Bernoullin epäyhtälö. Osoita, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n ja kaikilla reaaliluvuilla $x > -1$ pätee

$$1 + nx \leq (1+x)^n.$$

4 Induktiivinen määrittely. Induktioperiaate tekee mahdolliseksi määritellä täsmällisesti kokonaislukujen funktioita. Esimerkiksi merkinnän a^n, 'kerrotaan a n kertaa itsellään", täsmällisempi määrittely olisi $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$, kun n on kokonaisluku, $n \geq 0$. Samoin n-kertoman $n!$ määritelmä olisi $0! = 1$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. Induktiivisesti voimme määritellä myös summamerkin: jos a_0, a_1, a_2, ... , on lukujono, niin

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n.$$

5* Binomikaava. Merkitään

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Osoita, että

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Vihje: Luvut $\binom{n}{k}$ löytyvät tunnetusti "Pascalin kolmion"

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

n:nneltä riviltä. Todista ensin Pascalin kolmion ominaisuus

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

6. Induktiotodistus on mekaaninen, jos väittämän $P(n)$ täsmällinen muoto on tiedossa. Yleensä kuitenkin $P(n)$ on ensin arvattava ja sitten vasta todistettava. Luonollinen tapa löytää hyvä arvaus on tutkia ensin yksinkertaisia erikoistapauksia.

Joukossa A on n alkiota. Montako epätyhjää osajoukkoa joukolla A on? Yksialkioisella joukolla $A = \{a\}$ on tietysti tasan yksi epätyhjä osajoukko, se itse. Kaksialkioisella joukolla $A = \{a, b\}$ on kolme osajoukkoa, $\{a\}$, $\{b\}$ ja $\{a, b\}$. Kolmialkioisella joukolla $A = \{a, b, c\}$ on kolme yksialkioista osajoukkoa, kaksialkioiset osajoukot $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ ja $\{b, c\}$ sekä kolmialkioinen osajoukko $\{a, b, c\}$, yhteensä seitsemän joukkoa. Muotoillaan väite $P(n)$: n-alkioisella joukolla on $2^n - 1$ epätyhjää osajoukkoa. Induktiotodistus: (1) $P(1)$ on tosi, kuten edellä nähtiin. (2) Oletetaan, että $P(k)$ on tosi eli että jokaisella k-alkioisella joukolla on $2^k - 1$ epätyhjää osajoukkoa. Olkoon A joukko, jossa on $k + 1$ alkiota; olkoon $x \in A$. Silloin joukossa $B = A \setminus \{x\}$ on k alkiota. Joukon A osajoukot ovat joukon B osajoukot C, joukot $C \cup \{x\}$ ja joukko A itse. Induktio-oletuksen mukaan joukkoja C ja siten myös joukkoja $C \cup \{x\}$ on $2^k - 1$ kappaletta. Näin ollen A:lla on yhteensä $2 \cdot (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$ osajoukkoa. Induktiotodistus on valmis, $P(n)$ on tosi kaikilla $n \geq 1$.

7*. Tasoon piirretään n suoraa; näistä mitkään kaksi eivät ole yhdensuuntaisia eivätkä mitkään kolme leikkaa toisiaan samassa pisteessä. Moneenko osaan suorat jakavat tason?

8*. Induktiotodistuksen toinen vaihe saattaa esiintyä myös muodossa (2'): jos $P(a)$, $P(a+1)$, ... , $P(k)$ ovat tosia, niin $P(k+1)$ on tosi. Tunnetusti positiivinen kokonaisluku n on alkuluku, jos jokaisessa esityksessä $n = p \cdot q$, missä p ja q ovat positiivisia kokonaislukuja, on joko $p = 1$ tai $p = n$. Todista: jokainen kokonaisluku $n > 1$ on joko alkuluku tai alkulukujen tulo.

9*. Totuttu tapamme kirjoittaa kokonaislukuja kymmenjärjestelmässä tuntuu itsestään selvältä. Entä jos kantaluku on mielivaltainen? Lukujen kirjoittaminen n-kantaisessa jarjestelmässä on asia, joka voidaan todistaa induktiolla. Olkoon $n > 1$ ja M positiivinen kokonaisluku. Todista, että on olemassa yksikäsitteisesti määrätyt kokonaisluvut $m \geq 0$ ja $a_0, a_1, \ldots, a_m$ siten, että $a_m > 0$, $0 \leq a_j < n$, kun $j = 0, 1, \ldots, m$, ja

$$M = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_0.$$

10. Joskus induktiotodistus vaatii onnistuakseen, että todistetaan tavallaan enemmän, kuin oikeastaan vaaditaankaan. Unohdetaan kohta 5 ja väitetään, että x^2:n kerroin polynomissa $(1+x)^n$ on aina $1 + 2 + \cdots + n - 1$. Tämä väite $P(n)$ on tunnetusti tosi, kun $n = 2$. Oletetaan, että $P(k)$ on tosi. Silloin

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} =& (1+x)(1+x)^k \\ =& (1+x)(a_0 + a_1 x + (1 + 2 + \cdots + (k-1))x^2 + \cdots \\ =& a_0 + (a_1 + a_0)x + (a_1 + (1 + \cdots + (k-1))x^2 + \cdots\end{aligned} \tag{1}$$

Emme voi sanoa, että $P(k+1)$ olisi tosi, koska emme tiedä, mikä a_1 on. Mutta katsotaan vahvempaa väitettä $Q(n)$, jonka mukaan $(1+x)^n$:ssä potenssien x^0, x^1 ja x^2 kertoimet ovat 1, n ja $1 + 2 + \cdots + (n-1)$. Se on tosi, kun $n = 2$. Jos $Q(k)$ on tosi, niin yhtälöissä (1) voidaan kirjoittaa $a_0 = 1$ ja $a_1 = k$. Yhtälö (1) kertoo silloin heti, että $Q(k+1)$ on tosi.

11*. Määritä x^2:n kerroin polynomissa $(1 + x + x^2 + \ldots x^n)^n$.

B Lisäkierros

12*. Montako kaksialkioista osajoukkoa on n-alkioisella joukolla?

13*. Montako lävistäjää on kuperalla n-kulmiolla?

14*. Monellako eri tavalla n lukua voidaan kirjoittaa jonoon?

15*. Olkoon $f(n)$ luku, joka ilmoittaa, kuinka monella eri tavalla n lukua $a_1, a_2, \ldots, a_n$ voidaan kirjoittaa jonoon niin, että jonon k:s luku on aina eri kuin a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Osoita, että $f(n+1) = n(f(n) + f(n-1))$.

16*. Todista: $2! \cdot 4! \cdot \cdots \cdot (2n)! \geq ((n+1)!)^n$. [Nämä luvut kasvavat n:n mukana nopeasti taskulaskimen ulottumattomiin.]

17*. Osoita: jos n on positiivinen kokonaisluku, niin

$$f(n) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

on kokonaisluku.

18*. Olkoon $0 \leq x \leq 180°$. Osoita, että $|\sin(nx)| \leq n \sin x$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

19*. Hanoin torni. Kolmen pylvään A, B ja C ympärille voidaan pinota erikokoisia renkaita. Alkuasetelmassa pylväässä A on n rengasta, suuruusjärjestyksessä pienin päällimmäisenä, ja ne on siirrettävä torniin C samaan järjestykseen. Vain yhtä rengasta kerrallaan saa siirtää, eikä missään pylväässä saa koskaan olla pienempi rengas suuremman alla. Montako siirtoa vähintään tarvitaan? [Vanhan tarinan mukaan Hanoissa on luostari, jossa munkit jatkuvasti siirtävät 30:tä kultaista rengasta edellä kuvatun menetelmän mukaan; kun työ tulee valmiiksi, tulee maailmanloppu. Nykyään munkit ovat tiettävästi suunnilleen työnsä puolivälissä.]

Matti Lehtinen, Helsingin yliopisto
<Matti.Lehtinen@Helsinki.FI>

Solmun tehtävät

Solmu 1:n tehtävät eli vuoden 1996 kansainvälisen Baltian Tie -joukkuematematiikkakilpailun tehtävät olivat ilmeisesti aika kovia. Toimittaja ei voi valittaa suorastaan hukkuneensa vastauspinon alle. Tämänkertaiset tehtävät ovat selvästi helpompia. Pysymme edelleen Itämeren piirissä ja ratkaistaan valikoima tehtäviä Viron matematiikkaolympialaisista. Virossa on pidetty "Matemaatika olümpiaadi" -nimistä koululaismatematiikkakilpailua vuodesta 1954. Seuraavat tehtävät ovat kilpailun ensimmäiseltä vuosikymmeneltä. Tehtävät heijastelevat tuolloista neuvostoliittolaista koulumatematiikkaa eivätkä ole järin omaperäisiä. Jos haluat ratkaisusi julkaistavan Solmussa, lähetä ne osoitteella Matti Lehtinen, Peukaloisentie 4 A 6, 00820 Helsinki, tai sähköpostissa osoitteella `Matti.Lehtinen@Helsinki.FI`. Vihje: jos tehtävät tuntuvat hankalilta, perusta työryhmä kaveriesi kanssa! Solmu julkaisee myös yhteistyöhön perustuvia ratkaisuja.

Myöhempien viittausten helpottamiseksi Solmun tehtäväosasto ryhtyy käyttämään ratkaistavaksi tarjotuista tehtävistä juoksevaa numerointia. Siksi aletaan numerosta 21.

21. Kellon osoittimet ovat päällekkäin kello 12. Milloin ne ovat seuraavan kerran päällekkäin?
22. Todista, että kolmen peräkkäisen kokonaisluvun kuutioiden summa on jaollinen kolmella.
23. Todista, että $\left(\left(\left(7^7\right)^7\right)^7\right)^7 + \left(\left(7^7\right)^7\right)^7$ on jaollinen 10:llä.
24. Osoita, että $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ on kaikilla kokonaisluvuilla a kokonaisluvun neliö.
25. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\sqrt{\binom{x}{y}} + \sqrt{\binom{y}{x}} = \binom{7}{\sqrt{xy}} + 1$$
$$x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78,$$

missä $x > 0$, $y > 0$.

26. Todista, että viiden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa on jaollinen viidellä, mutta ei jaollinen 25:llä.

27. Onko olemassa kokonaislukuja m ja n, jotka toteuttavat yhtälön $m^2 + 1958 = n^2$?

28. Sievennä lauseke

$$\frac{1}{a} + \sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} + \cdots + \sqrt[n]{a^3} + \sqrt[n]{a^2} + \sqrt[n]{a}$$

sellaiseen muotoon, että nimittäjässä ei esiinny murtolausekkeita.

29. Merkitään luvun x 10-kantaista logaritmia $\log x$:llä. Laske $\log 48$ lukujen $\log_3 5 = a$ ja $\log_5 3 = b$ avulla.

30. Ratkaise yhtälö $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.

31. Todista: kun $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, niin $\cot \dfrac{x}{2} \geq 1 + \cot x$.

32. Piirretään ympyrä niin, että se sivuaa tasakylkisen kolmion kylkiä ja kolmion a-pituinen kanta on ympyrän jänne. Määritä ympyrän säde r a:n ja kolmion korkeuden h avulla.

33. Laske suorakulmaisen kolmion suoran kulman puolittajan pituus kolmion kateettien a ja b avulla.

34. Ympyrällä, neliöllä ja tasasivuisella kolmiolla on sama pinta-ala. Laske näiden kuvioiden piirien suhde.

35. Määritä se ympyrän keskuskulma, jota vastaavan segmentin jänne on yhtä pitkä kuin segmentin sisään piirretyn mahdollisimman suuren ympyrän piiri.

Solmu 1:n tehtävien vastauksia

Suurin osa seuraavista vastauksista perustuu Baltian Tie -kilpailun tehtävänlaatijoiden antamiin malliratkaisuihin. Mikään tehtävä ei koskaan ole loppuun käsitelty. Solmu ottaa edelleen mielellään vastaan vaihtoehtoratkaisuja ja kommentteja!

1. Säännöllisen 1996-kulmion kärjestä A kahteen vierekkäiseen kärkeen B ja C piirrettyjen lävistäjien välinen kulma on puolet kaarta BC vastaavasta keskuskulmasta eli $\phi = \dfrac{\pi}{1996}$. Kahden kärjestä A piirretyn lävistäjän välinen kulma on siten $k\phi$ jollakin k. Jos lävistäjien AB ja CD määräämät suorat leikkaavat pisteessä P ympyrän sisällä, niin $\angle APC = \angle BAD + \angle CDA = k\phi + m\phi$. Jos suorat leikkaavat ympyrän ulkopuolella niin, että (esimerkiksi) A ja C ovat lähempänä leikkauspistettä P, niin $\angle APC = \angle BCD - \angle ABC = n\phi - p\phi$. Kaikissa tapauksissa lävistäjien väliset kulmat ovat ϕ:n monikertoja, joten niiden suhde on rationaaliluku.

2. Olkoot janojen AP ja BP pituudet $2r$ ja $2s$. Silloin $39\pi = \dfrac{\pi}{2}((r+s)^2 - r^2 - s^2 - 9\pi$. Tästä ratkaistaan $rs = 48$. Olkoon M AB:n keskipiste, N PB:n keskipiste, O ympyrän C keskipiste ja F pisteen O kohtisuora projektio janalla AB. Ympyrän C säde on 3. Täten $|MO| = r + s - 3$, $|MF| = |MP| + 3 = r - s + 3$, $|FN| = s - 3$ ja $|ON| = s + 3$. Suorakulmaisista kolmioista MFO ja NFO saadaan $(r+s-3)^2 - (r-s+3)^2 = |OF|^2 = (s+3)^2 - (s-3)^2$. Tämä sievenee muotoon $r(s-3) = 3s$ eli $3(r+s) = rs = 48$. Siis $|AB| = 2(r+s) = 32$.

3. Piste Q on yhtä etäällä B:stä ja C:stä eli janan BC keskinormaalilla n. Toisaalta Q on D-keskisellä A:n kautta kulkevalla ympyrällä y. Q on siis jompikumpi y:n ja s:n kahdesta leikkauspisteestä Q_1 (neliön sisällä) ja Q_2 (neliön ulkopuolella). Lisäksi $QP = QC$, joten riittää, kun määritetään janan QC pituus. Koska Q_1 on s:llä, $Q_1A = Q_1D$; lisäksi $Q_1D = AD = 1$. Kolmio AQ_1D on tasasivuinen, joten $\angle Q_1DC = 30°$. Siten $|Q_1C| = 2\sin 15°$. Lisäksi $\sin 15° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30°}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, joten $|Q_1C| = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Kehäkulma $\angle Q_1Q_2C$ ja keskuskulma Q_1DC vastaavat samaa y:n kaarta. Siis $\angle Q_1Q_2C = 15°$. Suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kärjet ovat C, Q_2 ja BC:n keskipiste, saadaan $|Q_2C| = \dfrac{1}{2\sin 15°} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

4. Oletetaan, että $AD < BC$. Olkoon O suorien AB ja CD leikkauspiste. Tehtävässä mainittu kulmien maksimaalisuus merkitsee, että pisteiden A, Q ja B kautta piirretty ympyrä sivuaa suoraa OC ja pisteiden D, P ja C kautta piirretty ympyrä sivuaa suoraa OB. Peilataan kuvio kulman AOD puolittajassa ℓ. Pisteiden D ja C peilikuvat suoralla OB ovat D' ja C' ja pisteen P peilikuva suoralla OC on P'. Koska $OD' : OC' = OD : OC = OA : OB$, homotetia, jonka keskus on O ja kerroin $\dfrac{OA}{OD'}$ kuvaa janan $D'C'$ janalle AB. Ympyrä $D'C'P'$ kuvautuu ympyrälle ABQ ja $\angle CPD = \angle C'P'D' = \angle BQA$.

5. Tarkastetaan ensin mielivaltaista kolmiota ABC, jonka sivut ovat a, b ja c ja sisään- ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet ovat r ja R. Silloin pätee $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$. Kosinilauseen nojalla yhtälön vasen puoli on nimittäin

$$\begin{aligned}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2bc} &= \frac{ab^2+ac^2+bc^2+a^2b+a^2c+b^2c-a^3-b^3-c^3}{2abc} \\ &= \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc} + 1.\end{aligned}$$

Merkitään vielä kolmion alaa T:llä ja piirin puolikasta p:llä. Silloin $pr = T = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, ja koska $2R = \dfrac{a}{\sin A}$, saadaan

$$\frac{r}{R} = \frac{4T^2}{pabc} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc}.$$

Siirrytään nyt nelikulmioon. Kaikilla neljällä kolmiolla on sama ympäripiirretyn ympyrän säde R. Jos kaarien AB, BC, CD ja DA suuruudet ovat 2α, 2β, 2γ ja 2δ, niin edellä sanotun perusteella $r_a = (\cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\delta) - 1)R$ ja $r_c = (\cos\alpha + \cos\delta + \cos(\beta+\delta) - 1)R$. Mutta koska $\alpha + \delta = 180^\circ - (\beta+\gamma)$, niin $\cos(\alpha+\beta) = -\cos(\gamma+\delta)$, ja $r_a + r_c = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta - 2)R$. Mutta aivan samoin saadaan $r_b + r_d = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta - 2)R$.

6. Ratkaisija *Matti Tuomi* Pirkkalasta. Koska $ab = cd$, niin $\dfrac{a}{c} = \dfrac{d}{b}$. Jos tässä yhtälössä esiintyvä murtoluku on supistetussa muodossa $\dfrac{x}{y}$, niin $a = kx$, $c = ky$, $d = rx$, $b = ry$, $k \geq 1$, $r \geq 1$. Mutta silloin $a+b+c+d = kx + ry + ky + rx = k(x+y) + r(x+y) = (k+r)(x+y)$. Tämän tulon kumpikaan tekijä ei ole 1, joten $a+b+c+d$ ei ole alkuluku.

7. Jonon alkupään luvut ovat 1, 2, 7, 29, 22, 23, 49, 26. Modulo 6 jono alkaa siis 1, 2, 1, 5, 4, 5, 1, 2. Se, mitä a_{n+2} on modulo 6, riippuu vain siitä, mitä a_{n+1} ja a_n ovat modulo 6. Näin ollen jono on jaksollinen modulo 6, eikä yksikään jonon luvuista ole 6:lla jaollinen. Erityisesti yksikään luvuista ei voi olla 0.

8. Osoitetaan induktiolla, että jonossa (x_n) kahden peräkkäisen termin x_k, x_{k+1} suurin yhteinen tekijä (x_k, x_{k+1}) on 19. Koska $x_2 = 95 = 5\cdot 19$, $(x_1, x_2) = 19$. Oletetaan sitten, että $x_k = 19a$ ja $x_{k+1} = 19b$, missä $(a, b) = 1$. x_k:n ja x_{k+1}:n pienin yhteinen monikerta on tällöin $19ab$, ja $x_{k+2} = 19ab + 19a = 19a(b+1)$. Koska luvuilla a ja b sekä $b+1$ ja b ei ole yhteisiä tekijöitä, $(x_{k+1}, x_{k+2}) = (19b, 19a(b+1)) = 19$. Tehtävän vastaus on siis 19.

9. Rakennetaan joukko A seuraavasti. Olkoon $m = \dbinom{n}{k-1}$ n-alkioisen joukon $k-1$-alkioisten osajoukkojen lukumäärä. Tarkastellaan eri alkulukuja $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Liitetään jokainen näistä luvuista p_j yhteen ja vain yhteen joukon $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkoon S_j. Olkoon $b = p_1p_2\cdots p_m$. Olkoon nyt a_k kaikkien niiden p_j-lukujen tulo, joille k ei kuulu joukkoon S_j. Todetaan, että näin konstruoitu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ toteuttaa tehtävän ehdot. Valitaan $k-1$ eri lukua $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k-1}}$. Olkoon $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\} = S_j$. Tähän joukkoon liittyvä p_j ei konstruktion mukaan ole tekijänä yhdessäkään luvuista a_{i_l}, mutta kyllä luvussa b; b ei voi olla tulon $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{k-1}}$ tekijä. Olkoon sitten $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ mielivaltainen k-alkioinen A:n osajoukko. Lukuja a_i, joissa mielivaltainen p_j ei ole tekijänä, on $k-1$ kappaletta, joten jokainen p_j on tekijänä ainakin yhdessä tulon $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$ tekijässä. Siten myös b on tämän tulon tekijä. Jos $i_1 \neq i_2$, on olemassa joukko S_j niin, että $i_1 \in S_j$, mutta $i_2 \notin S_j$. Tästä seuraa, että p_j on a_{i_2}:n tekijä, mutta ei ole a_{i_1}:n tekijä. Siten a_{i_1} ei ole a_{i_2}:n tekijä.

10. Tehtävän luku n on kakkosen potenssi: jos olisi $n = mp$, missä p on pariton alkuluku, niin $a^n + 1 = (a^m)^p + 1^p$ olisi jaollinen luvulla $a^m + 1$ ja olisi siis yhdistetty luku. Osoitetaan induktiolla, että $d\left(a^{2^k} - 1\right) \geq 2^k$.

Asia on selvä, jos $k=0$. Oletetaan, että $d\left(a^{2^k}-1\right)\geq 2^k$. Havaitaan, että $a^{2^{k+1}}-1=(a^{2^k}-1)(a^{2^k}+1)$. Mielivaltaiselle luvun $a^{2^k}-1$ tekijälle q sekä q että $q(a^{2^k}+1)$ ovat $a^{2^{k+1}}-1$:n tekijöitä. Jokainen $q(a^{2^k}+1)$ on suurempi kuin $a^{2^k}-1$. Näin ollen $d(a^{2^{k+1}}-1)\geq 2d(a^{2^k}-1)\geq 2\cdot 2^k=2^{k+1}$.

11. Jokin luvuista x_i on pienin; voidaan olettaa, että se on x_1. Nyt $W(x)=(x-x_1)^2$ on toisen asteen polynomi, joka on aidosti kasvava, kun $x\geq x_1$. Tämä merkitsee, että jos $W(x_i)=W(x_j)=W(x_k)$, niin $x_i=x_j=x_k$.

12. Polynomin $P(x)=1996x+1996$ juuri on -1. Siis $-1\in S$. Polynomin $Q(x)=1996-x-x^2-\cdots-x^{1996}$ eräs juuri on 1; siis $1\in S$. Jos $R(x)=-x^{10}+x^9-x^8+x^7-x^6+x^3-x^2+1996$, niin $R(-2)=0$. Siis $-2\in S$.

13. a) Jos f on parillinen funktio, niin kaikilla $x\in\mathbb{Z}$ saadaan $f(x)=f(-x)=f((-x)^2-x+1)=f(x^2-x+1)=f((x-1)^2+x)=f((x-1)^2+(x-1)+1)=f(x-1)$. Tämä on mahdollista vain, jos f on vakio; toisaalta on ilmeistä, että kaikki vakiofunktiot toteuttavat funktionaaliyhtälön. b) Jos f on pariton, niin sama päättely kuin edellä antaa kaikilla $x\in\mathbb{Z}$ $f(x)=-f(x-1)=f(1-x)$. Koska f on pariton, $f(0)=-f(0)=0$. Edelleen $f(1)=f(1-1)=f(0)=0$. Oletetaan, että $f(k)=0$, $k\geq 0$. Silloin $f(k+1)=f(1-(k+1))=f(-k)=-f(k)=0$. Induktioperiaatteen nojalla $f(k)=0$ kaikilla $k\geq 0$. Luonnollisesti $f(k)=-f(k)=0$ myös kaikilla $k\leq 0$.

14. Olkoot pisteiden B_i ja C_i koordinaatit $(b_i,\,b)$ ja $(c_i,\,c)$, $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$. Silloin

$$\cot(\angle B_iC_iP)=\frac{b_i-c_i}{b-c},$$

ja kysytty kotangenttien summa on

$$\frac{1}{b-c}\sum_{i=1}^{n}(b_i-c_i).$$

Mutta luvut b_i ja c_i ovat n:nnen asteen yhtälöiden $f(x)-b=0$ ja $f(x)-c=0$ kaikki juuret. Koska $n>1$, molemmilla yhtälöillä on sama x^{n-1}:n kerroin, joka on sama kun juurien summan vastaluku. Siis $\sum_{i=1}^n b_i=\sum_{i=1}^n c_i$, joten kysytty kotangenttisumma on 0.

15. Jos $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$, niin tehtävän epäyhtälö on $nx^2\geq nx^{2a+b}$. Jotta tämä olisi voimassa, kun $x<1$ ja kun $x>1$, on oltava $2a+b=2$. Tarkastellaan sitten tapausta $n=4$ ja $x_1=x_3=1$, $x_2=x_4=x$. Epäyhtälö saa muodon $4x\geq 2(x^{2a}+x^b)$. Tämä epäyhtälö voi toteutua suurilla x:n arvoilla vain, jos $2a\leq 1$ ja $b\leq 1$. Onkin siis oltava $2a=1$, $b=1$. On vielä todistettava, että tehtävän epäyhtälö todella pätee, kun $a=\dfrac{1}{2}$ ja $b=1$. Tämä nähdään käyttämällä hyväksi Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$. Kun nimittäin tähän epäyhtälöön sijoitetaan $a_i=(x_ix_{i+1})^{1/2}$ ja $b_i=(x_{i+1}x_{i+2})^{1/2}$ ($x_j=x_{n-j}$, jos $j>n$), saadaan täsmälleen tehtävän epäyhtälö (toiseen potenssiin korotettuna).

16. Numeroidaan vaakarivit ja jaetaan taso 2×1-laatoiksi, "dominoiksi", esim. niin, että vaakarivit, joiden järjestysnumero on kolmella jaollinen, jaetaan kyljellään makaaviksi dominoiksi ja näiden rivien väliin jäävät kaksi vaakariviä pystyssä seisoviksi dominoiksi. Silloin jokaiseen 2×2-neliöön sisältyy ainakin yksi kokonainen domino. Toinen pelaaja voi estää aloittajan voiton täyttämällä aina toisen ruudun siitä dominosta, johon aloittaja on jo tehnyt merkinnän. Tässä prosessissa aloittaja joutuu aina tekemään merkinnän dominoon, jossa ei vielä ole merkintää.

17. Koska $A=143-D$ ja $1\leq D\leq 9$, niin $134\leq A\leq 142$. A:n ensimmäinen numero on 1 ja toinen joko 3 tai 4. Jos A:n toinen numero olisi 4, olisi $140\leq A\leq 142$ ja $1\leq D\leq 2$. Mutta 0 ja 2 eivät ole sallittuja numeroita, eikä A voi olla 141, joten A: toinen numero on välttämättä 3. A:n kolmannen numeron ja D:n summan on oltava 13. Tämä voi tapahtua kuudella eri tavalla: $13=4+9=5+8=6+7=7+6=8+5=9+4$. B:n ja C:n viimeisten numeroiden summan on oltava 13. Silloin B:n ja C ensimmäistenkin numeroiden summa on 13. Kun A ja D on valittu, jää jäljelle 4 numeroa, joista voidaan muodostaa kaksi paria, joiden summa on 13. Näistä kumpi hyvänsä voi muodostaa B:n ja C:n ensimmäiset numerot. Toiset numerot voidaan sitten vielä valita kahdella eri tavalla. Kaikkiaan mahdollisuuksia on $6\cdot 2\cdot 2=24$ kappaletta.

18. Jos joka istunnossa erotetaan ainakin 2 jäsentä, niin 15 istunnon jälkeen koko tuomaristo on erotettu. Jos jossain istunnossa ketään ei eroteta, ei niin tapahdu tulevissakaan istunnoissa. Jotta erottamisistuntoja

voisi olla enemmän kuin 15, on joissain istunnoissa erotettava vain yksi jäsen. Olkoon ensimmäinen istunto, jossa näin tapahtuu, k:s istunto. Oletamme, että tuossa istunnossa oli $2n+1$ äänestäjää ja että erotettu henkilö oli hra K. Silloin ainakin $n+1$ henkilöä piti herra K:ta epäpätevänä, mutta enintään n jäsentä piti ketään muuta epäpätevänä. Seuraavassa istunnossa on silloin $2n$ äänestäjää, eikä yksikään jäsen saa epäpätevyysääntä yli puolelta äänestäjistä. Jos $k \geq 16$, niin jurysta on poistettu ainakin $2 \cdot 15+1$ edustajaa. Siis $k \leq 15$. Oletamme sitten, että istunnossa, jossa K poistettiin, äänesti $2n$ edustajaa. Seuraavassa istunnossa on silloin pariton määrä äänestäjiä. Sama tilanne jatkuu, kunnes poistettavia on taas pariton määrä, joko 1 tai ainakin 3. Tapahtukoon tämä m:nnessä istunnossa. Jos poistettavia on tuolloin 1, poisto on samalla viimeinen samasta syystä kuin edellä. Samoin kuin edellä, jos $m \geq 16$, niin poistettavien määrä on ainakin $14 \cdot 2 + 1 + 1 = 30$. Tämä on mahdotonta, koska viimeisessä istunnossa on ollut vain 1 jäsen, joka ei ole voinut poistaa itseään. Jos taas m:nnessä istunnossa poistetaan yli kolme jäsentä, on m:nnen istunnon jälkeen äänestäjien määrä taas parillinen. Voidaan palata odottamaan kierrosta, jolla erotetaan yksi jäsen; tätä kierrosta ennen erotettujen jäsenten määrä on tässä tapauksessa ainakin 2 kertaa kierrosten määrä.

19. Ensimmäinen pelaaja voittaa: hän voi valita tikkuja kahdesta kasasta niin, että tikkujen lukumäärät ovat 38, 38, 38 ja 70. Mitä tahansa toinen tekeekin, ensimmäinen pelaaja voi palauttaa tilanteen muotoon a, a, a, b; $a \leq b$. äärellisen vuoromäärän jälkeen ollaan ensimmäisen pelaajan tekemän noston jälkeen tilanteessa 0, 0, 0, c; $c \geq 0$, jolloin toinen pelaaja ei voi enää tehdä siirtoaan.

20. Koska aritmeettisen jonon määrittää kaksi lukua, sen ensimmäinen termi a ja peräkkäisten lukujen erotus d, on mahdollista asettaa kaikki positiivisista kokonaisluvuista koostuvat aritmeettiset jonot numerojärjestykseen A_1, A_2, ... (Parit (a, d) voidaan panna esim. jonoon (1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), ...). Määritellään jono (a_n) asettamalla $a_1 = a_2 = 1$ ja määritellään a_{n+1} on A_{n-1}:n pienimmäksi $2a_n$:ää suuremmaksi termiksi. Väitetään, että joukossa $A = \{a_2, a_3, \dots\}$ ei ole kolmea termiä, jotka olisivat aritmeettisessa jonossa. Oletetaan, että a_j, a_k ja a_m olisivat tällaisia. Silloin a_k olisi a_j:n ja a_m:n keskiarvo, mutta koska $a_j \geq 1$ ja $a_k \leq a_{m-1} < \frac{1}{2}a_m$, $a_k < \frac{1}{2}(a_j + a_k)$. Osoitetaan vielä, että joukon $B = \mathbb{N} \setminus A$ luvuista ei voi muodostaa päättymätöntä aritmeettista jonoa: jos sellainen olisi, se olisi jokin jonoista A_n. Mutta jokaisesta jonosta A_n on jo valittu jokin alkio jo joukkoon A.

Matti Lehtinen, Helsingin yliopisto
<Matti.Lehtinen@Helsinki.FI>

Malatyn tehtävät matemaattisesta ajattelusta

Aritmetiikkaa (myös ala-asteen oppilaille)

Oppikirjassa annettiin seuraava tehtävä: "Laske $25 \cdot 848$, mutta Sari sanoi tehtävän olevan helpon: "Tulo on 212 sataa". Opettaja pyysi perustelemaan, ja Sari kirjoitti alla olevan ratkaisun, josta osa jää sinun täydennettäväksesi.

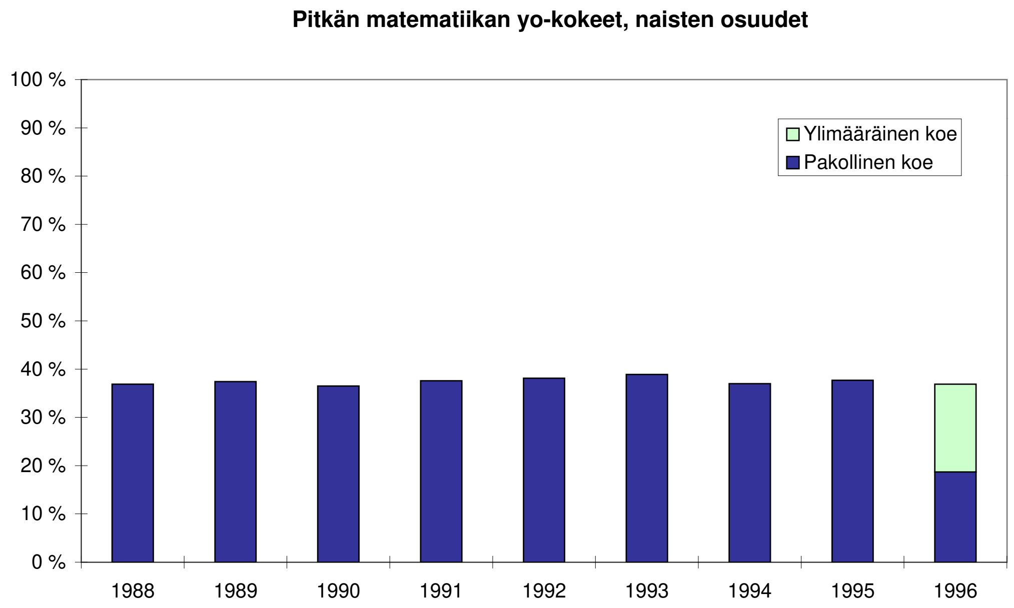
$$\begin{aligned} 25 \cdot 848 &= \underline{\qquad} \cdot 848 \\ &= 100 \cdot \underline{\qquad} \\ &= 21200 \end{aligned}$$

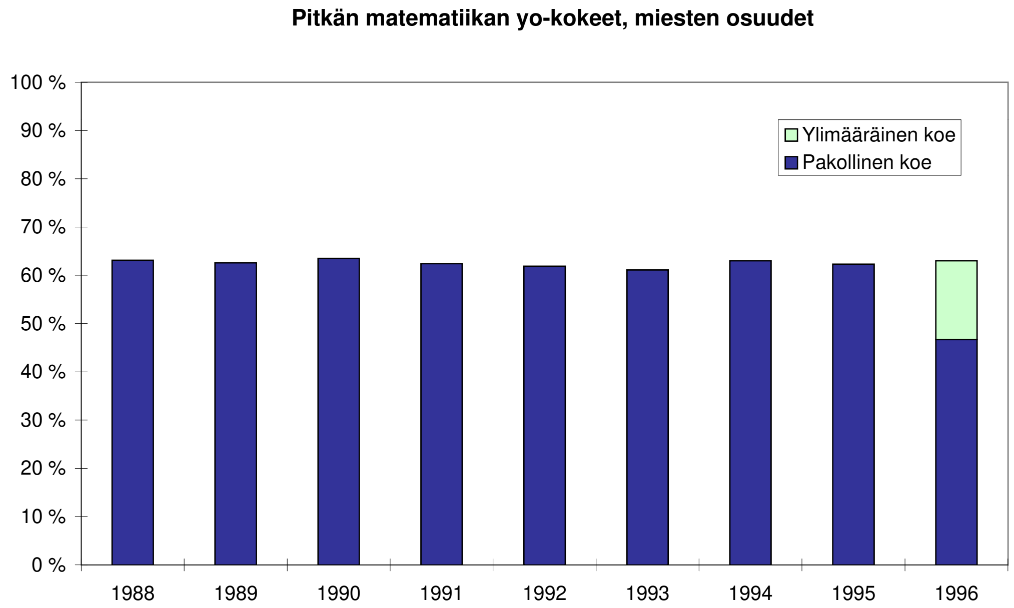
Miten ratkaisisit nyt seuraavan tehtävän:

"Laske $125 \cdot 848$."

Monellako tavalla voit ratkaista tehtävän – yhdellä, kahdella, kolmella ... ? Kirjoita kaikki ratkaisut ja ilmoita, mikä niistä on sinusta paras.

George Malaty

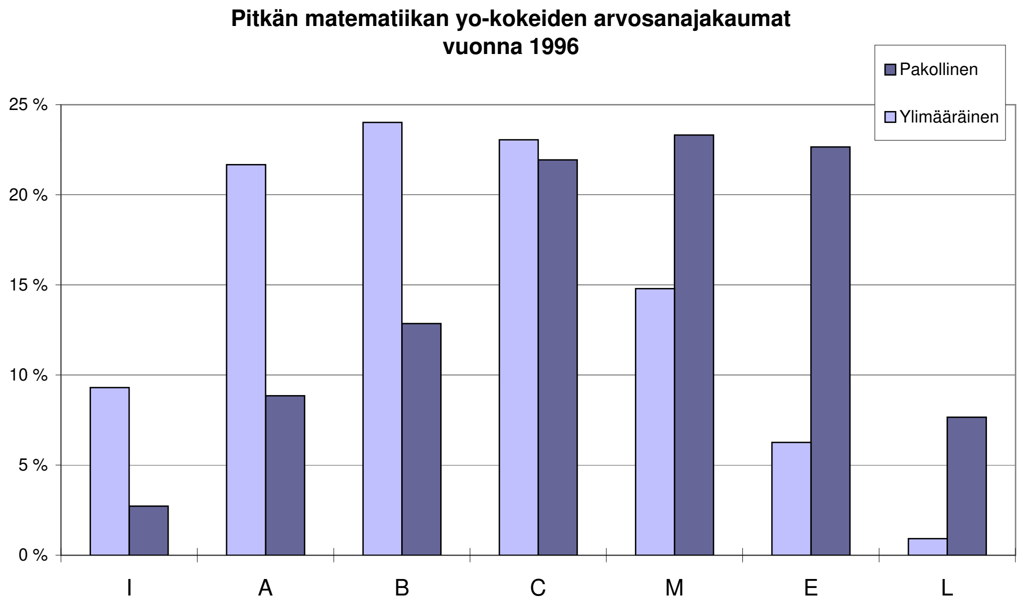




Kuva 1: Pitkän matematiikan ylioppilaskokeen osallistujat viime vuosina

Yo-tutkinto		Pitkän matematiikan koe									
	Osallis-	Osallis-	Pakollinen koe				Ylimääräinen koe				
Vuosi	tujia	tujia	Naiset		Miehet		Naiset		Miehet		
1988	28717	9979	3682	36,9%	6297	63,1%	—	—	—	—
1989	28076	10017	3745	37,4%	6272	62,6%	—	—	—	—
1990	27264	10202	3724	36,5%	6478	63,5%	—	—	—	—
1991	26370	10655	4008	37,6%	6647	62,4%	—	—	—	—
1992	25759	10412	3967	38,1%	6445	61,9%	—	—	—	—
1993	28888	11571	4505	38,9%	7066	61,1%	—	—	—	—
1994	31395	12271	4542	37,0%	7729	63,0%	—	—	—	—
1995	33183	12254	4615	37,7%	7639	62,3%	—	—	—	—
1996	33702	12000	2252	18,7%	5609	46,7%	2187	18,2%	1952	16,3%

Taulukko 1: Pitkän matematiikan ylioppilaskokeen osallistujat, numerotiedot



Kuva 2: Arvosanajakaumat

Pitkän matematiikan ylioppilaskoe 1996					
Arvo-sana	Pakollinen koe		Ylimääräinen koe		Piste-raja
L	602	7,66%	38	0,92%	48
E	1781	22,66%	259	6,26%	35
M	1833	23,32%	612	14,79%	26
C	1725	21,94%	954	23,05%	18
B	1010	12,85%	994	24,02%	12
A	696	8,85%	897	21,67%	6
I	214	2,72%	385	9,30%	—
yhteensä	7861	100%	4139	100%	—

Taulukko 2: Arvosanajakaumat numeroina sekä pisterajat

Lehdistökeskustelua ja tilastoja

Sosiaaliministeriön vakuutusosaston ylijohtaja Tarmo Pukkila väitti Helsingin Sanomissa matematiikan tutkintojen tason romahtaneen. Opetushallituksen pääjohtaja Jukka Sarjala vastasi väitteeseen: "Suomalaisten laskutaito on aivan kohtalaista tasoa. Lukiossa vain valitaan pitkä matematiikka liian harvoin, samoin fysiikka ja kemia." (Helsingin Sanomat 14.2.1997).

Mikä sitten on tilanne tilastojen valossa? Matematiikkaa koskevissa keskustelussa käytetään Helsingin Sanomien pääkirjoitustasoa myöden väitettä, että lukiolaisista puolet valitsee pitkän matematiikan – sitä, kuinka harva sen suorittaa, ei kerrota. Oheiset tilastot selvittävät asian.

Taulukko 1 kertoo, että pitkän matematiikan kirjoittajien kokonaismäärä ei ole lisääntynyt vuonna 1996. Huomattava osa oppilaista on sen sijaan siirtynyt kirjoittamaan sen ylimääräisenä pakollisen sijasta. Kuva 2 osoittaa selvästi, että pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittaneet eivät ole panostaneet tähän; heidän arvosanajakaumansa on surkea verrattuna pitkän matematiikan pakollisena kirjoittaneiden jakaumaan.

Kansainvälisiä vertailuja

> ***"Mathematics***
>
> *... On the other hand, the range varies from an average of 2.6 hours per week in the case of Finland to an average of 6.1 hours per week in Switzerland—and these averages are over 12 years of general education."*

UNESCO julkaisi vuonna 1986 selvityksen "The Place of Science and Technology in School Curricula: A Global Survey". Alussa todetaan, että Euroopasta 30 maata palautti kyselyn ja kaikkia paitsi kolmea voitiin käyttää tilanteen analysointiin – esimerkiksi Italian tietoja ei voitu käyttää, koska Italiassa kukin koulu voi päättää, miten tunteja jaetaan eri aineiden kesken, joten mitään selviä lukuja ei ollut saatavana. Matematiikkaa opiskellaan kaikissa maissa kaikilla tasoilla. Raportti toteaa, että keskimääräiset tuntimäärät vaihtelevat Suomen 2,6 viikkotunnista Sveitsin 6,1:een. (Tunti tarkoittaa raportissa 60 min). Melkein 6 tuntia keskimäärin koko kouluajan tarjoavat raportin mukaan Valkovenäjä, Bulgaria, Ranska, silloinen DDR, Puola, Romania, Ukraina ja Venäjä – kun taas Suomi, Tanska, Norja ja Ruotsi omistavat matematiikalle vähän yli puolet edellisestä määrästä.

Skandinavia erottuu siis aivan omaksi alueekseen matematiikan opiskelun vähäisyyden suhteen. Mikäli Skandinavia jätetään keskiarvosta pois, nousee tutkimuksessa mukanaolleiden muiden maiden matematiikan tuntien keskiarvo esim. 1-2-luokkalaisilla 4,35:stä 4,72:een, 3-6-luokkalaisilla 4,43:sta 4,76:een, 7-9-luokkalaisilla 3,89:stä 4,06:een. Tutkimuksen jälkeen on Suomessa tosin lisätty tunti ala-asteelle, mutta tämä nostaa Suomen keskiarvon luvusta 2,6 vain lukuun 2,72 ja jumbosija säilytetään. Merkittävää on, että Sveitsin tuntimäärä 3-6-luokkalaisille on 2,5 kertaa Suomen vastaava tuntimäärä, vaikka Sveitsissä on neljä kotimaista kieltä.

OECD:n tutkimuksen mukaan vuonna 1993 Suomessa käytettiin 7,3 prosenttia bruttokansantuotteesta koulutukseen, tämä oli OECD maiden korkein yhdessä Kanadan kanssa. Suomessa koulutus kestää pidempään kuin OECD-maissa keskimäärin ja ikäluokasta kouluttautuu useampi kuin OECD-maissa keskimäärin. Esimerkiksi keskiasteen koulutuksessa oli 17-vuotiaista Suomessa 91% ja keskimäärin OECD-maissa 75%.

Newsweek esitteli numerossaan 2.12.1996 kansainvälisen matematiikan ja luonnontieteiden osaamisvertailun tuloksia. Tutkimus oli harvinaisen suuri, noin 500 000 oppilasta 41:stä maasta otti osaa kokeisiin. Matematiikassa keskiarvo oli 513 ja kärkipään maat löytyivät Aasiasta: Singapore 643, Etelä-Korea 607, Japani 605, Hong Kong 588. Euroopasta sijoittuivat hyvin Belgia, Tsekin tasavalta, Slovakia, Sveitsi, Hollanti, Slovenia, Bulgaria, Itävalta, Ranska ja Unkari pistein 565—537. Ruotsi selvisi keskitasoon, Norja ja Tanska sen alapuolelle, huonoimmat olivat Kuwait, Kolumbia ja Etelä-Afrikka 354. Suomi ei osallistunut.

Yhteenvetona OECD:n ja UNESCO:n siteeratuista tutkimuksista voidaan todeta, että rahaa käytetään eniten ja matematiikkaa opiskellaan vähiten Suomessa. Sveitsi on johtava maa, paitsi matematiikan arvostamisessa kouluopiskelussa, myös Nobelin palkinnoissa ja patentoiduissa keksinnöissä (väkilukuun suhteutettuna).

Koonnut **Marjatta Näätänen**
ylioppilaskoetilastot: Yrjö Yrjönsuuri, Matematiikka ylioppilastutkinnossa, PM/10.12.1996

Yleisönosasto

Internet – turha muoti-ilmiö

Sanaan Internet törmää nykyään kaikkialla, ollaan suorastaan ajauduttu sellaiseen tilanteeseen, että Internet on saatava joka kotiin, kouluun ja virastoon. Jokaisen mattimeikäläisen on saatava oma kotisivunsa tähän "verkkojen verkkoon" saavuttaakseen näin maailmanlaajuisen imagon.

Internet on parhaillaan noin 99,9% täyttä hölynpölyä. Periaatteessa netistä löytyy mitä vain mistä tahansa aiheesta, mutta tiedon luotettavuus ja hyödyllisyys voi olla vähän niin ja näin. Menin tässä taannoin ATK-tunnilla katsomaan, mistä sivistynyt ikäluokkani kommunikoi erään radiokanavan kotisivun keskustelulinjalla. Kuten olin arvannutkin, teksti oli samanlaatuista kuin tietyillä puhelinlinjoilla. Koska verkossa ei ole mitään sensuuria, voi sinne kuka tahansa työntää mitä tahansa törkyä.

Internetin suurimpia käytännön ongelmia on sen uskomaton hitaus ja lähes olematon tietoturva. Eräs Internetin käyttäjä saikin itsestään täydellisen tiivistelmän tuntemattomalta henkilöltä, joka oli lukenut kaiken tämän kirjoittaman sähköpostin vuosien varrella. Yhdysvaltain puolustusministeriön tietokoneisiin on myös murtauduttu monia kertoja.

Internetin rakenne on täysin kaaosmainen ja käyttäjiä tulee joka puolelta maailmaa lisää, vaikka linjat ovat jo nyt lähes tukossa. Verkko kuormittuu jatkuvasti lisää, koska nyt on mahdollista lähettää melkein reaaliaikaista kuvaa ja ääntä. Koko Internet onkin kuin solmussa oleva kalaverkko, jota saa setviä ikuisuuden että sen saisi käyttökelpoiseen kuntoon.

Itse olen tullut tulokseen, että en tarvitse ainakaan parhaillaan Internetiä missään muodossa, vaikka sen todellisen kohdeyleisön tulisikin olla juuri itseni tapaiset henkilöllistymät.

Juha Tukkinen
lukiolainen