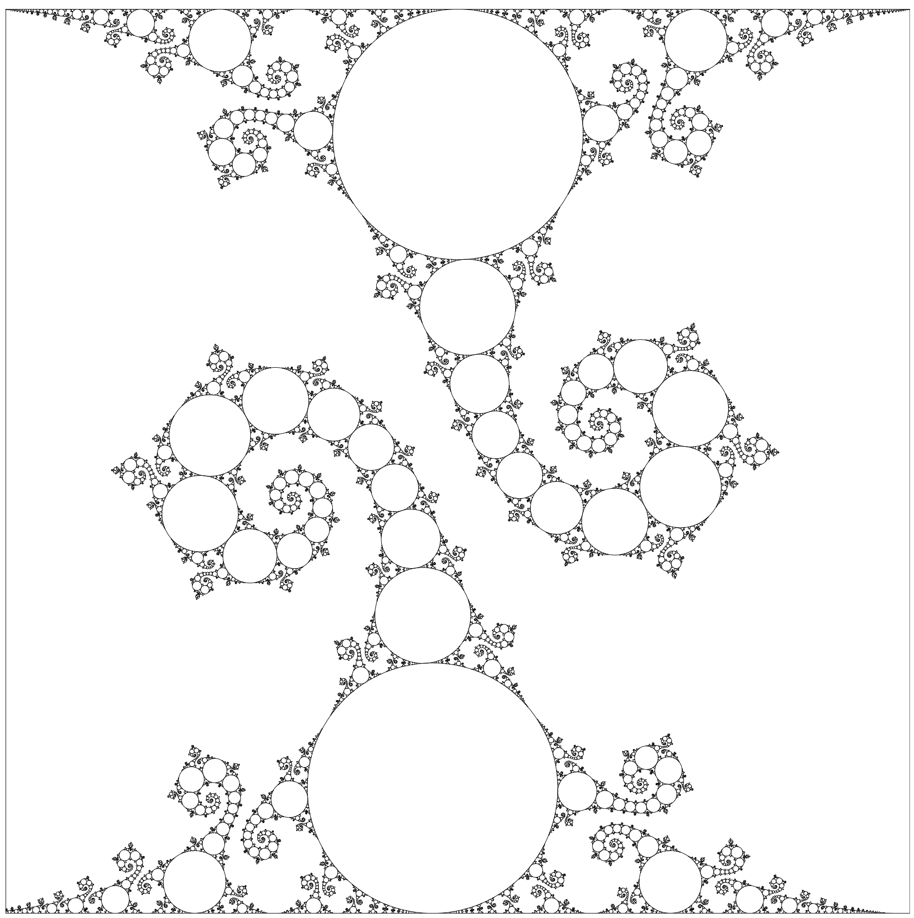
Solmu

matematiikkalehti

2/1997-98



http://www.math.helsinki.fi/Solmu/

Solmu 2/1997-98

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto
http://www.math.helsinki.fi/Solmu/

Sähköposti (Internet)
Kerkko.Luosto@Helsinki.FI
Jouni.Seppanen@iki.fi

Lehden aloittamisen tekivät taloudellisella tuellaan mahdolliseksi Nokia (http://www.nokia.com) ja Taloudellinen Tiedotustoimisto (http://www.tat.fi). Keväästä 1997 alkaen on Opetusministeriö (http://www.minedu.fi) avustanut taloudellisesti Solmua.

Kiitämme Kullervo Niemistä ja Päivölän kansanopiston matematiikkalinjan opiskelijoita yli tuhannen lehden postittamisesta.

Huom! Solmua jaetaan jokaiseen kouluun vain yksi kappale. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus

Kun nykyään puhutaan tehokkuudesta ja tuloksellisuudesta, käsitellään tietenkin vanhaa teemaa uusin termein. Vanhastaan ihmisiä kannustettiin korostamalla ahkeruutta; asennekasvatuksen pohjana oli ajatus, että tehty työ lopulta osoittautuu vaivan arvoiseksi. Koulutuksen kannalta merkittävin ero uuden ja vanhan linjan välillä tuntuu olevan kohderyhmän vaihtuminen, ennenhän haluttiin kannustaa erityisesti oppilaita, mutta nykyään opettajia uutteruuteen. Samalla järjestelmään uhkaa pujahtaa valheellisia piirteitä, sillä tuloksellisuutta arvioidaan lähinnä määrällisin termein, vaikka koulutuksen edistyminen näkyy nimenomaan laadullisesti, oppivathan esimerkiksi nykyiset opiskelijat yliopistossa paljon pidemmälle edennyttä matematiikkaa kuin opiskelijat sata vuotta sitten.

Pelkonani on, että pyrittäessä parantamaan matematiikan opetusta unohdetaan oppilaiden motivoiminen työntekoon. Oppimisen tulee olla mukavaa, ja nykytekniikka tarjoaa mahdollisuuden matematiikan näyttävään havainnollistamiseen, mutta suurimman ilon tästä tieteiden kuningattaresta saa irti älyllisen oivalluksen kautta. Matemaattiset elämykset ovat sitä hienompia, mitä vaikeampia asioita ymmärtää, ja tämä edellyttää välillä puurtamistakin. Kun asioita pohtiessa ei jatkuvasti juutu lähtökuoppiin, pohdiskelu alkaa tuntua miellyttävältä. Tieteenharjoittajille miettiminen on jo todellista älyllistä huumetta. Parhaimmillaan nykyinen tietotekniikka saattaa pystyä välittämään jotain tästä ilosta muillekin.

Länsimaisen kulttuurin dynaamisuus selittyy sillä, että kulttuuriimme liittyy tietty määrä seikkailunhalua: halu tutkia tuntematonta ja nähdä vaivaa, jotta saavutettaisiin jotakin uutta ja seuraavalla kerralla selvittäisiin helpommalla. Säilyttäkäämme nämä arvot!

Kerkko Luosto
<Kerkko.Luosto@Helsinki.FI>

Toimitussihteerin palsta

Tämän Solmun yleisönosastolla jatketaan keskustelua Internetin hyödyllisyydestä. Matematiikan harrastaja löytää Internetistä kaikenlaista: toimitussihteerin palstalla on ollut vain muutama esimerkki.

Matemaattisen tekstin saaminen verkkoon on kuitenkin melko hankalaa, mikä tuntuu yllättävältä — WWW suunniteltiin alkujaan suurenergiafyysikkojen tarpeisiin.[1] WWW-dokumentit on kirjoitettu HTML-kielellä,[2] jonka nykymuodolla ei voi kirjoittaa kaavoja kovin hyvin.

Erilaisia ratkaisuja on monia, mutta mikään niistä ei ole täysin tyydyttävä. Osa niistä perustuu Javaan tai muihin apuvälineisiin, jotka eivät ole läheskään niin yleisiä tai käyttökelpoisia kuin WWW-selaimet. Yksi mahdollisuus on kirjoittaa teksti millä tahansa sopivalla työkalulla, esimerkiksi LaTeXilla, ja panna se esille kuvana, mutta silloin menetetään HTML:n hypertekstiominaisuudet ja muut edut.

Solmun ratkaisu on kompromissi: kirjoitetaan teksti HTML:llä niin hyvin kuin voidaan ja tehdään kuvia siitä mihin HTML ei kelpaa. Kuten verkkoversion lukija voi todeta, tulos ei ole täydellinen, mutta toivottavasti sentään käyttökelpoinen.

Tulevaisuuden ratkaisun täytyy perustua sellaiseen HTML:n versioon tai muuhun kuvauskieleen, jolla on mahdollista kirjoittaa matematiikkaa ja jota tuetaan riittävän laajasti. Tällainen kieli voisi olla MathML.[3]

Jouni Seppänen
<Jouni.Seppanen@iki.fi>

Kansi:

Kansikuva esittää erään Kleinin ryhmän rajajoukon osaa kompleksitasossa. Kuva koostuu 30000 näkyvästä ympyrästä, jotka laskentaohjelma on seulonut noin 50 miljoonan ympyrän joukosta. Jokaista ympyrää vastaa useita ryhmän alkioita, jotka kuvaavat reaalisuoran samaksi ympyräksi.

Kuvan laskennassa ongelmana on piirtää kukin ympyrä täsmälleen kerran, ettei laskenta-aikaa tuhlaantuisi päällekkäisyyksiin. Jokaista ympyrää vastaa ryhmässä tekijäluokka, ja ongelmana on luetella tehokkaasti jokaiselle tekijäluokalle täsmälleen yksi edustaja. Ongelma on ratkaistu soveltamalla automaattisten ryhmien teoriaa ja konstruoimalla tekijäluokkien automaattinen rakenne, jolloin tekijäluokkien numerointi helpottuu olennaisesti.

Jarkko Lavinen
<jlavi@geom.helsinki.fi>

[1] http://www.w3.org/Summary.html
[2] http://www.w3.org/TR/REC-html32
[3] http://www.w3.org/TR/WD-math/

Geometriakulma: Desarguesin lause

Lukija tarttukoon kynään — tietoyhteiskunnassa vanhanaikaiseksi käyvään välineeseen — ja piirrelköön seuraavan kuvion paperille viivoittimen avulla kohtuullisen suurella tarkkuudella:

Olkoon K kiinteä piste, jonka kautta asetetaan kolme suoraa. Jokaiselta suoralta valitaan kaksi pistettä: ensimmäiseltä A ja A', toiselta B ja B', kolmannelta C ja C'. Kolmioiden ABC ja $A'B'C'$ vastinsivujen (so. AB ja $A'B'$; BC ja $B'C'$; CA ja $C'A'$) tai niiden jatkeiden leikkauspisteet olkoot R, S ja T.

Vaikka periaatteessa ei olekaan väliä, miten kolme suoraa ja pisteet näiltä valitaan, lienee hyvä sijoittaa piste K jonnekin paperin laitaan, piirtää tästä alkamaan kolme melko lähellä toisiaan olevaa puolisädettä ja sovitella loput pisteet näille siten, että leikkauspisteet mahtuvat paperille.

Kuinka ollakaan, pisteet R, S ja T näyttävät olevan samalla suoralla! Ja ne todella ovat suorien ja pisteiden valinnoista riippumatta. Tulos tunnetaan *Desarguesin lauseen* nimellä ranskalaisen 1600-luvun alkupuolella eläneen arkkitehdin, insinöörin ja geometrikon Girard Desarguesin mukaan.

Edellä kuvattu konstruktio ei ole aivan ongelmaton: voihan sattua, että jotkin vastinsivupareista ovat yhdensuuntaisia eikä niillä olekaan leikkauspistettä. Tällöin on ajateltava *projektiivisen geometrian* tapaan, että yhdensuuntaiset suorat leikkaavat toisensa *äärettömän kaukaisessa pisteessä* suorien suunnassa (kummassa tahansa kahdesta vastakkaisesta suunnasta). Uuden suoran piirtäminen tällaisen pisteen kautta tarkoittaa sen piirtämistä yhdensuuntaiseksi äärettömän kaukaista pistettä määrittelevien suorien kanssa.

Girard Desarguesia voidaan pitää projektiivisen geometrian luojana, vaikkakin hänen ajatuksensa jäivät omaperäisyytensä takia aikanaan vähälle huomiolle. Tunnetumpi projektiivisen geometrian tutkija onkin niin ikään ranskalainen insinööriupseeri ja matemaatikko Jean Victor Poncelet, joka jäi vangiksi Napoleonin Venäjän retkellä 1800-luvun alussa ja hyödynsi vankeusaikansa projektiivista geometriaa tutkimalla.

Miten Desarguesin lauseen voisi todistaa? Projektiivista geometriaa äärettömän kaukaisine pisteineen voidaan käsitellä analyyttisen geometrian keinoin, jolloin todistuksesta tulee algebrallinen lasku.

Puhtaammin geometrinen todistus löytyy huomaamalla, että lauseen geometrinen konstruktio voidaan tehdä myös kolmiulotteisessa avaruudessa. Tällöin pisteen K kautta kulkevat kolme suoraa eivät ole samassa tasossa. Ja tällöin lause on suorastaan selviö! Lukija pohtikoon konstruktiota ja asetelkoon sopivia tasoja avaruuteen. Ilmenee, että pisteet R, S ja T ovat kolmioiden tasojen leikkausuoralla. (Tämä tosin voi olla *äärettömän kaukainen suora*, jos tasot ovat yhdensuuntaiset.)

Projisioimalla vaikkapa yhdensuuntaisprojektiolla kolmiulotteinen Desarguesin kuvio tasoon päästään tasotapaukseen. Siirtyminen käänteiseen suuntaankin onnistuu: tasokuviota vastaamaan löytyy aina avaruuskuvio, jonka projektio se on.

Lopuksi lukija etsiköön lisää tietoa Desarguesista ja hänen lauseestaan: WWW-hakukone löytyy osoitteesta `http://altavista.telia.com` ja hakusanaksi Desargues!

Simo K. Kivelä
<kivela@leka.hut.fi>

M — niinkuin matematiikka

Suomesta ollaan tekemässä tietoyhteiskuntaa, mitä se sitten oikein tarkoittaneekaan. Toistaiseksi ainakin tekniikkaa: tietokoneita, verkkoja, Internet-yhteyksiä, WWW-sivuja, romppuja. Samaan aikaan on julistettu talkoot matemaattis-luonnontieteellisen osaamisen terästämiseksi. Mikä olisi näiden synteesi?

Se voisi olla vaikka sähköinen opiskelumateriaali lukiomatematiikasta: amerikkalainen calculus-kirja CD-levyllä; tai miksi ei — kotimaisen materiaalituotannon terästämiseksi — lukiomatematiikan sähköinen tietosanakirja hypertekstilinkkeineen.

Verkkotietosanakirja

Teknillisen korkeakoulun matematiikan laitoksella on muutaman viime vuoden aikana ollut käynnissä ns. HypeMAT-projekti[4], jonka tuotoksena on kuluvana syksynä saatu valmiiksi noin 400 paperisivua vastaava sähköinen lukiomatematiikan — tai hieman yli — tietosanakirja. Tämä on saanut nimekseen M — niinkuin matematiikka[5] tai lyhyemmin Iso-M.

Eo. linkki aktivoi tietosanakirjan aloitussivun. Sen — samoin kuin kaiken muun materiaalin — lukemiseen tarvitaan vapaasti Adobelta kopioitava Adobe Acrobat Reader[6] (vähintään versio 3.01). Näitä on saatavissa eri konetyypeille (Windows 3.1, 95, Linux, useat muut Unixit). Acrobat Reader tulee konfiguroida toimimaan yhdessä WWW-selaimen kanssa (File/Preferences/Weblink Acrobat Readerissä).

Käyttöön tarvitaan suhteellisen nopea verkkoyhteys, muutoin tiedostojen siirtyminen on tuskastuttavan hidasta.

Tiedoksi: Tietosanakirjassa olevat mustat neliöt ovat hypertekstilinkkejä, jotka avaavat tietosanakirjan uudesta kohdasta.

Paikallinen versio

Vaihtoehtona on tietosanakirjan käyttö paikallisesti oman koneen levyltä. Tällöin tarvittava versio poikkeaa teknisesti verkkoversiosta. Sen saamiseksi voi ottaa yhteyttä sähköpostitse Simo Kivelään, osoite jutun lopussa. Myös paikallista versiota luetaan Acrobat Readerillä.

Kommentteja toivotaan

HypeMAT on kokeiluprojekti ja tietosanakirja sen ensimmäinen tuotos. Suunnitelmia on enemmän kuin valmista: animaatiot puuttuvat, harjoitustehtäviä ei ole, interaktiiviset laskentatyökalut olisivat kivoja, jne.

Käyttäjien kommentteja toivotaan, niin opettajien, oppilaiden kuin muidenkin asiasta kiinnostuneiden: miten toimii teknisesti, onko kiinnostavaa lukea, millaisia ongelmia esiintyy, auttaako hyperteksti oppimaan, jne. Sähköpostiosoite alla.

Kokeilkaa, leikkikää! Oppikaa matematiikkaa!

Simo K. Kivelä
<kivela@leka.hut.fi>

[4] http://www.math.hut.fi/%7ekivela/HypeMAT.html
[5] http://www.math.hut.fi/%7ekivela/M/kansi.pdf
[6] http://www.adobe.com/prodindex/acrobat/readstep.html

Tilastomatemaattisten mallien käytöstä kemiassa ja biologiassa

Tekniikan kehittyessä erilaiset laitteet antavat tutkijoille yhä enemmän numeerisia aineistoja analysoitavaksi. Tyypillinen alue on spektreihin perustuva kemiallinen analyysi. Kullakin aineella on oma "sormenjälkensä", jonka tuottaa kyseisen aineen erilaiset värähtelyominaisuudet eri taajuuksilla. Spektrejä voidaan luoda esimerkiksi mittaamalla kuinka valon voimakkuus heikkenee sen kulkiessa tutkittavan näytteen läpi. Tällaisen datan tuottaminen on usein perinteisempiin analyysimenetelmiin verrattuna hyvin nopeaa ja helppoa. Ongelma onkin tulkinnassa. Spektrit ovat epäsuoraa tietoa, sormenjälkiyhdistelmien sijasta haluttaisiin itse asiassa tietää, mitä aineita ja kuinka paljon tutkittavassa näytteessä on. Oikeiden tulkintojen luominen edellyttää matemaattisten algoritmien käyttöä. Tähän tarpeeseen on viime vuosina syntynyt suorastaan oma uusi tieteenhaara, kemometria. Menetelmillä on monia tärkeitä sovelluksia teollisten prosessien seurannasta ympäristön jatkuva-aikaiseen tarkkailuun. Spektridatat näet tuottavat, kalibraatioalgoritmien kautta, kohteestaan tietoa jatkuvasti, ilman aikaavieviä välivaiheita ja laboratoriotöitä.

Periaatteessa valon voimakkuuden heikkeneminen sen kulkiessa väliaineessa voidaan laskea fysiikan laeilla. Käytännön tehtävissä ei kuitenkaan usein ole kaikkia teorian tarvitsemia taustatietoja saatavilla. Ongelma voidaan kiertää kokeellisella kalibroinnilla: valmistetaan sopivan kattava opetusjoukko spektrejä, jotka mitataan tunnetuista ainemääristä. Tämän jälkeen etsitään tilastomatemaattisilla menetelmillä malli, joka kykenee laskemaan opetusjoukon ainemäärät niihin liittyvien spektrien perusteella. Jos opetusjoukko on oikein valittu, voidaan näin saatua mallia sitten käyttää yleisestikin laskemaan ainemäärät spektrien perusteella.

Edellä kuvattu tehtävä, opetusjoukon "oikea" valinta, on esimerkki *kokeiden suunnittelusta*. Tilastomatemaattisen mallin konstruoinnissa tarvitaan aina vertailua kokeellisesti mitattuun aineistoon. Kokeiden suunnitteluun kehitetyillä matemaattisilla menetelmillä on tavoitteena tuottaa mahdollisimman luotettavia malleja mahdollisimman vähäisellä määrällä kokeita. Kokeiden suunnittelusta onkin viime vuosina tullut teollisessa tutkimuksessa hyvin suosittu ala, koska kokeiden teko on usein kallista.

Biologian alalta esimerkkinä voitaisiin tarkastella ravinteiden — typpi, fosfori, hiili — vaikutusta sinilevän kasvuun Itämeressä. Jotta tulokset vastaisivat todellista tilannetta muiden olosuhteiden (lämpötila, valaistus, jne) puolesta, tehdään kokeet esimerkiksi annostelemalla eri määrät ravinteita suuriin meressä kelluviin muovipusseihin. Kustakin pussista kerätään sitten eri päivinä näytteet, joista levämäärät analysoidaan laboratoriossa. Kokeiden teko on näin varsin vaivalloista. Lisäksi koetuloksiin liittyy melkoista epävarmuutta, johtuen sekä meren vaihtelevista olosuhteista että laboratoriotyöskentelyn epätarkkuuksista. Jotta ravinteiden merkityksestä ylipäätään voidaan tehdä päätelmiä, tulee kokeiden — pussien lukumäärän ja ravinteiden määrien kussakin pussissa — olla tarkoin harkitut. Juuri tällaisiin tilanteisiin tarjoavat kokeiden suunnittelun menetelmät reseptejä.

Kuten nähdään, voidaan luonnontieteissä monia varsin käytännöllisiä tavoitteita pukea matemaattisen mallitustehtävän muotoon. Laboratoriolaitteiden ja tietokoneiden kehitys antaa yhä uusia mahdollisuuksia näiden tehtävien ratkomiseen. Pullonkaulaksi muodostuu valitettavan usein soveltavien tieteiden harjoittajien puutteelliset matematiikan taidot.

Heikki Haario

Turistina matematiikassa

Toinen retki. Nuo mainiot binomikertoimet.

C Matkamuistot

Varsinainen retkeily tehtiin Solmussa 1/1997–98. Osa kohteista jäi tuolloin selittämättä. Tätä jälkikatsausta kannattaa seurata edellisen retken matkaopas mukanaan – kohdenumerointikin periytyy sieltä.

2. *Todista oikeiksi yhteenlaskukaavat*

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$$

ja

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}.$$

Käytetään induktiota. Kaavoista ensimmäinen on tosi, kun $k=0$. Jos kaava on tosi arvolla k, pätee

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+1}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+2}{k+1},$$

ja induktioaskel on otettu. Jälkimmäinen kaava seuraa edellisestä, kun otetaan huomioon kaava $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$.

4. *Osoita, että* $1^2+2^2+\cdots+n^2$ *voidaan laskea käyttämällä hyväksi kaavaa* $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$. *Keksitkö vielä muita tapoja summan laskemiseksi?*

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3-k^3)-3\sum_{k=1}^{n}k-n=(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n,$$

joten

$$6\sum_{k=1}^{n}k^2=2(n+1)^3-2-3n(n+1)-2n=2n^3+3n^2+n=n(2n+1)(n+1).$$

Toinen tapa laskea summa olisi arvata sen olevan muotoa An^3+Bn^2+Cn+D ja määrittää A, B, C ja D antamalla n:lle neljä eri suurta kokonaislukuarvoa. Saatu kaava voitaisiin sitten todistaa induktiolla paikkansapitäväksi kaikilla n.

5. *Laske*

$$\sum_{k=1}^{n}k^3 \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{n}k^4.$$

Koska

$$\binom{k+2}{3}=\frac{(k+2)(k+1)k}{6}=\frac{1}{6}k^3+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{3}k,$$

on

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=6\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{3}-3\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=6\binom{n+3}{4}-\frac{n(2n+1)(n+1)}{2}-n(n+1)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Vastaavasti
$$\binom{k+3}{4} = \frac{1}{24}k^4 + \frac{1}{4}k^3 + \frac{11}{24}k^2 + \frac{1}{4}k,$$
joten
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= 24\sum_{k=1}^{n}\binom{k+3}{4} - 6\sum_{k=1}^{n}k^3 - 11\sum_{k=1}^{n}k^2 - 6\sum_{k=1}^{n}k \\
&= 24\binom{n+4}{5} - 6\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 11\frac{n(2n+1)(n+1)}{6} - 6\frac{n(n+1)}{2} \\
&= n(n+1)\left(\frac{n^3+9n^2+26n+24}{5} - \frac{3n(n+1)}{2} - \frac{11(2n+1)}{6} - 3\right) \\
&= \frac{n(2n+1)(n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.
\end{aligned}$$

6. *Määritä*
$$\int_0^1 x^p\,dx$$
arvoilla $p = 1$*, 2, 3, 4, käyttäen hyväksi tietoa*
$$\int_0^1 x^p\,dx \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n}.$$

Integraalia approksimoivien summien arvot ovat
$$\frac{n(n+1)}{2n^2},\quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},\quad \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4},\quad \frac{n(2n+1)(n+1)(3n^2+3n-1)}{30n^5}.$$
Kun $n \to \infty$, osamäärät lähestyvät raja-arvoja $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{5}$.

9. *Johda kaava*
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$
integroimalla binomikaava.
$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1} = \int_0^x (1+x)^n\,dx = \frac{1}{n+1}((x+1)^{n+1}-1).$$
Kun tähän sijoitetaan $x = 1$, saadaan heti haluttu kaava.

10. *Määritä*
$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

Kohteen 8 jälkimmäisen kaavan perusteella
$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k.$$
Kun tämä derivoidaan puolittain, saadaan
$$n(x+1)^{n-1} + n(n-1)x(x+1)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

Kun sijoitetaan $x = 1$, saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}.$$

12. *Osoita, että*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Kohdan 11 nojalla $\binom{2n}{n}$ on origosta koordinaattipisteeseen $(n,\, n)$ johtavien reittien lukumäärä. Origosta pisteeseen $(n-k,\, k)$ on saman numeron mukaan $\binom{n}{k}$ reittiä. Mutta symmetrian nojalla pisteestä $(n-k,\, k)$ pisteeseen $(n,\, n)$ on yhtä monta reittiä. Pisteen $(n-k,\, k)$ kautta origosta pisteeseen $(n,\, n)$ kulkevia reittejä on niin ollen $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k}$ kappaletta. Koska jokainen reitti origosta $(n,\, n)$:ään kulkee tasan yhden pisteistä $(n-k,\, k)$, $k = 0$, $1, \ldots, n$ kautta, on tehtävän kaava tosi. (Sama kaava saadaan kohteen 13 kaavasta (8), kun siinä asetetaan $k = j = n$.)

16. *Miten alkaisivat funktioiden* $(1+x)^{2/3}$ *ja* $(1+x)^{-2}$ *x:n potenssien mukaan etenevät kehitelmät?*

Jos $(1+x)^{\frac{2}{3}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$, niin

$$\begin{aligned} 1 + 2x + x^2 &= (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots)^3 \\ &= A^3 + 3A^2Bx + (3A^2C + 3AB^2)x^2 + (3A^2D + 6ABC + B^3)x^3 + \cdots, \end{aligned}$$

joten $A = 1$, $B = \dfrac{2}{3}$, $3C + \dfrac{4}{3} = 1$ eli $C = -\dfrac{1}{9}$, $3D = -6ABC - B^3$ eli $D = \dfrac{4}{81}$ jne. Geometrisen sarjan summan kaavan perusteella $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$. Siis $(1+x)^{-2} = (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$.

Matti Lehtinen
<Matti.Lehtinen@Helsinki.FI>

Solmun 2/96–97 tehtävien ratkaisut

Muutamissa tehtävissä oli painovirheitä. Tehtävät on tässä esitetty ratkaisujen yhteydessä uudelleen.

21. *Kellon osoittimet ovat päällekkäin kello 12. Milloin ne ovat seuraavan kerran päällekkäin?*

Ratkaisu. Kellon minuuttiosoittimen kiertonopeus on (yksikkönä kierrosta tunnissa) 1 ja tuntiosoittimen $\frac{1}{12}$. Aika, joka kuluu osoittimien kahden päällekkäinolon välillä olkoon x. Tänä aikana minuuttiosoitin tekee x kierrosta ja tuntiosoitin $\frac{x}{12}$ kierrosta. Koska osoittimet ovat päällekkäin, minuuttiosoitin on siirtynyt edellisestä päällekkäinolosta saman verran kuin tuntiosoitin ja lisäksi yhden täyden kierroksen. Siis $x = 1 + \frac{x}{12}$ eli $t = \frac{12}{11}$. Tämä aika on 1 t $\frac{60}{11}$ min eli 1 t 5 min $\frac{5 \cdot 60}{11}$ s eli 1 t 5 min 27,3 s. Osoittimet ovat kello 12:n jälkeen seuraavan kerran päällekkäin kello 13.05.27.

22. *Todista, että kolmen peräkkäisen kokonaisluvun kuutioiden summa on jaollinen kolmella.*

Ratkaisu. $(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 3a^3 + 6a = 3(a^3 + 2a)$.

23. *Todista, että* $\left(\left((7^7)^7\right)^7\right)^7 + \left((7^7)^7\right)^7$ *on jaollinen 10:llä.*

Ratkaisu. Kymmenellä jaollisuuden kannalta vain luvun viimeisellä numerolla on merkitystä. Samoin kahden luvun tulon viimeiseen numeroon vaikuttaa vain viimeisten numeroiden tulo. Koska $7^2 = 49$, 7^3 päättyy samaan numeroon kuin $7 \cdot 9 = 63$ ja 7^4 samaan numeroon kuin $9 \cdot 9 = 81$. Edelleen 7^7 päättyy samaan numeroon kuin $1 \cdot 3 = 3$. Tästä seuraa, että $(7^7)^7$ päättyy samaan numeroon kuin 3^7. Nyt $3^3 = 27$ ja $3^4 = 81$, joten 3^7 päättyy 7:ään. Tämän perusteella nähdään heti, että $\left((7^7)^7\right)^7$ päättyy 3:een ja $\left(\left((7^7)^7\right)^7\right)^7$ taas 7:ään. Koska $3+7=10$, tehtävässä kysytty luku päättyy 0:aan, joten se on 10:llä jaollinen.

24.. *Osoita, että* $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ *on kaikilla kokonaisluvuilla* a *kokonaisluvun neliö.*

Ratkaisu. $a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = a(a+3)(a^2+3a+2)+1 = a(a+3)\left(a(a+3)+2\right)+1 = \left(a(a+3)\right)^2 + 2a(a+3)+1 = \left(a(a+3)+1\right)^2$.

25. *Ratkaise yhtälöryhmä*

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \qquad (1)$$

$$x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78, \qquad (2)$$

$$(3)$$

missä $x > 0$, $y > 0$.

Ratkaisu. Merkitään $\sqrt{xy} = t$. Kun ensimmäinen yhtälö lavennetaan t:llä, saadaan ryhmä

$$x + y = 7 + t \qquad (4)$$

$$x + y = \frac{78}{t}. \qquad (5)$$

$$(6)$$

Siis $7 + t = \frac{78}{t}$, joten t:n on oltava toisen asteen yhtälön $t^2 + 7t - 78 = 0$ ratkaisu. Tällä yhtälöllä on kaksi ratkaisua $t = -13$ ja $t = 6$; vain jälkimmäinen voi kelvata. Kun $t = 6$, alkuperäinen yhtälöryhmä saa muodon

$$xy = 36 \qquad (7)$$

$$x + y = 13. \qquad (8)$$

$$(9)$$

Tämän yhtälöryhmän ratkaisut ovat $x = 9$, $y = 4$ ja $x = 4$, $y = 9$. Nämä toteuttavat myös alkuperäisen yhtälöryhmän.

26. *Todista, että viiden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa on jaollinen viidellä, muttei jaollinen 25:llä.*

Ratkaisu. Olkoon a kokonaisluku. Silloin $(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)^2 = 5a^2+10 = 5(a^2+2)$. Tämä on jaollinen 5:llä. Jotta se olisi jaollinen 25:llä, olisi luvun a^2+2 oltava jaollinen 5:llä. Mutta a^2 voi päättyä vain numeroihin 0, 1, 4, 9, 5 tai 6 (vain viimeinen numero vaikuttaa neliön viimeiseen numeroon; vain luetellut numerot esiintyvät lukujen $0, 1, 2, \ldots, 9$ neliöiden viimeisinä numeroina). Siis a^2+2 päättyy johonkin numeroista 2, 3, 6, 1, 7, 8, eikä ole 5:llä jaollinen.

27. *Onko olemassa kokonaislukuja m ja n, jotka toteuttavat yhtälön $m^2 + 1958 = n^2$?*

Ratkaisu. Jos tällaiset kokonaisluvut olisivat olemassa, olisi $(n-m)(n+m) = n^2-m^2 = 1958 = 2\cdot 979$. Lukujen n ja m on oltava joko molempien parillisia tai molempien parittomia. Kummassakin tapauksessa $n-m$ ja $n+m$ ovat parillisia, joten niiden tulo on jaollinen 4:llä. Koska 1958 ei ole jaollinen neljällä, lukuja n ja m ei ole olemassa.

28. *Sievennä lauseke*

$$\frac{1}{a+\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{a^3}+\sqrt[n]{a^2}+\sqrt[n]{a}}$$

sellaiseen muotoon, että nimittäjässä ei esiinny juurilausekkeita.

Ratkaisu. Merkitään $a^{1/n} = b$. Sievennettävä lauseke on

$$\frac{1}{b^n+b^{n-1}+\cdots b^2+b} = \frac{1}{b(b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b+1)} = \frac{b-1}{b(b^n-1)} = \frac{b^n-b^{n-1}}{a(a-1)} = \frac{a-\sqrt[n]{a}^{n-1}}{a(a-1)}.$$

29. *Merkitään luvun x 10-kantaista logaritmia $\log x$:llä. Laske $\log 48$ lukujen $\log_3 5 = a$ ja $\log_5 8 = b$ avulla.*

Ratkaisu. Oletuksista seuraa, että $\log_5 3 = \dfrac{1}{a}$ ja $\log_5 2 = \dfrac{b}{3}$. Olkoon $x = \log 48$ eli $5^{1/a}\cdot 5^{4b/3} = 3\cdot 2^4 = 48 = 10^x = 2^x 5^x = 5^{(bx+3x)/3}$. Siis $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4b}{3} = \dfrac{(b+3)x}{3}$, josta ratkaistaan $x = \dfrac{3+4ab}{a(b+3)}$.

30. *Ratkaise yhtälö $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.*

Ratkaisu. Käytetään kaksinkertaisen kulman kosinin kaavaa yhtälön vasemmalla puolella kulmaa kasvattamaan ja oikealla puolella pienentämään: $\sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos^2 2x = 2\cos^2 2x - 1$. Yhtälö palautuu siis yhtälöksi $\cos^2 2x = 1$, $\cos 2x = \pm 1$, $2x = n\pi$, $x = \dfrac{n\pi}{2}$; nämä luvut toteuttavat alkuperäisen yhtälön.

31. *Todista: kun $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, niin $\cot\dfrac{x}{2} \geq 1+\cot x$*

Ratkaisu. Tunnetusti $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$. Merkitään $\cot\dfrac{x}{2} = t > 0$. Todistettava epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $t \geq 1+\dfrac{t^2-1}{2t}$ eli $2t^2 \geq 2t+t^2-1$ eli $(t-1)^2 \geq 0$ kanssa. Viimeinen epäyhtälö on aina tosi, joten tehtävän epäyhtälökin on voimassa.

32. *Piirretään ympyrä niin, että se sivuaa tasakylkisen kolmion kylkiä ja kolmion a-pituinen kanta on ympyrän jänne. Määritä ympyrän säde r a:n ja kolmion korkeuden h avulla.*

Ratkaisu. Kolmion kärjet B ja C ovat samalla ympyrän ja kolmion ABC kylkien sivuamispisteet. Olkoon ympyrän keskipiste O ja D janojen BC ja AO leikkauspiste; olkoon $OD = x$. Suorakulmaisesta kolmiosta ACO saadaan $\dfrac{a^2}{4} = hx$ eli $x = \dfrac{a^2}{4h}$. Suorakulmaisesta kolmiosta CDO saadaan nyt $r^2 = \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^4}{16h^2}$, josta r on helposti laskettavissa.

33. *Laske suorakulmaisen kolmion suoran kulman puolittajan pituus kolmion kateettien a ja b avulla.*

Ratkaisu. Olkoon ABC suorakulmainen kolmio ja CD sen kulmanpuolittaja. Koska kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, $AD = \dfrac{b}{a+b}c$. Koska $\angle ACD = 45°$ ja $\sin(\angle CAD) = \dfrac{a}{c}$, saadaan sinilauseesta sovellettuna kolmioon ADC $CD = \dfrac{bc}{(a+b)\cdot\sin 45°}\cdot\dfrac{a}{c} = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

34. *Ympyrällä, neliöllä ja tasasivuisella kolmiolla on sama ala. Laske näiden kuvioiden piirien suhde.*

Ratkaisu. Ympyrän säde r, neliön sivu a, tasasivuisen kolmion sivu b. Tiedetään, että $\pi r^2 = a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$. Piirien suhteet ovat $2\pi r : 4\sqrt{\pi}r : 3\cdot\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}r$.

35. *Määritä se ympyrän keskuskulma, jota vastaavan segmentin jänne on yhtä pitkä kuin segmentin sisään piirretyn mahdollisimman suuren ympyrän piiri.*

Ratkaisu. Olkoon isomman ympyrän säde R ja keskipiste O; olkoon jänteen AB erottamaan segmenttiin piirretyn mahdollisimman suuren ympyrän säde r; tämä ympyrä sivuaa AB:tä pisteessä N ja kaarta AB pisteessä M. Leikatkoon suora MNO isomman ympyrän myös pisteessä F. Pisteen N potenssi ympyrän suhteen on $\pi^2 r^2 = 2r\cdot NF = 2r(2R-2r) = 4r^2\left(\dfrac{\pi}{\sin\alpha}-1\right)$. Tästä $\sin\alpha = \dfrac{4\pi}{\pi^2+4}$. Kysytty keskuskulma on $2\alpha = 2\arcsin\dfrac{4\pi}{\pi^2+4} \approx 130°$.

Matti Lehtinen
<Matti.Lehtinen@Helsinki.FI>

Malatyn tehtävät

Tällä kerralla tutkitaan eri vaihtoehtojen olemassaoloa ja niiden syitä.

Piirrä suunnikas $ABCD$. Piirrä kulman A puolittaja ja merkitse sen leikkauspisteitä kulmien B ja D puolittajien kanssa kirjaimilla K ja L, tässä järjestyksessä. Piirrä lisäksi kulman C puolittaja niin, että se leikkaa kulmien D ja B puolittajat pisteissä M ja N, tässä järjestyksessä.

1. Todista, että nelikulmio KLMN on suorakulmio.
2. Missä tapauksissa suorakulmion kärkipisteet kuuluvat suunnikkaan sisäalueeseen?
3. Missä tapauksissa kaksi ja vain kaksi suorakulmion kärkipisteistä on suunnikkaan ulkopuolella? (Todistus tarvitaan)
4. Missä tapauksissa täsmälleen kaksi suorakulmion kärkipisteistä on suunnikkaan vastakkaisilla sivuilla? (Todistus tarvitaan)
5. Missä tapauksissa suorakulmio degeneroituu pisteeksi? (Todistus tarvitaan)

George Malaty
PL 111
80101 Joensuu

Matematiikkaan liittyviä videoita

Keväästä 1998 alkaen Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen kirjastosta voi kysellä matematiikkaan liittyviä videoita lainattavaksi epäkaupallisiin yleisötilaisuuksiin ja opetustilanteisiin (esim. koulussa näytettäväksi), puhelin 09-1912 2853. Monia näistä videoista ei saa ostaa ja niiden saaminen laitokselle on ollut työlästä. Toivotaan, että lainaajat tietävät, ettei omia kopioita saa tehdä ja että videoita tulee käyttää niin, ettei niiden kunto huonone esim. edestakaisen kelauksen takia. Lainaajan tulee ilmoittaa tilaisuus, jossa aikoo esittää videon. Palaute videon sisällöstä ja sopivuudesta ko. tilaisuuteen on tervetullutta ja se toimitetaan videon tekijöille — jotka ovat toivoneet tällaista vastineeksi videon antamisesta kirjaston käyttöön.

Tätä kirjoitettaessa on muodollisten lainauslupien saaminen vielä kesken, mutta lupia on luvattu antaa. Tarkoituksena on, että saatavana on seuraavia videoita:

Matematiikka ja taide

Rooman La Sapienza-yliopiston matematiikan professorin *Michele Emmerin* matematiikkaa ja taidetta käsittelevät englanninkieliset videot.

Videot on tarkoitettu matematiikan, taiteen, arkkitehtuurin, biologian ym. opiskelijoille ja opettajille sekä suurelle yleisölle. Tieteenvälinen lähestymistapa keskittyy visuaaliseen vaikuttamiseen käyttäen elokuvan kieltä. Kuvauskohteina on kuuluisia rakennuksia ja taidemuseoiden aarteita. Kussakin filmissä esiintyvät henkilöt ovat alansa tunnustettuja asiantuntijoita. Näitä videoita ei voi ostaa Suomesta. Italialainen edustaja suostuu ehkä haluttaessa yhteistilauksiin, mutta yksittäiset tilaukset tulevat liian kalliiksi ja työläiksi.

Seuraavassa lyhyt selostus kustakin videosta:

Möbius strip 27 min	Esitellään Möbius-nauha ja sen käyttöä kuvanveistossa, teollisuudessa, grafiikassa, maalaustaiteessa ja runoudessa.
Soap Bubbles 27 min	Video käsittelee saippuakuplia, Plateau'n ongelmaa ja minimaalipintoja, myös kahden tai useamman saippuakuplan leikkaujoukkoja havainnollistetaan. Yhteyksiä kuvanveistoon käsitellään ja mikroskooppisia meren eläviä näytetään optisen mikroskoopin avulla.
Platonic solids 27 min	Keskeisenä aiheena on viiden säännöllisen monitahokkaan käyttö renessanssin taiteessa, mutta myös yhteyksiä nykytaiteeseen, biokemiaan ja kemiaan käsitellään.
Symmetry and tessellations 27 min	Symmetriaa ja sen esiintymistä taiteessa, musiikissa ja luonnontieteissä käsitellään. Tason kristallografisia ryhmiä esitellään ja havainnollistetaan Alhambran palatsin mosaiikkien avulla.
Dimensions 27 min	Pääaiheena ovat kaksi ja neljä dimensiota. Miten voidaan havainnollistaa neliulotteisia kappaleita? Käsitellään mm. kubistien, Picasson ja Dalin yrityksiä käsitellä tätä taiteessaan.
Helices 27 min	Aiheena on näiden esiintyminen taiteessa, arkkitehtuurissa, luonnossa ja mikrobiologiassa.
Spirals 27 min	Tarkastellaan spiraaleja maalaustaiteessa, eläintieteessä, rakennuksissa, esihistoriallisissa löydöissä ja tähtitieteessä.
Geometry 27 min	Käsitellään eri geometrioita ja niiden esiintymistä maalaustaiteessa, mandaloissa ja avaruuden tutkimisessa. Esitellään origamia ja näkemisen teorioiden historiaa.
Ars Combinatoria 27 min	Käsitellään kombinatorista taidetta ja matemaattista logiikkaa.
Computers 27 min	Tietokoneiden käyttöä differentiaaligeometriassa, kankaiden kudonnassa, kristallografiassa, labyrinttien ratkaisemisessa, entisöinnissä ja taiteessa.

Labyrinths 27 min	Käsitellään historiallisesti kuuluisia labyrinttejä ja niiden analogioita musiikissa. esitellään esimerkkejä labyrinteistä maalaustaiteessa ja puutarhoissa.
M. C. Escher 50 min	Digitalisoitu kooste aikaisemmista, jotka olivat nimeltään Symmetry and space ja Geometry and impossible worlds. Hollantilaisen graafikon työtä käsittelevä video. Animaatioiden avulla esitellään Escherin töitä ja käsitellään mm. avaruuden täyttämistä kappaleilla, Escherin paradoksaalisia kuvia ja epäeuklidista geometriaa.
Knots 27 min	Esitellään erilaisia solmuja ja niiden käyttöä matematiikassa, Japanin kulttuurissa, taikatempuissa, taiteessa.
Flatland 22 min	Perustuu E. A. Abbottin romaaniin, joka kertoo litteässä maailmassa elävästä neliöstä ja muista geometrisista olioista.

Minnesotan Geometry Centerin videot

Not Knot 20 min	Solmuteoriaa havainnollistava video, joka käsittelee myös symmetrioita ja hyperbolista avaruutta.
Outside In 20 min	Tietokoneanimaatio pallonkuoren kääntämisestä sisäpuoli ulospäin.
The Shape of Space 15 min	2- ja 3-ulotteisen avaruuden mallien havainnollistusta.

Muut videot

Matematiikka ja naiset	Dos. *Marjatta Näätäsen* (Helsingin yliopisto) ohjaama video naisista ja matematiikasta.
Women and Mathematics across Cultures, EWM — European Women in Mathematics 25 min	Filmi esittelee lyhyesti Suomeen perustetun eurooppalaisen naismatematiikkojen kattojärjestön European Women in Mathematics. Esitetään tilastoja naismatemaatikkojen määrästä Euroopan maissa, ja neljä eri maissa — Euroopan lisäksi latinalaisessa Amerikassa ja USA:ssa — opiskellutta ja työskennellyttä naista kertoo kokemuksensa siitä, millaista on olla naismatemaatikko kussakin näistä eri kulttuureista ja etsii selityksiä sille tosiasialle, että latinalaisissa maissa on paljon enemmän yliopistotason naismatemaatikkoja kuin Pohjoismaissa. 1996. Videota ei ole tekstitetty, joten sitä voi käyttää puhutun englanninkielen ymmärtämistestinä ja keskustelun pohjana. Videon voi ostaa omakustannushintaan 150,- (sisältää postikulut Suomessa) ottamalla yhteyttä osoitteeseen `<ulmanen@sophie.helsinki.fi>` tai puhelimella 09-1912 2853 Riitta Ulmanen.

Keväällä 1998 pitäisi kirjaston käyttöön tulla video

Arabeskit ja geometria 20 min	*Antonio Costan* ohjaamasta espanjankielisestä videosta *Arabescos y Geometria* tehty suomenkielinen käännös. Filmi esittelee Alhambran palatsin seinämosaiikkeja ja kertoo niiden yhteydestä geometriaan tutkimalla seinäkoristeissa esiintyviä symmetriaryhmiä. Filmi on visuaalisesti erittäin kaunis. UNED 1995, 20 min. Filmi on saanut useita palkontoja, mm. Prix du meilleur film etranger, 11. festival international du cinema scientifique de Palaiseau, France, Nov. -95, Premio video educativo, VI festival internacional de video de Canarias, Oct. -95. Videota ei voi ostaa.

Marjatta Näätänen

Lehdistökeskustelua

> *"Monet eivät osaa esimerkiksi perusmatematiikkaa. Ensimmäisen asteen yhtälöistä suuri osa ei ole koskaan kuullutkaan."*

Jyväskylän Teknisessä ammattioppilaitoksessa elektroniikkaa ja tv-tekniikkaa opettava elektroniikan lehtori *Jari Mansikkaviita* kertoo kokemuksiaan *Opettaja-lehdessä 36/97* otsikolla "Nykykoulutettu ei työssä pärjää":

> *"Opetushallituksen sanoma kentälle on, että opetusta on laaja-alaistettava, mutta samalla huolehdittava erikoisosaamisen laadusta ja kaikki tämä tietysti entisin tai peräti vähenevin resurssein ... Koulutusajan väheneminen yhdistettynä yleissivistävien opintojen voimakkaaseen lisääntymiseen on auttamatta merkinnyt varsinaisten ammatillisten aineiden supistamista ...*
>
> *Oppilaitosten välisen tiukan kilpailun myötä tarjotaan valtava määrä kursseja, joilla ei ole mitään tekemistä ammatin oppimisen kanssa. Pilkkionginta- tai bridgekurssit ovat tietenkin hauskoja, mutta mitä sähköosaston opiskelija niistä hyötyy? Uskomatonta, että ammatillisen koulutuksen kehittämisen päätavoite tänä päivänä on, että oppilailla on koulussa hauskaa!*
>
> *Tässä leikitään vakavilla asioilla, eikä opettajien pitäisi suostua tällaiseen pelleilyyn. Meidänhän pitäisi kasvattaa ihmisiä, jotka pystyvät tulevaisuudessa elättämään itsensä omalla työllään.*
>
> *Oppilaat tulevat, menevät ja olevat miten itse tykkäävät eivätkä tee kouluajan ulkopuolella yhtään mitään, vaikka viikosta 8 tuntia pitäisi suorittaa erilaisia etätehtäviä."*

Todisteena tason laskusta Jari kertoo, että luokan keskiarvo putosi edellisestä vuodesta yli numerolla, vaikka hän piti oppilailleen täsmälleen samat kokeet kuin aiemminkin.

> *"Nuorten asenteet ja koko järjestelmä on pielessä. Ilmeisesti ammatillisessa opetuksessa alkavat nyt näkyä ne vuosikerrat, jotka ovat olleet peruskoulussa vapaavalintaisuuden tullessa muotiin. Monet eivät osaa esimerkiksi perusmatematiikkaa. Ensimmäisen asteen yhtälöistä suuri osa ei ole koskaan kuullutkaan."*

Tuomo Kiisseli kirjoittaa *Alueuutisissa* nuorten passivisuudesta liikunnan suhteen:

> *"Tietokonesukupolvi haluaa liikkua enää ainoastaan internetissä"*
>
> *"Suomen 15-vuotiaat pojat liikkuvat vähiten koko Euroopassa, ... Lapsena omaksuttu liikunnan vieroksuminen näkyy jo nykyisissä kolmikymppisissämme: he ovat työterveyslaitoksen selvityksen mukaan roimasti huonokuntoisempia kuin edellinen sukupolvi."*

El País, matematiikan opetus — ja Suomikin mainitaan ohimennen:

Suuri espanjalainen päivälehti El País käsittelee viikkoliitteessään 9.11.1997 matematiikan opetusta, tarkemmin sanoen pelkoa, jota monet tuntevat matematiikkaa kohtaan. Lehti julkaisee kappaleen hiljattain ilmestyneestä Hans Magnus Enzensbergerin kirjasta "El diablo de los números" ja haastattelee mm. Madridin Complutense-yliopiston professoria Miguel de Guzmánia, joka korostaa uteliaisuuden herättämisen sekä matematiikan kauneuden ja sen tuottaman mielihyvän merkitystä matematiikan opetuksessa. Myös Suomi pääsee mukaan artikkelissa, de Guzmán mainitsee, että hänen kirjansa "Aventúras matemáticas" on käännetty monille kielille, "*muun muassa kiinaksi ja suomeksi*". De Guzmán jatkaa: Matematiikan merkitys persoonallisuuden kehittymiselle on, että se opettaa ajattelemaan.

Helsingin Sanomat uutisoi 28.11.1997:

Lastenpsykiatri huolissaan tietotekniikan vaikutuksista lapsen psyykkiseen kehitykseen. Tietokonemaailma voi muuttaa lapsen ajattelua.

Lastenpsykiatrian professori Tuula Tamminen on esittänyt huolestumistaan Tietotekniikan päivillä: *"Jos oppii ennen murrosikää käyttämään tietokonetta, perusajatteluun voi tulla tietotekniikan mukainen toisenlainen symbolijärjestelmä."* Tamminen haluaakin esittää hiukan kärjistäen kysymyksen, ollaanko tietotekniikan myötä siirtymässä loogisesta ajattelusta fragmentaariseen, sirpaleiseen merkkiajatteluun ...

Kun lapsi viettää paljon aikaa tietokoneen äärellä, Tammisen mukaan käyttöön alkaa liittyä jo tunteita koneen tietomaailmaa kohtaan. Toisin kuin aikuinen tai murrosiän ohittanut nuori, lapsi tulee riippuvaiseksi tästä prosessista ...

Psyykkisen kehityksen päämäärä on vapautua inhimillisestä tunneriippuvuudesta itsenäistymällä, mutta tietotekniikkaan juuttuneella lapsella itsenäisyys voi vaihtua koneriippuvuudeksi, jolla on Tammisen mukaan huolestuttavia piirteitä myös lapsen moraali- ja viettikehitykseen. *"Vain ihmissuhteiden ja inhimillisen vuorovaikutuksen kautta opitaan mitä saa ja mitä ei saa tehdä. Kone ei voi opettaa. Jo nyt on nuorisorikollisuudessa nähty merkkejä siitä, että tekijä ei ole edes tiennyt syyllistyneensä rikokseen."*

Tamminen kertoo myös järkyttyneensä huomattuaan miten helposti internetissä voi saada eteensä esimerkiksi kovan luokan lapsipornografiaa.

Yliopisto 19/97 haastattelee *Paavo Haavikkoa*. Tässä muutamia otteita Haavikon vastauksista:

Tiedepolitiikasta:

> *"On siinä nyt jotakin kasvamassa, kun on tajuttu, että Suomi on muuttumassa myös matemaattis-luonnontieteellisten aineiden osalta Euroopan viimeiseksi erämaaksi, jossa elää iloinen, soittava ja laulava kansa jolla on suuri menneisyytensä soittavana ja laulavana kansana."*

Suomen pahimmat ongelmat:

> *"Se, että kulttuurisen rappion takia kaikki asiat ovat erillisiä ja erilliskysymyksiä olivat ne millä alalla tahansa, ei osa orgaanista kulttuuria. Suomalaista nuorta ei voida eikä yritetä kouluttaa osalliseksi kulttuuriin koska sellaista ei ole. Koulutusta kyllä on, loputtomasti."*

Luovasti lahjakkaiden koulutuksesta:

> *" ... Uutta luova lahjakkuus on aina vaara kaikelle sille mitä valtarakenteet ovat saaneet kootuksi ... Suomen kokoisessa ja näköisessä maassa erityislahjakkuudet ovat niin harvoja ja harvinaisia, että vanhemmat voisivat unohtaa koko käsitteen.*
>
> *Menestys taas on monen asian summa, ja lahjakkuus sekä näkyy että saa asianmukaista vastustusta. Suomalaisen yhteiskunnan ihanne on tasapäisyys."*

koonnut **Marjatta Näätänen**

Verkko-osoitteita

Juha Puranen on kerännyt matematiikan ja tilastotieteen opetukseen liittyviä osoitteita kotisivulleen[7].

Tietoa matematiikan oppikirjoista ja muusta amerikkalaisesta materiaalista löytyy verkosta yhdistyksen The Mathematical Association of America kotisivulta[8].

Marjatta Näätänen

[7] http://www.helsinki.fi/%7ejpuranen/
[8] http://www.maa.org

Yleisönosasto

Internetin turhuudesta

Juha Tukkinen kirjoitti (Solmu 2/96-97) Internetin turhuudesta. Internetin ammattilaisena minun täytyy vain ihmetellä, millä perusteella hän pystyy haukkumaan maailmanlaajuisen tieto- ja kommunikaatioverkon täysin turhaksi. Onko Tukkinen kenties tutustunut hakumoottoreihin, uutispalveluihin, verkossa ilmestyviin lehtiin jne?

Internetsivujen teko ei mielestäni ole turhanpäiväistä, löytyyhän Suomestakin useita kotisivujen tekoon keskittyneitä yrityksiä. Ihmiset hankkivat sen avulla jokapäiväisen toimeentulonsa! Nykyisenlaisen työttömyyden aikana tätä ei voi mielestäni pitää ainakaan huonona asiana!

Useilla yrityksillä, niin pienillä kuin suurillakin, on verkossa omat kotisivunsa. Sivuillaan ne luovat kuvan ajantasalla olevasta yrityksestä joka pyrkii palvelemaan asiakkaitaan mahdollisimman monipuolisesti. Nykyään Internetin kautta saa maksettua laskunsa tai otettua jopa vakuutuksen!

Sähköpostin avulla yritykset hoitavat maailmanlaajuisia yhteyksiään. Yhä kasvamassa määrin myös yksityiset hoitavat kirjeenvaihtonsa nopeasti ja edullisesti, siis verkon avustuksella. Ihmisten olisi syytä opetella käyttämään sähköpostiohjelmia kunnolla jottei heidän postinsa päätyisi vääriin käsiin. Kannattaa valita luotettava postiohjelma, pitää salasanansa ehdottomasti vain omana tietonaan sekä tulee muistaa sulkea ohjelma kunnollisesti. Salasanan on myös oltava vaikea, ts. sen on koostuttava isoista ja pienistä kirjaimista, siinä voi olla numeroita ja sen on oltava riittävän pitkä (n. 7 merkkiä riittänee). Salasanana ei saa käyttää erisnimeä tai perusmuodossa olevaa sanaa, ne on helppo arvata.

Koululaisten esitelmänteko helpottuu huomattavasti, kun lähdeaineisto on lähellä — parin napinpainalluksen päässä! Verkosta löytää tietoa lähes kaikilla kielillä. Toki tietynasteinen lähdekritiikki on paikallaan, verkkoon eksyy myös asiatonta aineistoa. Kuitenkin tulee pitää mielessä että myös kirjastoissa on väärää tietoa — kirjat ja tiedot vanhenevat. Internetiä päivitetään koko ajan, tieto on tuoretta. En usko kovinkaan monesti törmänneeni väärään tietoon esim. tehdessäni tutkielmaa Mannerheimin elämästä — en usko että joku haluaisi tietentahtoen kirjoittaa puutaheinää. Tutkielman vastaanottanut opettajakin oli tyytyväinen, tämä ihan vain osoituksena Internetin hyödyllisyydestä.

Tukkinen tyrmää reaaliaikaiset keskustelut kovin herkästi. Hän kirjoitti muodostaneensa mielipiteensä pelkästään erään radiolinjan keskustelusivun perusteella. Arvelen tietäväni mitä keskustelusivua hän tarkoittaa. Tuo mainittu paikka vilisee alatyylisesti kirjoittavia ... mutta verkon käyttäjillä on kyllä paljon laadukkaampiakin vaihtoehtoja. Ehkäpä Tukkinen voisi kokeilla IRC(Internet Relay Chat):iä. Sieltäkin löytää alatyylistä "keskustelua" runsain mitoin. Voisin tosin kysyä että kuka on käskenyt valitsemaan sellaisen kanavan/puhekumppanin? Itse valitsen "keskusteluhuoneen" sen otsikon perusteella. IRC:istä löytyy kyllä jokaiselle sopiva keskustelukumppani, aihepiirejä on rajattomasti aina koiranhoidosta psykologiaan. Juttukumppanin/huoneen etsiminen vaatii kärsivällisyyttä.

Verkossa on sellaista aineistoa, jolle on kysyntää. Alatyylisiä sivuja ei ole kuitenkaan pakko katsella, esim. vanhemmat voivat estää lapstensa pääsyn kyseisille sivuille. Verkon käyttöä saa nopeutettua kytkemällä kuvien latauksen pois päältä.

Mainittakoon vielä että Internet ei ole sotkuinen, sitä tulee osata käyttää! Oikein suunnatut haut hakupalvelinten avulla tuottavat toivottua tulosta. Lisäksi etsintää helpottaa ns. domainkäytäntö: yritysten Internetosoitteet ovat usein muotoa `<http://www.yrityksennimi.fi>`.

Vastaanotan mielelläni postia liittyen Internetkeskusteluun.

yst. terv.

Outi Jousi
abiturientti
`<bamor@tkukoulu.fi>`