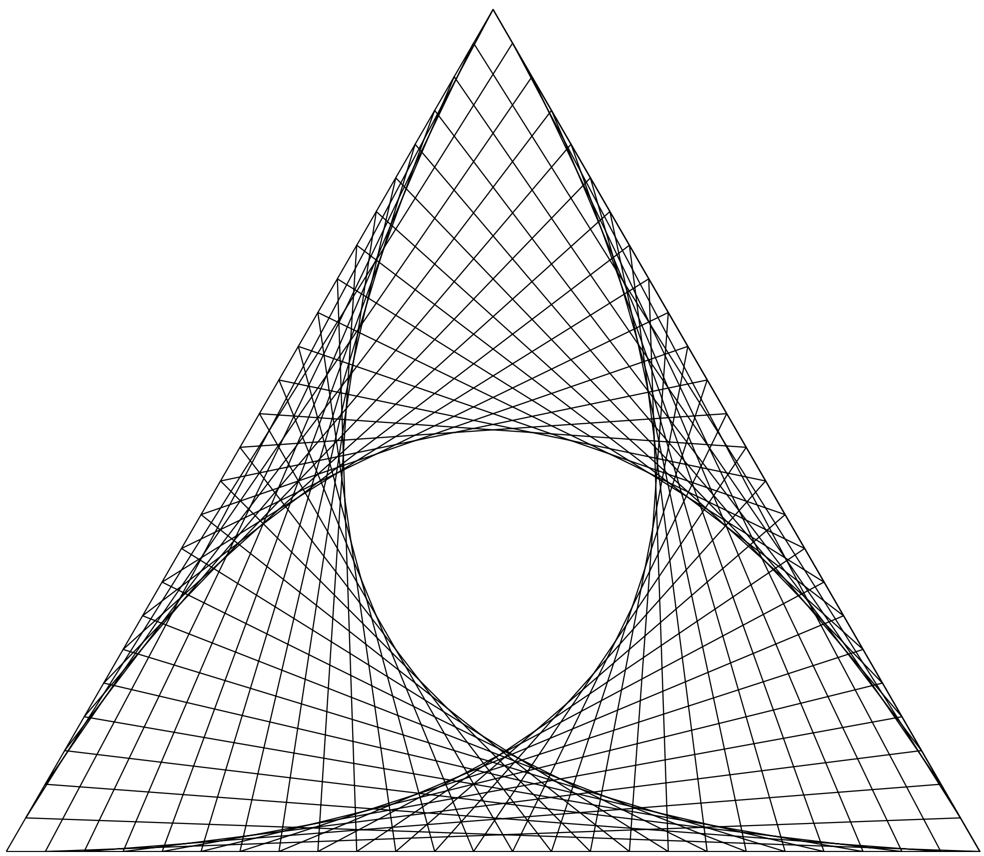
Solmu

Matematiikkalehti

5/1998–1999



http://www.math.helsinki.fi/Solmu/

Solmu 5/1998–1999

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

http://www.math.helsinki.fi/Solmu/

Päätoimittaja *Pekka Alestalo*
Toimitussihteerit *Jouni Seppänen* ja *Mika Koskenoja*

Sähköposti
pekka.alestalo@helsinki.fi
jouni.seppanen@iki.fi

Toimituskunta:
Heikki Apiola
Matti Lehtinen
Kullervo Nieminen
Marjatta Näätänen

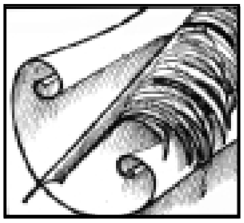
Graafinen avustaja *Marjaana Beddard*
Solmun logo *Mikko Vaajasaari*
Kannen kuva *Panu Erästö*

Seuraavaan lehteen tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään kesäkuun loppuun mennessä.

Lehden aloittamisen tekivät taloudellisella tuellaan mahdolliseksi Nokia (http://www.nokia.com/) ja Taloudellinen Tiedotustoimisto (http://www.tat.fi/). Opetusministeriö (http://www.minedu.fi/) on keväästä 1997 alkaen avustanut taloudellisesti Solmua.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan nykyisin vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytn̈eet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitk̈opioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys



Pääkirjoitus

Eduskuntavaalit ovat ohi, ja uudet kansanedustajat ovat juuri aloittaneet työnsä. Pikaisen verkkosurffailun perusteella näyttää siltä, ettei yhtään matemaatikkoa tullut valituksi; liekö ollut edes ehdolla? On luonnollista, että useilla edustajilla on jonkinlainen hallinnollinen koulutus, mutta esimerkiksi opettajiin verrattuna silmiinpistävän suuri on myös lääkärien, sairaanhoitajien tai maanviljelijöiden osuus. Toisaalta hekään eivät ole voineet estää omien alojensa nykyistä ahdinkoa, joten saattaa olla, ettei opettajienkaan sana paljon painaisi koulutuspolitiikasta päätettäessä.

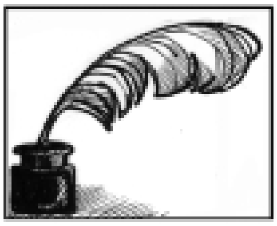
Insinöörien lisäksi löysin yhteyksiä matematiikkaan ainoastaan kahden edustajan kohdalla: yhden isä on matematiikan professori, ja eräs toinen kuulemma tutustui tulevaan mieheensä pinnatessaan lukion matematiikan tunnilta. Nämä ansiot eivät valitettavasti vielä riitä, jos tarvitaan todellista asiantuntemusta kouluja koskevissa asioissa.

Eräissä maissa matemaatikkojen päätöksentekotaitoa kohtaan näyttää kuitenkin löytyvän luottamusta. Esimerkiksi Romanian senaatin ja Israelin knessetin jäseninä on leipätyönsä yliopiston opettajina ja tutkijoina tehneet matematiikan professorit, ja Uzbekistanissa jopa opetusministeri on matemaatikko.

Entisissä itäblokin maissa luotetaan ilmeisesti juuri niihin matemaatikoihin, jotka olivat neuvostoaikana niin paljon matematiikan tutkimisesta kiinnostuneita, etteivät ehtineet pilaamaan mainettaan politiikan parissa. Toisaalta on hyvä muistaa, etteivät suinkaan kaikki matemaatikot jääneet yhteiskunnallisissa asioissa vain sivustakatsojiksi; itäisessä naapurissammekin tunnetuimmat vastarannankiisket olivat Andrei Saharov, ydinfyysikko, ja Aleksander Solženitsyn, matematiikanopettaja.

Vaikka länsimaisella demokratialla on Suomessa vähän pidempi historia kuin yllä mainituissa maissa, en usko asioiden olevan Suomen kouluissa niin hyvin, ettei (matematiikan)opettajia tarvittaisi myös poliittisessa päätöksenteossa.

Pekka Alestalo



Toimitussihteerin palsta

Kahden edellisen Solmun verkkoversiot tehtiin lyhyellä HTML-kurssilla[1], jonka pidin helmi-maaliskuussa Helsingin yliopiston matematiikan laitoksella. Tuolle enemmän tietotekniikkaa ja vähemmän matematiikkaa sisältäneelle kurssille osallistui viisi naista ja kymmenen miestä, kaikki matematiikan pääaineopiskelijoita. Ottaen huomioon toisen erikoisnumeron aiheen *Matematiikka, naiset ja osaamisyhteiskunta*, oli erityisen ilahduttavaa huomata, että kurssin osallistujista sentään kolmasosa oli naisia. Tavanomaista kun yhä edelleen lienee, että vastaavat tietokoneisiin ja matematiikkaan – vieläpä molempiin – liittyvät kurssit saavat osallistujikseen lähes yksinomaan miehiä.

Vaikka olisimmekin jo hyvää vauhtia kulkemassa kohti sukupuolten välistä tasa-arvoa osaamisyhteiskunnassamme, niin on varmaa, että olemme vielä kaukana sukupolvien välisestä tasa-arvosta. Tässä tarkoitan lähinnä tietotekniikkaan liittyvää osaamista. Tietotekninen kehitys on ollut niin valtaisaa ja tapahtunut niin nopeasti, että osaamisyhteiskunnan ensimmäiset koko ikänsä tasa-arvoiset tulevat olemaan nyt työuraansa aloittelevat kolmekymppiset. Niin valitettava tosiasia kuin se vanhemmille sukupolville onkin.

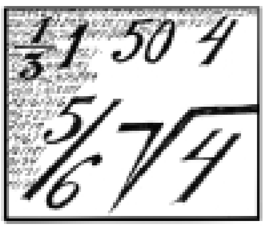
Nuorinkaan työssäkäyvä sukupolvi ei voi kovin pitkään nauttia ”atk-etumatkasta”, joka sillä nyt on muihin työssäkäyviin sukupolviin nähden. Seuraava peruskoululaisten ja lukiolaisten, siis teidän tätä lehteä lukevien, ikäluokka on jo muutaman vuoden kuluttua työmarkkinoillamme. Teidän sukupolvenne on puolestaan ensimmäinen, jolle tietokoneet ovat tulleet tutuiksi jo viimeistään yläasteella. Te voitte keskittyä todellisen osaamisen – esimerkiksi matemaattisten taitojen – hankkimiseen paljon aikaa ja vaivaa vaativien atk-kurssien sijasta.

Eräs ainakin atk-opettajille tutuksi tullut ongelma paljastui minullekin HTML-kurssin aikana: oppilaiden (opettajan voi lukea mukaan samaan ryhmään) pohjatietojen suuri vaihtelu. Kiistaton tosiasia on, että opettaminen ja oppiminen heterogeenisessä luokassa voi käydä mahdottomaksi. Kun osa oppilaista voisi aivan hyvin toimia kurssin opettajana, ja toiset taas vaatisivat aluksi muutaman tunnin henkilökohtaista opetusta, on kurssin sovittaminen kaikille mielekkääksi hyvin hankalaa.

Toimin Solmun toimitussihteerinä väliaikaisesti tämän numeron ajan. Voitte siis edelleen lähettää ehdotuksianne ja kommenttejanne Jouni Seppäselle. Jouni jatkaa toimitussihteerinä taas syksyn ensimmäisessä numerossa.

Mika Koskenoja
`<mika.koskenoja@helsinki.fi>`

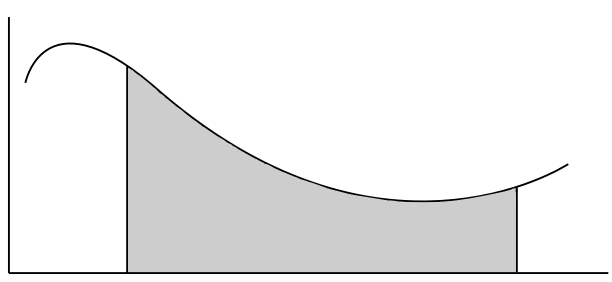
[1] HTML = *HyperText Markup Language*, tietoverkkodokumenteissa käytettävä koodausjärjestelmä.



Analyysin peruslause

1. Johdanto

Derivoiminen ja integroiminen ovat matemaattisen analyysin perustyökaluja, joilla on karkeasti sanottuna vastakkaiset vaikutukset. Geometrisesti derivoiminen kuvaa tangentin asettamista ja integroiminen pinta-alan laskemista. Palautamme aluksi mieleen integraalilaskennan kaksi peruskäsitettä. Sanomme, että funktio F on f:n integraalifunktio, jos $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tässä mielessä siis integroiminen on derivoimisen käänteisoperaatio: funktio on derivaattansa integraalifunktio. Sen sijaan määrätty integraali kertoo funktion kuvaajan ja koordinaattiakselin väliin jäävän alueen pinta-alan. Määrätyn integraalin laskemisella on siis erittäin geometrinen merkitys. Analyysin peruslause, joka on mahdollisesti yksi kauneimmista ja hyödyllisimmistä matemaatisista lauseista, liittää derivaatan, integraalifunktion ja määrätyn integraalin käsitetteet toisiinsa.



Kuva 1: Funktion kuvaajan ja koordinaattiakselin väliin jäävä pinta-ala.

Ajatellaan esimerkiksi suoraviivaisesti etenevää liikettä. Jos liikkuja lähtee nollapisteestä ja hetkella $t > 0$ sen sijainti reaaliakselilla on $f(t)$, niin silloin derivaatta $f'(t)$ on liikkujan nopeus hetkellä t ja toinen derivaatta $f''(t)$ on liikkujan kiihtyvyys hetkellä t. Jos nopeus v on vakio, niin liikkujan sijainti hetkellä t_0 saadaan tutulla kaavalla

$$s = vt_0.$$

Se että nopeus on vakio tarkoittaa, että $f'(t) = v$ kaikilla $t > 0$ ja huomaamme, että yllä oleva tuttu kaava voidaankin esittää määrätyn integraalin avulla

$$f(t_0) = s = vt_0 = \int_0^{t_0} f'(t)\, dt.$$

Liikkujan sijainnin laskeminen muuttuu hankalammaksi jos nopeus vaihtelee ajan mukana. Oletetaan vaikka, että nopeus hetkellä t on $2t$. Missä liikkuja on nyt hetkellä t_0? Käyttämällä edellä ollutta merkintää, oletus tarkoittaa, että $f'(t) = 2t$. Analyysin peruslauseen mukaan

$$f(t_0) = f(t_0) - f(0) = \int_0^{t_0} f'(t)\, dt = \int_0^{t_0} 2t\, dt = t_0^2.$$

Tämän kirjoituksen tarkoituksena on pohtia analyysin peruslauseen väitteitä ja oletuksia. Emme niinkään pyri aina esittämään matemaattisesti tarkkoja todistuksia vaan valottamaan asiaa esimerkkien ja todistusluonnosten avulla.

2. Klassinen analyysin peruslause

Analyysin peruslauseessa on kaksi osaa.

Ensimmäisen osan klassinen muotoilu. Ensimmäinen osa kertoo sen, että jos f on jatkuva funktio välillä $[a, b]$ ja

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \qquad a \le x \le b, \tag{1}$$

niin F on derivoituva välillä $[a, b]$ ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$. Päätepisteissä täytyy ottaa toispuoleiset derivaatat. Tämän mukaan jokaisella jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio eli jokainen jatkuva funktio on jonkin funktion derivaatta. Integraalifunktiolle saadaan jopa esitys määratyn integraalin avulla eli laskemalla tietyn alueen pinta-ala kaavalla (1). Lause ei kuitenkaan kerro mitään siitä, voidaanko integraalifunktio esittää alkeisfunktioitten avulla eli kuinka integraalifunktio todella lasketaan. Esimerkiksi funktion

$$f(t) = (1 + t^2)^{1/3}, \qquad -1 \le t \le 1. \tag{2}$$

eräs integraalifunktio on

$$F(x) = \int_{-1}^x (1 + t^2)^{1/3}\, dt, \qquad -1 \le x \le 1,$$

mutta on mahdotonta esittää yllä olevaa integraalia alkeisfunktioitten avulla. Tämä esimerkki näyttää sen, että derivointi on yleensä helpompaa kuin integrointi. Kaavalla (2) määritelty funktio on helppo derivoida soveltamalla tunnettuja derivointisääntöjä, mutta ei ole olemassa mitään yleistä keinoa sen integraalifunktion esittämiseksi alkeisfunktioitten avulla.

Toisen osan klassinen muotoilu. Lauseen toisen osan mukaan tietyillä oletuksilla funktio saadaan takaisin integroimalla derivaatastaan. Tarkemmin sanottuna, jos F on jatkuvasti derivoituva funktio välillä $[a, b]$ ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Tämä antaa keinon funktion määrätyn integraalin eli funktion kuvaajan rajoittaman pinta-alan laskemiseksi integraalifunktion avulla.

3. Moderni analyysin peruslause

Pohditaan seuraavaksi hieman analyysin peruslauseen oletuksia. Katsotaan aluksi paria esimerkkiä.

Olkoon tarkasteluväli $[-1,1]$ ja määritellään

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t < 0, \\ 1, & 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Tämä funktio ei ole jatkuva, mutta analyysin peruslauseen ensimmäinen osa pätee, jos unohdamme epäjatkuvuuskohdan nollassa. Kaavalla (1) määritelty funktio on tässä tapauksessa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

ja nollan ulkopuolella se on derivoituva ja sen derivaatta on f.

Tarkastellaan sitten analyysin peruslauseen toista osaa saman esimerkin valossa. Nyt F on jatkuvasti derivoituva nollan ulkopuolella ja $F'(x) = f(x)$ kun $x \neq 0$. Lisäksi kaava (1) pätee. Esimerkkimme viittaa siihen, että ainakaan oletus funktion f jatkuvuudesta ei näytä kovinkaan tärkeältä, jos analyysin peruslauseen väitteitä hieman muokataan.

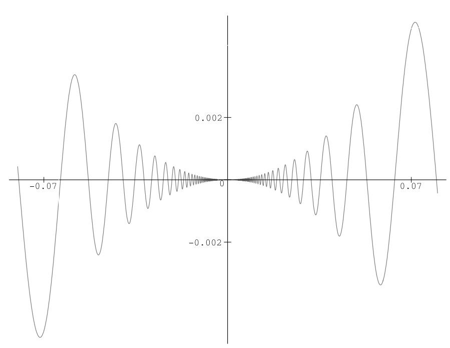
Ensimmäisessä esimerkissämme "derivaattafunktio" f on epäjatkuva, mutta funktio F ei ollutkaan derivoituva nollassa. Samanlainen ilmiö voi kuitenkin tapahtua vaikka funktio on derivoituva kaikkialla. Siis se, että funktio on derivoituva kaikkialla, ei takaa derivaatan jatkuvuutta. Tämän näemme tutkimalla funktiota

$$F(t) = \begin{cases} t^2 \sin \dfrac{1}{t^2}, & -1 \le t < 0,\ 0 < t \le 1, \\ 0, & t = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Tämä funktio käyttäytyy kaukana nollasta hyvin, mutta nollan lähellä se heilahtelee melko pahasti. Kerroin t^2 pitää kuitenkin huolen siitä, että funktion arvot lähestyvät nollaa riittävän nopeasti. Kun $t \neq 0$, niin F on derivoituva ja suoralla laskulla havaitsemme, että

$$F'(t) = 2t \sin \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \cos \frac{1}{t^2}.$$

Tällä ei ole raja-arvoa pisteessä 0.



Kuva 2: Function $F(t)$ kuvaaja lähellä origoa.

Tapaus $t = 0$ vaatii erikoistarkastelun. Kirjoittamalla auki erotusosamäärään näemme, että

$$\frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = t \sin \frac{1}{t^2}, \qquad t > 0.$$

Ottamalla puolittain itseisarvot saamme arvion

$$\left| \frac{F(t)}{t} \right| \leq |t|,$$

ja tästä seuraa, että

$$F'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = 0.$$

Siis F on derivoituva kaikkialla, mutta derivaattafunktio ei ole jatkuva.

Lebesguen integraali. Ymmärtääksemme analyysin peruslauseen yleisen muotoilun tarvitsemme tavallista määrättyä integraalia yleisemmän *Lebesguen integraalin*, jonka avulla voimme laskea hyvin epäsäännöllisten funktioitten integraaleja. Lebesguen integraalin määritelmä on hieman monimutkainen ja jatkossa kannattaakin ajatella kaikkia integraaleja tavallisina määrättyinä integraaleina eli funktion kuvaajan rajoittamina pinta-aloina.

Yksi keskeinen käsite Lebesguen integrointiteoriassa on *nollamittainen joukko*. Sillä tarkoitetaan niin pientä joukkoa, ettei se vaikuta funktion integraalin arvoon. Intuitiivisesti on selvää, ettei funktion arvon muuttaminen yhdessä pisteessä vaikuta funktion kuvaajan rajoittamaan pinta-alaan ja siten integraalin arvoon. Tarkemmin sanottuna reaalilukujoukko E on nollamittainen, mikäli se voidaan peittää väleillä $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, ...$, siten, että niiden pituuksien summa on mielivaltaisen pieni. Sanomme, että ominaisuus pätee *melkein kaikkialla*, mikäli se pätee nollamittaisen joukon ulkopuolella.

Nollamittaisen joukon käsitteen oppii parhaiten tutkimalla esimerkkejä. Todistetaan seuraavaksi, että rationaalilukujen joukko $Q = \{q_i \; i = 1, 2, \dots\}$ on nollamittainen. Tämä nähdään siten, että aluksi kiinnitetään pieni luku $\varepsilon > 0$. Näytämme, että rationaalilukujen joukko Q voidaan peittää väleillä, joiden pituuksien summa on korkeintaan ennalta annettu ε. Otetaan jokaiselle rationaaliluvulle q_i, $i = 1, 2, \dots$, väli

$$I_i = [q_i - 2^{-i-1}\varepsilon, q_i + 2^{-i-1}\varepsilon].$$

Nyt välin I_i pituus on $2^{-i}\varepsilon$ ja välien pituuksien summa on

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \varepsilon.$$

Lopulta ε voidaan valita niin pieneksi kuin haluamme, joten rationaalilukujen joukko on nollamittainen.

Tarkastellaan välillä $[a, b]$ määriteltyä *Lebesguen integroituvaa* funktiota f, jolle pätee

$$\int_a^b |f(t)| \, dt < \infty. \tag{4}$$

Jos (4) pätee, niin sanomme, että f on *integroituva* välillä $[a, b]$. Jotta integraali (4) olisi määritelty, meidän täytyy olettaa, että funktio f on riittävän siisti eli *Lebesguen mitallinen*. Mitallisuus ei ole kovin rajoittava oletus: hyvin karkeasti sanottuna kaikki helpot konstruktiot johtavat mitallisiin funktioihin ja epämitallisen funktion rakentamiseen tarvitaan melko syvällisiä analyysin tietoja. Integroituvuus on ehto funktion koolle. Erityisesti se tarkoittaa sitä, että funktion itseisarvo on keskimäärin niin pieni, että sen ja koordinaattiakselin väliin jäävän alueen pinta-ala on äärellinen. Kaikki rajoitetut positiiviset mitalliset funktiot ovat integroituvia välillä $[0, 1]$, mutta esimerkiksi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ei ole integroituva välillä $[0, 1]$.

Ensimmäisen osan moderni muotoilu. Palataan nyt analyysin peruslauseen ensimmäisen osan yleiseen muotoiluun. Jos f on integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{5}$$

niin F on derivoituva melkein kaikkialla ja $F'(x) = f(x)$ melkein kaikilla x. Tämä siis kertoo sen, että jokainen integroituva funktio on jonkin funktion derivaatta lukuun ottamatta hyvin pientä joukkoa. Annetun funktion derivaattafunktiolla ei siis yleensä ole mitään hyviä ominaisuuksia.

Toisen osan moderni muotoilu. Tarkastellaan sitten peruslauseen toisen osan oletuksia. Jos F on jatkuvasti derivoituva, niin toisesta osasta seuraa, että

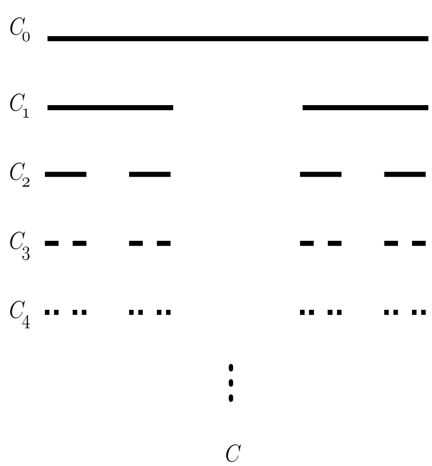
$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt. \tag{6}$$

Tästä seuraa, että funktio F itse on jatkuva. Pitämällä mielessä analyysin peruslauseen ensimmäisen osan yleistyksen voimme nyt kysyä, riittääkö kaavassa (6) derivaatan jatkuvuuden sijaan se, että derivaatta on olemassa melkein kaikkialla? Tässä kysymyksessä on ongelma, joka ei paljastu aivan heti. Esimerkkimme (3) on derivoituva jokaisessa pisteessä, mutta derivaattafunktio heilahtelee niin pahasti, että se ei ole integroituva. Tämä johtaa siihen, että integraali (6) ei välttämättä ole olemassa ilman derivaatan integroituvuusoletusta.

Cantorin konstruktio. Toinen mielenkiintoinen kysymys on se, onko olemassa funktiota, joka on derivoituva melkein kaikkialla ja jonka derivaatta on integroituva, mutta jota ei saada takaisin integroimalla derivaatastaan? Tämä tarkoittaisi sitä, että kaava (6) ei päde. Sellainen funktio voidaan rakentaa *Cantorin joukon* avulla. Cantorin joukko on välin $[0, 1]$ fraktaalinen osajoukko, joka saadaan poistamalla alkuperäisestä välistä äärettömän monta osaväliä. Olkoot

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1], \\
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],
\end{aligned}$$

ja niin edelleen. Siis C_{j+1} saadaan poistamalla jokaisesta C_j:n välistä avoin keskikolmannes, katso alla olevaa kuvaa (Cantorin joukkoa käsitellään myös Aapo Halkon artikkelissa *Joukko-oppia reaaliluvuilla* Solmussa 2/1998–1999 sivuilla 12–15).



Kuva 3: Cantorin joukko.

Kun näin tehdään, niin jokainen C_j, $j = 1, 2, \ldots$, muodostuu 2^j:stä välistä, joiden kunkin pituus on 3^{-j}. Cantorin joukon C muodostavat täsmälleen ne pisteet, jotka kuuluvat kaikkiin joukkoihin C_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Tarkempi silmäys Cantorin joukkoon. Cantorin joukolla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia, joista kaikki eivät suoraan liity tutkimaamme ongelmaan. Cantorin konstruktio on kuitenkin hyvä apuväline rakentaessamme vastaesimerkkejä, joten sen ominaisuuksien miettiminen auttaa hahmottamaan tilanteen paremmin.

Ensimmäinen huomio on se, että Cantorin joukko on nollamittainen. Tämä on helppo todistaa, sillä jokaiselle $j = 0, 1, 2, \ldots$, Cantorin joukko on joukon C_j osajoukko. Koska kukin C_j muodostuu 2^j:stä välistä, joiden pituus on 3^{-j}, niin laskemalla välien pituudet yhteen saamme C_j:n välien pituuksien summaksi $(2/3)^j$. Valitsemalla j:n riittävän suureksi saamme tämän mielivaltaisen pieneksi, joten Cantorin joukko on nollamittainen.

Toisaalta Cantorin joukossa on oleellisesti enemmän pisteitä kun vaikkapa luonnollisia lukuja $1, 2, 3, \ldots$ on olemassa. Karkeasti sanottuna Cantorin joukossa on yhtä monta pistettä kuin koko reaaliakselilla. Nyt tietysti täytyy olla huolellisempi ja kertoa mitä tarkoittaa se, että joukoissa on yhtä monta pistettä, sillä molemmissa joukoissa niitä on äärettömän monta. Matemaattisesti tämä tarkoittaa sitä, että Cantorin joukon ja reaalilukujen välillä on olemassa bijektio. Jokaista Cantorin joukon pistettä vastaa siis yksikäsitteinen piste reaaliakselilla, ja kääntän jokaista reaalilukua vastaa yksikäsitteinen piste Cantorin joukossa, kunhan bijektiivinen kuvaus on kiinnitetty. Jos joukkojen välille löytyy bijektio, niin sen sijaan että sanoisimme että joukoissa on yhtä monta pistettä, sanomme että joukot ovat *yhtä mahtavia*. Toisaalta tiedetään, että ei ole olemassa bijektiota reaalilukujen ja luonnollisten lukujen välillä, joten Cantorin joukko on mahtavampi kuin luonnollisten lukujen joukko.

Cantorin joukon konstruktiota katselemalla näemme, että se on välin $[0, 1]$ fraktaalinen osajoukko. Tämä tarkoittaa sitä, että Cantorin joukon *fraktaalidimensio* on aidosti pienempi kuin yksi. (Fraktaalidimension käsitettä tutkittiin Jouni Parkkosen artikkelissa *Lumihiutaleesta* Solmussa 3/1997–1998 sivuilla 15–17). Jos ajatellaan, että reaaliakseli on yksiulotteinen ja taso on kaksiulotteinen, niin Cantorin joukko on esimerkki tapauksesta, jossa ulottuvuus ei ole kokonaisluku. Cantorin joukko voidaan jakaa vasempaan osaan $C_{\text{vas}} = C \cap [0, 1/3]$ ja oikeaan osaan $C_{\text{oik}} = C \cap [2/3, 1]$. Geometrisesti osat näyttävät samanlaisilta kuin koko Cantorin joukko, paitsi että ne on pienennetty kertoimella 1/3. Tässä mielessä Cantorin joukko on itsesimilaarinen. Lisäksi Cantorin joukko on oikean ja vasemman osan pistevieras yhdiste eli $C = C_{\text{vas}} \cup C_{\text{oik}}$ ja $C_{\text{vas}} \cap C_{\text{oik}} = \emptyset$. Oletetaan nyt, että Cantorin joukossa on olemassa *fraktaalinen mitta*, joka vastaa pituuden mittaamista reaaliakselilla ja merkitään tätä mittaa $\mathcal{H}^s$:llä. Luku $s > 0$ kuvaa fraktaalidimensiota ja esimerkiksi reaaliakselilla se olisi yksi. Nyt

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_{\text{vas}}) + \mathcal{H}^s(C_{\text{oik}}) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C).$$

Toinen yhtälö perustuu fraktaalimitan skaalausominaisuuteen: Jos reaaliakselin väliä pienennetään kertoimella 1/3, niin pituus tietysti täytyy jakaa kolmella. Tämä vastaa edellisessä yhtälössä tapausta $s = 1$. Jos oletamme, että Cantorin joukon fraktaalimitta $\mathcal{H}^s(C)$ on äärellinen, niin voimme jakaa sen pois yhtälöstä ja saamme että

$$1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s.$$

Ratkaisemalla yhtälön saamme Cantorin joukon fraktaalidimensioksi

$$s = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309.$$

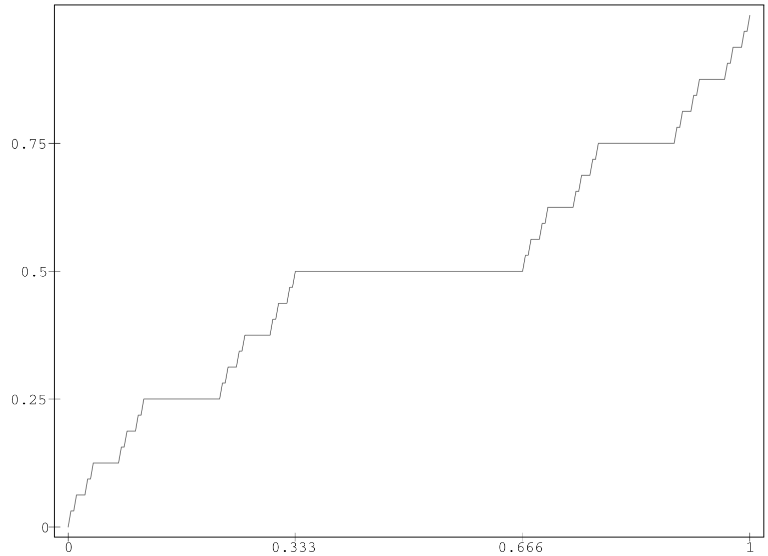
Tämä heuristinen päättely ei riitä matemaattiseksi todistukseksi, mutta se kertoo kuitenkin jotain Cantorin joukon luonteesta.

Lebesguen portaat. Cantorin joukon konstruktion avulla voimme rakentaa *Lebesguen funktion*. Karkeasti ottaen se määritellään siten, että Cantorin joukon konstruktion kussakin vaiheessa ne välit, joita ei oteta mukaan Cantorin joukon rakentamiseen nostetaan ylös, katso alla olevaa kuvaa.

Näin saatu funktio on jatkuva ja se saa kaikki arvot väliltä $[0, 1]$. Toisaalta Lebesguen funktio on vakio kussakin välissä, joten se on derivoituva Cantorin joukon ulkopuolella. Se on siis derivoituva melkein kaikkialla välillä [0,1] ja sen derivaatta on nolla melkein kaikkialla. Nyt siis

$$F(1) - F(0) = 1 \neq 0 = \int_0^1 F'(t)\, dt,$$

joten analyysin peruslauseen toinen osa ei voi päteä Lebesguen funktiolle: sitä ei saada takaisin integroimalla derivaatastaan.



Kuva 4: Lebesguen portaat.

Lopullinen totuus. On siis olemassa jatkuvia funktioita, joita ei saada takaisin integroimalla derivaatastaan eli joille kaava (6) ei ole voimassa. Kaava (6) on osoittautunut niin hyödylliseksi työkaluksi matemaattisessa analyysissä, että sen avulla määritellään kokonainen funktioluokka.

Olkoon F välillä $[a, b]$ määrilty funktio. Sanomme, että F on *absoluuttisesti jatkuva*, jos on olemassa integroituva funktion f siten, että

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Jos yllä oleva esitys on voimassa, niin $F'(x) = f(x)$ melkein kaikilla $x \in [a, b]$. Absoluuttisesti jatkuvien funktioitten merkitys analyysissä perustuu siihen, että niillä on monia derivoituvien funktioitten hyviä ominaisuuksia, vaikka ne ovatkin derivoituvia vain melkein kaikkialla.

Erityisesti absoluuttisesti jatkuva funktio on jatkuva tavallisessa mielessä, mutta Lebesguen funktio osoittaa, että käänteinen väite ei päde: jokainen jatkuva funktio ei ole absoluuttisesti jatkuva.

Absoluuttinen jatkuvuus liittyy läheisesti siihen, miten funktio F kuvaa nollamittaiset joukot. Lebesguen funktio kuvaa nollamittaisen Cantorin joukon C siten, että $[0, 1] \setminus f(C)$ on nollamittainen. Siis nollamittaisen joukon kuva täyttää melkein koko maalijoukon. Tämä ei ole mahdollista absoluuttisesti jatkuvalle funktiolle. Seuraava lause antaa yhden karakterisaation absoluuttiselle jatkuvuudelle.

Olkoon $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Silloin F on absoluuttisesti jatkuva jos ja vain jos seuraavat neljä ehtoa ovat voimassa:

(1) F on jatkuva,

(2) F on derivoituva melkein kaikkialla,

(3) F' on integroituva ja

(4) F kuvaa nollamittaiset joukot nollamittaisiksi.

Valitettavasti tässä ei ole mahdollista todistaa edellä olleita tuloksia, mutta asiasta kiinnostuneet voivat perehtyä todistuksiin vaikka Rudinin kirjasta *Real and Complex Analysis*.

Juha Kinnunen
Helsingin yliopisto

Matkakertomus Baltian tie -matematiikkakilpailusta

Ensilumi oli vasta satanut maahan, ja päivän mittaan tuprutteli lisää, kun Suomen uljas *Baltian tie* -matematiikkakisajoukkue valmistautui Puolanmatkalle täynnä rohkeutta ja intomieltä taistella isänmaan puolesta. Joukkueen kokoonpanoon kuuluivat Mikko Harju, Tuomas Hytönen, Mikko Leppänen, Hannu Niemistö ja Vesa Riihimäki. Myös visaisiin kombinatoriikan ja geometrian tehtäviin valmistautuneelle ryhmälle ei tuottanut vaikeuksia osoittaa, että Suomesta valittavan viisihenkisen edustusjoukkueen asumuksista kolmen ympäri voitaisiin konstruoida pallo, jonka säde olisi viisi metriä. Tämän ehkä yllättävän teoreeman paikkansapitävyys oli helposti perusteltavissa yleisesti tunnetulla olemassaololauseella, joka koski Päivölän kansanopistoa, matematiikkavalmennuksen keskusta. Sen vakituiseen asujaimistoon kuuluivat nämä kolme, Tuomas, Mikko L. ja Vesa, ja siellä oli suoritettu kisajoukkueen valinta vajaa kuukausi aikaisemmin.

Kolmikko lähti lumiselta pihalta yhä tihenevässä tuiskussa matkaan autolla, jota ohjasi matemaattisten projektien legendaarinen voimahahmo Kullervo Nieminen, joka myös osallistuisi kisamatkalle tarkkailijana. Seutulan lentokentällä saatiin kasaan loput joukkueesta, Mikko H. ja Hannu sekä joukkueen johtaja Kerkko Luosto ja varajohtaja Jari Lappalainen. Lennot olivat lumipyryn ansiosta myöhässä, joten joukkue sai viettää odotettua pidemmän ajan lentokentän jännittävässä kansainvälisessä ilmapiirissä.

Ennen pitkää noustiin kuitenkin ilmaan, ja miellyttävän lentomatkan jälkeen päästiin lumisateisesta Helsingistä sateiseen Varsovaan, jonka lentokentällä kaksihenkinen vastaanottokomitea oli koko illan valmistellut saapumista. Toinen näistä oli joukkueen viehättävä opas Patrycja Pieńkos, joka lähti johdattamaan pitkän matkan uuvuttamia sankareita Harcturhotellille, joka toimisi heidän tukikohtanaan seuraavan viikonlopun. Perillä odotti ravitseva slaavilainen iltapala, jonka energiasisältö ei varmasti jättänyt ketään kylmäksi. Muu joukkue sai yhteisen huoneen, kun taas Vesa lähetettiin vakoojaksi ruotsalaisten ja tanskalaisten keskuuteen. Myös joukkueen johto oli ystävällisesti huomioitu helposti muistettavalla huoneella, jonka numero vastasi luvun 100π lähintä kokonaislukulikiarvoa. Kaikki saivat lisäksi sponsoreiden kassit ja t-paidat sekä kisan omat paidat ja muuta asiaan kuuluvaa krääsää.

Lauantaiaamun aurinko lupasi kaunista ilmaa seuraavaksi päiväksi, jolloin joukkueella oli ohjelmassa retki etelässä sijaitsevaan Krakovan kaupunkiin. Sen kerrottiin olevan Puolan muinaisen kuningaskunnan pääkaupunki. Joukkueen johdon kanssa oli jo aiemmin sovittu, että johtajat tekisivät työtä lauantaina kilpailutehtävien valinnan ja sunnuntai-iltapäivänä niiden tarkastamisen muodossa ja kilpailijat sunnuntaiaamuna kisatehtävien merkeissä. Diili oli vaikuttanut kaikin puolin reilulta, joten kilpailijat saattoivat hyvällä omallatunnolla viettää päivän kulttuurihistoriallisten elämysten parissa. Näihin kuului useita kauniita katedraaleja, kuninkaanlinna, katettu kauppakatu ja tultasyöksevä lohikäärme. Poutainen syyssää oli myös suosiollinen.

Sitten koitti suuri päivä, jona kansakunnan toivojen oli määrä pyrkiä palauttamaan isänmaan kunnia kesäisten Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten laihan tuloksen jälkeen. Kisapaikalle yliopiston matematiikan laitokselle kuljettaessa lausahti vierellä kulkevan Ruotsin joukkueen jäsen toiselle rohkaisun sanoja hyvällä englannin kielellä: ”What could possibly go wrong!” Suomenkin uljaat matemaatikot yrittivät omaksua toiveikasta asennetta, vaikka äkkiseltään mieleen nousikin useita vastauksia äskeiseen kysymykseen. Kaksikymmentä ongelmaa käsittävä kisatehtäväsarja ratkottaisiin ryhmätyönä, ja joukkueelle tarjoutui vielä tilaisuus lyhyen, mutta ytimekkään strategiapalaverin pitoon, ennen kuin koitos alkaisi. Kullekin joukkueelle osoitettiin oma luokkahuoneensa ongelmien ratkaisua varten, ja ryhmä kävi työajan alettua ahneesti tehtävien kimppuun.

Neljän ja puolen tunnin uurastuksen jälkeen kaikki oli kilpailijoiden osalta ohi. Siitä eteenpäin Suomen menestys olisi korkeampien voimien käsissä, käytännössä Kerkon ja Jarin sekä tuomariston. Taivaalle oli jo kerääntynyt pahaenteisiä pilviä, jotka kohta laskivat voimistuvan vesisateen kilpailijoiden niskaan. Joku kuuli ruotsalaisten olleen ratkaisuihinsa tyytyväisiä. Mallivastauksiin perehdyttyään joukkue lähti kuitenkin tutustumaan Varsovaan ruotsalaisten ja oppaiden kanssa.

Samanhenkinen ohjelma jatkui myös seuraavana päivänä, jolloin tutustumiskohteisiin kuuluivat vanha kaupunki sekä uudempi kuninkaanlinna. Pääkaupungin siirtämisestä oli vastuussa Ruotsin kuningas Sigismund III Wasa, jonka patsas katseli pylväännokasta vanhan kaupungin elämää. Mikot olivat jo edellisenä iltana tutustuneet saksalaisten seurassa puolalaiseen elokuvateatteriin Truman Show’n merkeissä. Loppujoukkue paransi jo ennestään lämpimiä suhteita rakkaimpaan kilpakumppaniin Ruotsiin yhteisellä vierailulla Varsovan keskikaupunkia majesteettisena hallitsevaan neuvostokansan lahjoittamaan Kulttuuripalatsiin, jonka yläterasseilta avautui näköala yli öisen suurkaupungin.

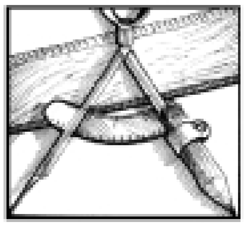
Illalla oli sitten vuorossa tulostenjulkistamisgaala juhlaillallisineen. Läsnä olivat kaikkien yhdentoista Itämerta ympäröivän osanottajamaan ja -alueen joukkueet. Voiton vei Latvia, jota hyvänä kakkosena seurasi Viro. Kolmannen sijan kaappasi kotijoukkue Puola. Valitettavasti numerosijojen palkitseminen päättyi siihen, eikä maailma saanut vielä julkisesti kuulla Suomen uljaasta neljännestä sijasta. Joukkueen johto oli jo tuloksen paljastanut, aluksi Jarin arvoituksellisin sanoin: ”Ikinä ennen ei olla voitettu Ruotsia – tänä vuonna me ollaan aika tyytyväisiä. Aina ennen me ollaan oltu kuudensia, paitsi viime vuonna seitsemänsiä – tänä vuonna me ollaan aika tyytyväisiä. Me ollaan saatu näistä kisoista semmosta 63–65 pistettä – tänä vuonna me ollaan aika tyytyväisiä. Monet muutkin on yleensä saaneet sitä luokkaa – tänä vuonna ne ei ole niin tyytyväisiä.” Suomi oli siis saavuttanut neljännen, kaikkien aikojen parhaan sijansa kokonaispistemäärällä 67/100, vain pisteen verran pronssista ja viisi kullasta jäljessä. Ruotsi oli kuudennella sijallaan toistakymmentä pistettä perässä. Rakas vihollinen oli sinä päivänä entistä rakkaampi.

Ainoa harmin aihe oli se, ettei Suomen tulosta huomioitu mitenkään, vaan palkinnot lahjoittanut Texas Instruments oli jo jakanut kaikki liikenevät laskimet. Sivupöydällä oli iso kasa banaaneja. Olisivat ne voineet edes sellaiset jakaa, kunhan vain olisivat kutsuneet Suomen uljaan joukkueen yleisön eteen. ”Sitten kutsumme paikalle Chiquitan edustajan jakamaan seuraavat palkinnot. – Mathematics is also important in banana production...” Se vasta olisi ollut jotakin.

Seuraavana päivänä päästiin vielä kerran matkustamaan Varsovaan jo tutuiksi tulleilla ruuhkabusseilla. Sankarit luulivat retken tulleen jo hoidetuksi kotiin, kun lipuntarkastaja yllätti porukan rysän päältä. Olihan kaikilla tietenkin järjestäjien antamat bussiliput – mutta runsaasta retkeilyhenkisestä matkavarustuksesta tulikin tarkastajan mukaan lisämaksu. Siitä selviydyttyä ei enää mikään estänyt joukkueen kotiinpaluuta. Patrycjan hyvästelemistä oli jo etukäteen harjoiteltu opettelemalla lausumaan puolaksi ”Do widzenia!”.

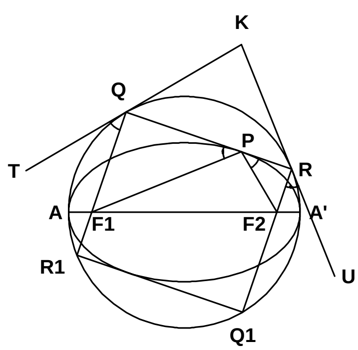
Sinivalkoiset siivet lennättivät kisajoukkueen takaisin kotimaan kamaralle. Helsingissä satoi edelleen lunta, ja kapteeni ilmoitti koneen ensin laskeutuvan kiertoradalle odottelemaan ruuhkan selkiytymistä alailmakehässä. Punainen matto oli ilmeisesti pesussa, koska sitä ei oltu levitetty, mutta menestyksekäs kisamatka oli, yhtä kaikki, päättynyt onnellisesti.

Tuomas Hytönen
<tuomasph@hotmail.com>



Geometriakulma: Ellipsin ominaisuuksia puhtaan geometrisesti

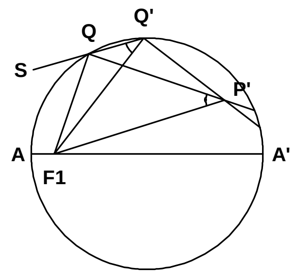
Edellisessä geometriakulmassa esittelin tangenttien käyttöön perustuvan menetelmän ellipsin piirtämiseen: Lähtökohtana on ellipsin ympäri piirretty ympyrä (säteenä siis ison akselin puolikas a) ja ellipsin polttopisteet F_1 ja F_2. Polttopisteiden kautta asetetaan samansuuntaiset säteet, jotka leikkaavat ympyrän pisteissä Q ja R. Suora QR on ellipsin tangentti. Piirtämällä tällä tavoin riittävän monta tangenttia, saadaan ellipsi hahmotelluksi tangenttien *verhokäyränä*.



Menetelmän pätevyyden voi todistaa analyyttisen geometrian keinoin, ts. algebrallisesti laskemalla. Sen voi myös todistaa puhtaan geometrisesti, kuten seuraava osoittaa.

Jatketaan janoja F_1Q ja F_2R, jolloin syntyy nelikulmio QRQ_1R_1. Symmetriasta seuraa, että tämä on suorakulmio ja QQ_1 on ympyrän halkaisija.

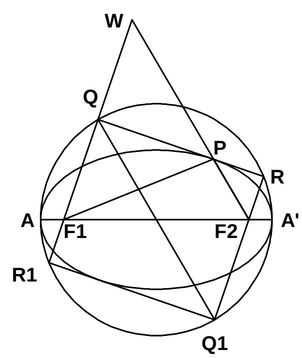
Asetetaan polttopisteen F_1 kautta kaksi sädettä F_1Q ja F_1Q' sekä piirretään näitä vastaavat tangentit. Nämä leikatkoot pisteessä P'. Koska kulmat F_1QP' ja $F_1Q'P'$ ovat edellä olevan mukaan suoria, ovat pisteet Q ja Q' ympyräviivalla, jonka halkaisijana on jana F_1P'. Tällöin kulmat $F_1P'Q$ ja $F_1Q'Q$ ovat yhtä suuria samaa kaarta vastaavina kehäkulmina.



Jos piste Q' lähestyy pistettä Q, yhtyvät tangentit ja niiden leikkauspisteestä P' tulee verhokäyrän (ellipsin) piste P. Sekantista SQ' tulee ympäri piirretyn ympyrän tangentti QT; kulmista $F_1P'Q$ ja $F_1Q'Q$ tulee yhtä suuret kulmat F_1PQ ja F_1QT. Tangentilla QR oleva sivuamispiste määräytyy siis siitä ehdosta, että kulmien F_1PQ ja F_1QT tulee olla yhtä suuret.

Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että kulmat F_2PR ja F_2RU ovat yhtä suuret. Kaikki neljä kulmaa ovat keskenään yhtä suuret, sillä tangenttikulman QKR symmetrisyyden takia ovat kulmat KQR ja KRQ yhtä suuret, jolloin myös F_1QT ja F_2RU ovat yhtä suuret.

Määritetään piste W janan F_1Q jatkeelta siten, että janat F_1Q ja QW ovat yhtä pitkät. Em. kulmien yhtäsuuruudesta seuraa, että pisteet W, P ja F_2 ovat samalla suoralla. Koska janat QW ja F_2Q_1 ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät, on nelikulmio QWF_2Q_1 suunnikas.



Kolmioiden QF_1P ja QWP yhtenevyyden takia ovat janat F_1P ja WP yhtä pitkät, jolloin janojen pituuksille on

$$|F_1P| + |F_2P| = |WP| + |F_2P| = |WF_2| = |QQ_1| = 2a.$$

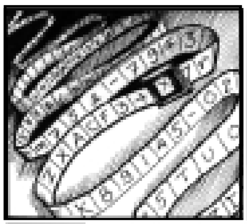
Päättely on voimassa riippumatta siitä, miten säteen F_1Q suunta on alunperin valittu, jolloin on tullut osoitetuksi, että tangenteilla olevat sivuamispisteet P ovat ellipsillä.

Sivutuotteena on tullut todistetuksi (miten?) ellipsin heijastusominaisuus: Polttopisteestä lähtevä ellipsin kehästä heijastuva säde osuu toiseen polttopisteeseen.

Lukija kiinnittäköön huomiota tangentin käsittelyyn edellä olevassa todistuksessa. Ympyrän tapauksessa tangentin sivuamispiste on yksinkertaisesti tangenttia vastaan kohtisuoran säteen päätepiste. Ellipsillä ei vastaavaa yksinkertaista ominaisuutta ole. Tangentin sivuamispiste löytyykin rajaprosessilla pisteen Q' lähestyessä pistettä Q.

Lähde: E. H. Lockwood, A book of curves, Cambridge University Press, 1961.

Simo K. Kivelä



Teoria laskettavuudesta

1. Johdanto

Teoria laskettavuudesta on 1900-luvun luultavasti voimakkaimmin kasvanut matemaattisen tutkimuksen alue. Laajasti ymmärrettynä laskettavuuden teorian voidaan katsoa sisältävän sellaiset tutkimusalat kuten *automaattien teoria*, *formaalisten kielten teoria* ja *kompleksisuusteoria*, joita yhdistää perustavaa laatua oleva tekijä: mainittujen alojen tutkimusongelmat ovat lähtöisin tietokoneisiin liityvistä kysymyksistä.

Laskenta[2] on itse asiassa aina fysikaalinen prosessi, suoritettiin se sitten helmitaululla tai tietokoneella. Tämän näkemyksen mukaan laskettavuutta tutkittaessa on aina otettava huomioon fysiikan asettamat rajoitukset ja toisaalta sen suomat mahdollisuudet, mutta nykyinen teoria laskettavuudesta perustuu vain klassisen fysiikan mukaiseen maailmankuvaan. Fyysikot Paul Benioff ja Richard Feynman huomauttivat 1980-luvun alussa, että laskettavuuden teoriaa tulisi kehittää myös ottamalla lähtökohdaksi kvanttifysiikan mukainen käsitys maailmasta. Feynman esitti ja perusteli otaksuman, jonka mukaan kvanttimekaaninen tietokone, *kvanttitietokone*[3] voisi toimia *eksponentiaalisesti nopeammin* kuin mikään nykyinen tietokone.

Kvanttifysiikan käsityksiin perustuva teoria laskettavuudesta, *kvanttilaskenta*[4], pysyi kuitenkin melko vähäpätöisenä tutkimusalana aina vuoteen 1994 asti, jolloin AT&T Bell-laboratoriossa tutkijana työskentelevä Peter W. Shor ensimmäisenä keksi miten varsin luonnollinen matemaattinen tehtävä, luvun jakaminen tekijöihin, voidaan suorittaa kvanttitietokoneella tehokkaasti. Toisaalta taas tehokasta klassiseen laskentaan perustuvaa menetelmää luvun jakamiseksi tekijöihin ei ole löydetty, vaikka kyseinen ongelma on tunnettu jo ainakin kaksi vuosituhatta!

2. Peruskäsitteitä

Algoritmilla tarkoitetaan sääntökokoelmaa, jota noudattaen voidaan ratkaista jokin ongelma tai suorittaa annettu tehtävä. Tyypillinen esimerkki algoritmista on tietokoneohjelma, joka ohjaa koneen toimintaa käyttäjän haluamalla tavalla. Algoritmien matemaattista käsittelyä varten määritelmä "sääntökokoelma" on kuitenkin aivan liian epätäsmällinen. Matemaattisesti täsmälliset määritelmät voidaan esittää *automaattien* ja *formaalisten kielten* avulla.

[2] Computation
[3] Quantum computer
[4] Quantum computation

Käsitteenä formaalinen kieli on varsin yksinkertainen: tavallisimman määritelmän mukaan formaalisella kielellä tarkoitetaan mitä tahansa äärellisten symbolijonojen joukkoa. Yleensä vaaditaan, että jonoissa, joita kutsutaan myös *sanoiksi*, esiintyvien symbolien määrä on rajoitettu. Toisin sanoen vaaditaan, että symbolien joukko, *aakkosto*, on äärellinen. Aakkoston $\{0, 1\}$ (ns. *binääriaakkosto*) formaalisia kieliä ovat näin ollen esimerkiksi tyhjä joukko $\emptyset$, joukko $\{11, 00101, 111010\}$, sekä vaikkapa *alkulukujen* joukko

$$\{10, 11, 101, 111, 1011, 1101, 10001, \ldots\}.$$

Viimeksi mainittu joukko muodostuu siis alkulukujen[5] binääriesityksistä. Yllä olevassa esimerkissä binäärijonot esittävät lukuja 2, 3, 5, 7, 11, 13 ja 17. Viimeisin joukko on esimerkki *äärettömästä* formaalisesta kielestä, kaksi ensimmäistä ovat *äärellisiä* kieliä.

äärellinen formaalinen kieli voidaan ainakin periaatteessa määritellä luettelemalla siihen kuuluvat sanat, mutta äärettömän kielen määritteleminen on mutkikkaampaa. Tavallisimmat tavat äärettömän kielen määrittelemiseen ovat *kielioppi*[6] ja *tunnistava automaatti*[7]. Kielioppi koostuu säännöistä, joiden avulla kieleen kuuluvat sanat muodostetaan, kun taas tunnistava automaatti kertoo, kuuluuko jokin yksittäinen sana kieleen. Kielen monimutkaisuutta kuvaa hyvin luonnollisella tavalla se, kuinka monimutkainen automaatti vaaditaan tunnistamaan kyseinen kieli tai kuinka monimutkainen kielioppi on tarpeen kielen tuottamiseksi. Amerikkalainen kielitieteilijä, professori Noam Chomsky onkin luonut *Chomskyn hierarkiana* tunnetun järjestelmän formaalisten kielten luokittelemiseen. Sen tärkeimmät luokat ovat **säännölliset kielet**[8], jotka voidaan tunnistaa *äärellisillä automaateilla*, **kontekstivapaat kielet**[9] (tunnistamiseen riittää *pinoautomaatti*), **kontekstista riippuvat kielet**[10] (voidaan tunnistaa *lineaarisesti rajoitetulla automaatilla*) sekä **rekursiivisesti numeroituvat kielet**[11] (voidaan tunnistaa *Turingin koneella*).

Kielillä, kieliopeilla ja automaateilla on hyvin läheinen yhteys; usein puhutaankin *automaattien ja formaalisten kielten teoriasta*. Toisaalta taas nimet "kontekstivapaat kielet"ja "kontekstista riippuvat kielet"juontavat juurensa kieliopeista. Edellä mainitut luokat voitaisiin määritellä myös seuraavasti: säännöllinen kieli on nk. *oikealta lineaarisen kieliopin* tuottama, kontekstivapaat ja kontekstista riippuvat kielet ovat *kontekstivapaan* ja *kontekstista riippuvan* kieliopin generoimia ja rekursiivisesti numeroituvat kielet tuottaa *rajoittamaton kielioppi*.

Aiempi esimerkki binäärisestä kielestä, joka sisältää alkuluvut, valaisee yhteyttä formaalisten kielten ja *päätäntäongelmien*[12] välillä: ongelman "onko luku alkuluku?"ratkaiseminen on täsmälleen sama asia kuin selvittää, kuuluuko luvun binääriesitys alkulukujen joukkoon. Melko helposti voidaan perustella, että algoritmisen päätäntäongelman ratkaiseminen on sama asia kuin formaalisen kielen tunnistaminen. *Automaattien ja formaalisten kielten teoria, kuten myös myöhemmin esiteltävä kompleksisuusteoria antaa siten mahdollisuuden luokitella päätäntäongelmia niiden vaikeusasteen mukaan.*

3. Esimerkkejä

äärellinen automaatti voidaan esittää *suunnattuna graafina* (5). Kuvan automaatissa on viisi *tilaa*, joita on merkitty kirjaimilla a, b, c, d ja e. Tila a, johon saapuu lyhyt nuoli, on nimeltään *alkutila* ja tila c, josta lähtee lyhyt nuoli, on *lopputila*. Automaatti käsittelee esimerkiksi binäärijonon 1010111 seuraavasti: aloitetaan alkutilasta a, ja koska annetun jonon ensimmäinen symboli on 1, siirrytään nuolen mukaisesti tilaan b. Seuraava symboli on 0, joten jälleen nuolta seuraten saavutaan tilaan c. Näin jatkamalla käydään vielä tiloissa e, e, c, e ja c, jolloin jonon viimeinenkin symboli on luettu. Vastaavalla tavalla jonon 1011010 ollessa syötteenä käydään läpi tilat a, b, c, e, c, c, e ja e. Automaatin toiminta tulkitaan seuraavasti: Syöte 1010111 johti lopputilaan c, joten tämä sana kuuluu automaatin hyväksymään kieleen mutta syöte 1011010 johti tilaan e, joka ei ole lopputila, joten kyseinen sana ei kuulu automaatin hyväksymään kieleen. Verrattain helposti nähdään, että

[5] alkuluku on ykköstä suurempi luonnollinen luku, joka on jaollinen vain itsellään, vastaluvullaan sekä luvuilla 1 ja -1.

[6] Grammar

[7] Recognizing automaton

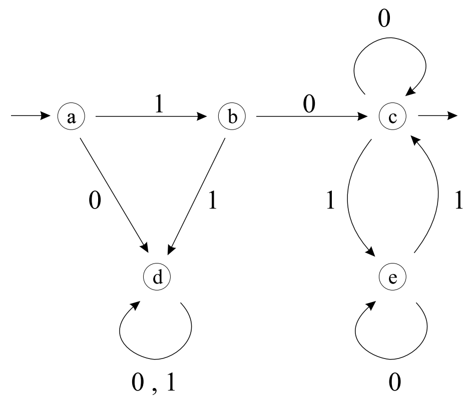
[8] Regular languages

[9] Context-free languages

[10] Context-sensitive languages

[11] Recursively enumerable languages

[12] Decision problem. Päätäntäongelman vastaus on joko kyllä tai ei.

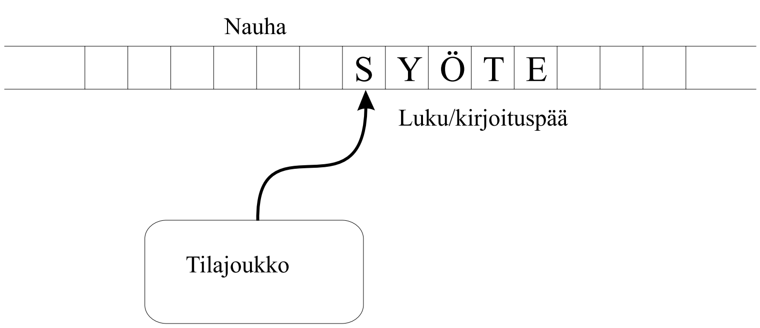


Kuva 5: Äärellinen automaatti

tämän automaatin hyväksymä kieli koostuu niistä sanoista, joiden alkuosa on 10 ja loppuosa sisältää parillisen määrän ykkösiä.

Kieliopit esitetään *uudelleenkirjoitussääntöjen* äärellisenä joukkona. Esimerkiksi joukko $\{S \implies 1S0, S \implies \lambda\}$ esittää aakkoston $\{0, 1\}$ kielioppia. Symbolia S kutsutaan *aksioomaksi* ja merkintä λ tarkoittaa *tyhjää sanaa*, jossa ei ole yhtään kirjainta. Täten sääntö $S \implies \lambda$ tulkitaan yksinkertaisesti siten, että symboli S pyyhitään pois ja sääntö $S \implies 1S0$ siten, että symbolin S paikalle kirjoitetaan $1S0$. Kielen sanat muodostetaan soveltamalla aksioomaan ja jo johdettuihin sanoihin uudelleenkirjoitussääntöjä. Muodostuvaan kieleen kuuluvat tämänkaltaisella johtamisella saadut sanat, joissa esiintyy vain varsinaisen aakkoston symboleja (uudelleenkirjoitussäännöissä esiintyy myös aakkostoon kuulumattomia merkkejä). Esimerkkinä olevan kieliopin johdannaisina saadaan mm. $S \implies 1S0 \implies 11S00 \implies 1100$ sekä $S \implies 1S0 \implies 11S00 \implies 111S000$. Johdetuista sanoista 1100 kuuluu kieleen mutta $111S000$ ei, sillä siinä esiintyy varsinaiseen aakkostoon kuulumaton symboli S. Mikäli tähän sovelletaan vielä sääntöä $S \implies \lambda$, saadaan kieleen kuuluva sana 111000. On helppo todeta, että tämän kieliopin avulla saadaan tarkalleen kaikki sellaiset binäärijonot, joiden alkuosa on jono ykkösiä ja loppuosa jono nollia (sama määrä kuin ykkösiä). Kyseinen kielioppi on esimerkki kontekstivapaasta kieliopista ja voidaan myös todistaa, että mikään äärellinen automaatti ei pysty tunnistamaan tätä kieltä, vaan sen tunnistamiseen tarvitaan pinoautomaatti.

Monipuolisempi esimerkki automaatista on *Turingin kone*[13]. Turingin koneeseen kuuluu *äärellinen tilajoukko*, *luku/kirjoituspää*, sekä molempiin suuntiin ääretön, yhden kirjaimen yksiköistä (soluista) koostuva *nauha* (kuva 2). Nauhan kukin solu voi sisältää yhden aakkoston kirjaimen tai olla tyhjä. Turingin koneen toimin-



Kuva 6: Turingin kone

nan määrää äärellinen joukko *siirtosääntöjä*. Siirtosääntö voi riippua vain kahdesta asiasta: symbolista, johon luku/kirjoituspää osoittaa, ja tilasta, jossa kone on. Lisäksi kukin siirtosääntö määrää kolme asiaa: symbolin, joka kirjoitetaan paikkaan, jossa luku/kirjoituspää on, tilan, johon kone siirtyy, sekä suunnan, johon luku/kirjoituspää siirtyy (luku/kirjoituspää voi siirtyä viereiseen soluun tai pysyä paikallaan). Turingin koneen tilajoukossa on erikseen määrätty alkutila sekä *hyväksyvä* ja *hylkäävä* lopputila. Ennen laskentaa nauhalle kir-

[13] Alan M. Turing (1912–1954) oli englantilainen matematiikko, joka tutki laskettavuutta ja tekoälyyn liittyviä kysymyksiä. Hän suunnitteli toisen maailmansodan aikana ensimmäisen elektronisen tietokoneen, Kolossuksen.

joitetaan syötesana ja koneen luku/kirjoituspää asetetaan osoittamaan syötteen ensimmäistä kirjainta. Tämän jälkeen kone toimii siirtosääntöjen mukaisesti, kunnes jokin lopputila saavutetaan ja laskenta pysähtyy.

Toisin kuin äärellinen automaatti, Turingin kone voi lukea uudelleen ja muuttaa syötettään. Saattaa olla, että lopputilaa ei saavuteta lainkaan vaan kone jatkaa toimintaansa pysähtymättä.

4. Ratkeamattomuus

Kutakin äärellistä automaattia kohti on helppo suunnitella Turingin kone, joka ”matkii”automaatin toimintaa seuraavalla tavalla: Jos automaatti hyväksyy sanan, niin Turingin kone pysähtyy kyseisen sanan ollessa syötteenä hyväksyvään lopputilaan ja päinvastaisessa tapauksessa hylkäävään lopputilaan. Näin ollen voidaan katsoa, että Turingin koneet ovat ainakin ”yhtä vahvoja laskentalaitteita”kuin äärelliset automaatit. Turingin koneista voidaan sanoa enemmänkin: tähän päivään mennessä ei ole keksitty (äärellisellä tavalla määriteltyä) laskentalaitetta tai algoritmia, jota ei Turingin koneella voida “imitoida”, ja otaksutaan, että sellaista ei ole olemassakaan. Tämä otaksuma tunnetaan nimellä *Churchin–Turingin teesi*.[14] Yleisesti hyväksytyn käsityksen mukaan Turingin kone, joka pysähtyy kaikilla syötteillä, on algoritmi-käsitteen matemattinen vastine.

Tämän jälkeen voidaan kysyä, pystytäänkö kaikki täsmällisesti määritellyt päätäntäongelmat ratkaisemaan Turingin koneella. Tähän kysymykseen vastaus on tiedetty jo laskettavuuden teorian alkuvuosista lähtien: on olemassa hyvin määriteltyjä ongelmia joita ei voida ratkaista Turingin koneella eikä siis myöskään millään tietokoneohjelmalla. Esimerkkinä tällaisesta *algoritmisesti ratkeamattomasta*[15] ongelmasta voidaan mainita *Hilbertin 10. ongelma:*[16]

Kehitä yleinen menetelmä, jolla voidaan aina selvittää onko annetulla usean muuttujan kokonaislukukertoimisella polynomilla sellaista nollakohtaa, jossa kaikki muuttujat ovat kokonaislukuja.

Hilbertin 10. ongelma on täsmällisesti määritelty päätäntäongelma, joka voidaan ilmaista myös seuraavasti: Kehitä algoritmi, jolle annetaan syötteeksi kokonaiskertoiminen polynomi ja joka tulostaa onko polynomilla kokonaista nollakohtaa vai ei. Algoritmin tulisi siis tulostaa ”kyllä”, mikäli syötteenä olisi esimerkiksi polynomi $x^3 - 4y^2$ (nollakohtana esim. $x = 2$, $y = 2$) ja ”ei”, kun syöte on $x^2 - 2$ (ei kokonaista nollakohtaa). Kysymyksen ratkaisi lopullisesti Juri Matijasevitsh vuonna 1970 ”negatiivisella”tavalla. Hänen työnsä oli nimittäin viimeinen tarvittava osa tulokseen, jota oli jo pitkään yritetty todistaa: vaadittua menetelmää ei voi olla olemassa.

5. Kompleksisuus

Edellisessä luvussa mainittu Hilbertin 10. ongelma on kaikkein vaikeimmasta päästä (algoritmisesti ratkeamaton), mutta luvussa 2 esille tullut *alkuluvun tunnistaminen* on ratkeava. Tämän jälkeen voidaan kysyä *kuinka vaikea* ratkeava ongelma alkuluvun tunnistaminen on. Chomskyn hierarkiaan perustuva luokittelu kuuluisi seuraavasti: alkulukujen joukko on kontekstiriippuva mutta ei enää kontekstivapaa kieli.

Kompleksisuusteorian kannalta Chomskyn hierarkia on kuitenkin melko karkea luokittelusysteemi. Kompleksisuusteoriassa algoritmien malliksi valitaan yleensä (probabilistinen)[17] Turingin kone ja ne luokitellaan sen mukaan, kuinka paljon aikaa (aikakompleksisuus) tai tilaa (tilakompleksisuus) niiden ratkaiseminen vie syötteen suuruuteen verrattuna. Tässä yhteydessä on huomautettava, että *laskenta-ajalla* tarkoitetaan laskennan suorittamiseen tarvittavien alkeellisten operaatioiden määrää eikä suinkaan laskennan alkamisen ja päättymisen välistä aikaa. Käsitteet ”syötteen suuruus”, ”alkeellinen operaatio”ja ”tarvittava tila”ovat myös hyvin selkeitä, kun laskennan mallina on Turingin kone: Syötteen suuruudella tarkoitetaan syötesanan pituutta, alkeellisella operaatiolla yhden siirtosäännön suorittamista ja tilalla tarvittavien solujen määrää.

Algoritmi voi kuitenkin käyttää kahdella samansuuruisella syötöllä eri määrän alkeisoperaatioita ja sen käyttämällä ajalla $T(n)$ tarkoitetaankin operaatioiden maksimimäärää, kun syötteen suuruus on n. Kaikkien järkevien

[14] Alonso Church (1903–1995) oli amerikkalainen matemaatikko, joka tutki laskettavuuden teorian perusteita.

[15] undecidable

[16] David Hilbert (1862–1943) oli aikansa johtava matemaatikko. Hän esitti vuonna 1900 Pariisin kansainvälisessä matematiikan kongressissa 23 ongelmaa tulevien sukupolvien ratkaistavaksi. Osa Hilbertin ongelmista on yhä ratkaisematta.

[17] *Probabilistisen* Turingin koneen siirtosäännöt eivät välttämättä määrää yksikäsitteistä toimintaa, vaan mahdollisesti useita eri toimintatapoja, kunkin jollakin kiinteällä todennäköisyydellä.

algoritmien *(aika)kompleksisuusfunktio* $T(n)$ on kasvava ja lisäksi $T(n) \geq n$ (miksi?). Perinteisesti kompleksisuusteoriassa kiinnitetään huomiota vain kompleksisuusfunktion $T(n)$ *suuruusluokkaan:*[18] Sanotaan esim., että algoritmi toimii neliöllisessä ajassa, jos $T(n) \leq 6n^2$. Yleisemmin sanotaan, että algoritmi toimii *polynomiajassa*, jos on olemassa sellainen kiinteä luku k, että $T(n)$ on korkeintaan suuruusluokkaa n^k.[19] Jos näin ei ole, algoritmi on *superpolynomaalinen*. Algoritmi on *eksponenttiaikainen*, jos sen kompleksisuusfunktio on korkeintaan luokkaa 2^{n^k} jollekin kiinteälle luvulle k.

Itse asiassa mitä tahansa riittävän säännöllistä funktiota $T(n)$ kohti määräytyy kompleksisuusluokka, mutta käytännössä tärkeimmät algoritmit ovat ne, jotka toimivat polynomiajassa. Laajalti hyväksytyn näkökannan mukaan algoritmisella ongelmalla on tehokas ratkaisumenetelmä, jos se voidaan ratkaista polynomiajassa toimivalla Turingin koneella, joka antaa oikean vastauksen suurella todennäköisyydellä. Tämä näkemys tunnetaan nimellä *yleistetty Churchin–Turingin teesi*.

Alkuluvun tunnistaminen on laskennallisena ongelmana varsin tunnettu: on löydetty polynomiajassa toimiva algoritmi, joka pystyy suurella todennäköisyydellä ilmoittamaan, onko syöte alkuluku vai ei, mutta vielä ei tiedetä, onko olemassa polynomiaikaista *varmuudella* toimivaa algoritmia, joka kertoisi onko syöte alkuluku.

6. Kvanttilaskenta

Kvanttimekaniikka sai alkunsa tämän vuosisadan alussa, kun klassinen fysiikka ei kyennyt tyydyttävästi selittämään havaittuja ilmiöitä mikroskooppisella tasolla. Kvanttimekaniikan pääpiirteisiin kuuluu, että systeemi voi perustilojensa lisäksi olla myös niin sanotussa perustilojen *superpositiossa*.

Mahdollisia nk. *kaksitilaisia* systeemejä, jotka voisivat esittää *kvanttibittiä*,[20] ovat mm. fotonin polarisaatio (pysty- tai vaakasuora), elektronien energiatilat atomissa (viritetty ja perustila) sekä kvanttifysikaalinen käsite *spin*. Kussakin systeemissä on kaksi perustilaa, joiden voidaan ajatella esittävän nollaa ja ykköstä. Näistä tiloista käytetään usein merkintöjä $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ mutta systeemi voi olla perustilojensa lisäksi myös muotoa $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ olevassa superpositiotilassa. Superposition kertoimet ovat ehdon $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ toteuttavia kompleksilukuja ja kyseisen tilan fysikaalinen merkitys on seuraava: Kun tilassa $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ olevaa systeemiä havainnoidaan, nähdään sen olevan tilassa $|0\rangle$ todennäköisyydellä $|c_0|^2$ ja tilassa $|1\rangle$ todennäköisyydellä $|c_1|^2$. Kvanttimekaaniseen systeemiin liittyy aina kiinteästi *todennäköisyysluonne*: Systeemin tilasta selviävät vain todennäköisyydet, joilla kukin perustila voidaan havainnoida. Lisäksi on huomattava, että havainnointi edellyttää vuorovaikutusta havaitsijan ja systeemin välillä mikä yleensä häiritsee alkuperäistä systeemiä.

Kahden kvanttibitin muodostama yhdistetty systeemi on nelitilainen: Sen perustilat ovat $|00\rangle$ $|01\rangle$, $|10\rangle$ sekä $|11\rangle$. Systeemin yleinen tila on, aivan kuten kaksitilaisissa systeemeissä, perustilojen superpositio

$$c_0 |00\rangle + c_1 |01\rangle + c_2 |10\rangle + c_3 |11\rangle, \tag{7}$$

jonka kertoimet toteuttavat ehdon $|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$. Tilaa 7 havainnoitaessa voidaan nähdä $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ ja $|11\rangle$ todennäköisyyksillä $|c_0|^2$, $|c_1|^2$, $|c_2|^2$ ja $|c_3|^2$. Yleistys kolmen ja useamman kvanttibitin systeemeille on suoraviivainen: n kvanttibittiä käsittävässä systeemissä on 2^n perustilaa ja yleinen tila on perustilojen superpositio, jossa esiintyy 2^n kompleksilukua kertoimina. Tämä eroaa suuresti perinteisestä n bittiä käsittävästä systeemistä, minkä tila voidaan kuvata aina ilmoittamalla kunkin bitin tila erikseen (joko 0 tai 1), kun taas vastaavan kvanttisysteemin tilan kuvailuun tarvitaan 2^n kompleksilukua, siis eksponentiaalinen määrä bittien lukumäärään n nähden.

Perinteisessä laskennan teoriassa yleensä valitaan aakkosto kuhunkin käyttötarkoitukseen sopivaksi, mutta sopivaa koodausta käyttäen voitaisiin yleensä käyttää binääriaakkostoa, jolloin bitti on varsin luonnollinen infomaation yksikkö. Korvaamalla bitit kvanttibiteillä päästään varsin luontevasti siirtymään kvanttilaskentaan. Tällöin luonnollisesti heräävät kysymykset voidaanko kvanttimekaanista tietokonetta käytännössä rakentaa ja mikä sellaisen koneen laskentateho olisi perinteiseen tietokoneeseen verrattuna. Valitettavasti kumpaankaan kysymykseen ei voida nykytietämyksen valossa vastata tyhjentävästi. Vuoteen 1998 mennessä tutkijat ovat pystyneet rakentamaan ainoastaan hyvin pieniä kvanttitietokoneen prototyyppejä, jotka pystyvät käsittelemään kahta tai

[18] T_1 ja T_2 ovat samaa suuruusluokkaa, jos osamäärät $\frac{T_1(n)}{T_2(n)}$ ja $\frac{T_2(n)}{T_1(n)}$ pysyvät rajoitettuna kun n kasvaa rajatta.

[19] $\frac{T(n)}{n^k}$ pysyy rajoitettuna, kun n kasvaa rajatta.

[20] quantum bit, qubit

kolmea kvanttibittiä. Käsitykset tutkijoiden keskuudessa vaihtelevat suuresti: joidenkin mielestä teknologiset hankaluudet ja fysikaaliset häiriötekijät tulevat myös tulevaisuudessa estämään suurimittaisten kvanttitietokoneiden kehittämisen, kun taas toiset ovat sitä mieltä, että nk. *virheitä korjaavien koodien* kehitys kvanttilaskennan alueella johtaa lopulta suurten kvanttitietokoneiden rakentamiseen.

Kysymys kvanttitietokoneiden laskentatehosta on myös osoittautunut hankalaksi: huolimatta tutkimuksen voimakkaasta kasvusta alalla toistaiseksi ei tunneta kokonaisia suuria ongelmaluokkia (kompleksisuusluokkia, vrt. 5. luku), joiden kaikki ongelmat voitaisiin ratkaista kvanttilaskennan keinoin oleellisesti nopeammin kuin perinteisen laskennan avulla. Tiedossa on ainoastaan yksittäisiä, kvanttitietokoneella nopeasti ratkeavia ongelmia kuten lukujen tekijöihinjako. Luultavaa onkin, että kvanttilaskentaan liittyvät teoreettiset ongelmat tarjoavat tutkijoille mielenkiintoisia haasteita pitkälle tulevaisuuteen.

Lopuksi on syytä mainita, ettei mainittu ongelma, nopea tekijöihinjako, ole pelkästään matemaattisesti mielenkiintoinen erikoisuus vaan myös käytännön kannalta huomattava saavutus: nykyisin laajassa käytössä olevan salakirjoitusmenetelmän RSA turvallisuus perustuu otaksumaan, jonka mukaan lukujen tehokas tekijöihinjako on mahdotonta, mikä ei enää ole totta jos suuria kvanttitietokoneita voidaan rakentaa.

Mika Hirvensalo
<mikhirve@utu.fi>

Malatyn tehtävät

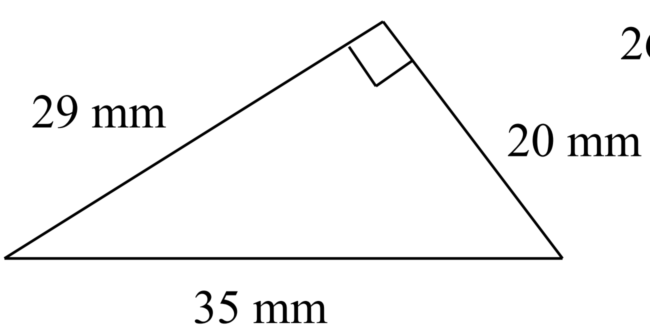
Oppikirjan virheet ja matematiikan rakenne

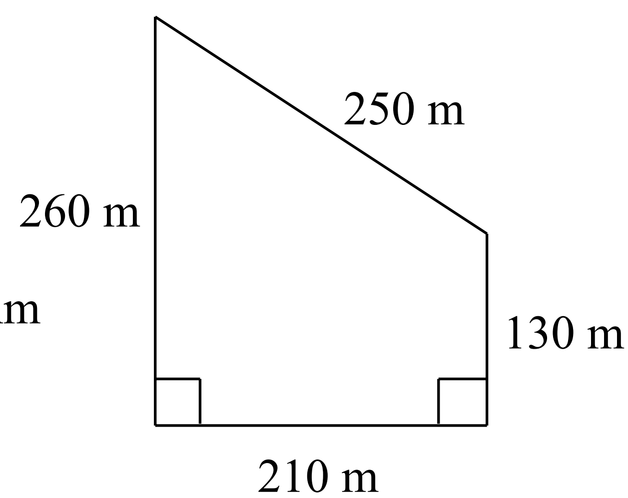
Matematiikan kauneus on ennen kaikkea sisäistä kauneutta. Tällä kauneudella on ollut oma lumoava vaikutuksensa moniin ihmisiin. Kauneus on matemaattisessa ajattelussa ja sen tuotteessa: matematiikan rakenteessa.

Solmussa 1/1997–1998 (s. 19) tarjosin erään 1980-luvun oppikirjan virheestä sopivan tehtävän matemaattiselle pohdinnalle. Tämän virheen löytäminen oppikirjasta vaatii jonkin verran perehtymistä euklidiseen geometriaan. Kun nykyoppikirjat eivät tarjoa tällaista mahdollisuutta, en ole saanut tähän asti sopivaa ratkaisua koulujen opiskelijoilta. Tällä kertaa valitsin eräässä nykyoppikirjassa toistuvan virheen, jonka löytäminen ei vaadi kuin alkeellista matematiikkaa. Virheen pohjalta tarjoan tehtävän, jonka ratkaisu ei ole vaikea, mutta se edustaa erästä aspektia matematiikan sisäisestä kauneudesta.

Tehtävä

Eräältä oppikirjan sivulta löytyvät seuraavat kaksi kuviota, joiden piiri ja pinta-ala oppijan tulee laskea.





Oppijat kyllä laskevat kuvioiden piirin ja pinta-alan, vaikka tällaisia kuvioita ei ole olemassa. Tällainen virhe toistuu kirjan geometrian kertaustehtävissä. Siinä on piirretty suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on 90 m ja kateettien pituudet ovat 32 m ja 84 m. Vaikka tällaista kolmiota ei ole olemassa Pythagoraan lauseen mukaan, oppikirjan mukaan piiri ja pinta-ala ovat 206 m ja 1344 m^2.

Pythagoralaiset tarjosivat seuraavat kaksi menetelmää sopivan kokonaisluvun löytämiseksi suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksiksi:

1. Valitse mikä tahansa pariton luku (suurempi kuin 1). Etsi kaksi lukua, joiden summa on valitun parittoman luvun neliö, ja niiden erotus on 1. Nämä kaksi lukua ja alkuperäinen pariton luku ovat suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia. (Esimerkiksi 3, 4 ja 5)

2. Valitse mikä tahansa parillinen luku (suurempi kuin 2). Tällöin tämä luku, sen puolikkaan neliö -1 ja sen puolikkaan neliö $+1$ ovat suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia.
(Esimerkiksi 4, $2^2 - 1$ ja $2^2 + 1$, eli 4, 3 ja 5)

Viimeksi mainittu menetelmä liitetään enemmän Platoniin, vaikka pythagoralaiset ja vielä aiemmin babylonialaiset tunsivat sen.

Tehtäväsi on näiden menetelmien perusteiden löytäminen. Siis todista, että ne ovat oikeat.

Lähetä ratkaisusi minulle. Toivon, että tällä kertaa saan paljon postia lukioiden ja mahdollisesti myös yläasteiden opiskelijoilta.

George Malaty
Joensuun yliopisto
PL 111
80101 Joensuu

Solmun tehtävät

Solmun tehtävät **41** – **46** esitettiin numerossa 2/98–99. *Immo Heikkinen* lähetti hyvät ratkaisut kaikkiin kuuteen tehtävään, ja ne julkaistaan tässä.

41. *Luku* 110 355 024 *on neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo. Mitkä nämä luvut ovat?*

Immo Heikkisen ratkaisu. Koska $\sqrt[4]{110\,355\,024} \approx 102{,}5$, ilmeisiä ehdokkaita kysytyiksi luvuiksi ovat 101, 102, 103 ja 104. Kertolasku osoittaa, että luku todella on $101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104$. – Toinen hyvä vinkki (joka toimii ilman juurenottoja, jotka vaativat laskimen tai kohtuullisia numerolaskuja) olisi havainto, että luku, jota halutaan jakaa tekijöihin, on välillä $(10^8,\ 1{,}11 \cdot 10^8)$, ja että neljän peräkkäisen luvun tulo päättyy muuhun kuin nollaan vain, jos viimeiset numerot ovat 1, 2, 3 ja 4 tai 6, 7, 8 ja 9. Koska jo $105^2 = (100+5)^2 > 10^4 + 10^3$ ja siis $105^4 > (11 \cdot 10^3)^2 = 1{,}21 \cdot 10^8$, ainoiksi tekijäkandidaateiksi jäävät 101, 102, 103 ja 104.

42. *Luku* $n!$ *eli* n*-kertoma on tunnetusti lukujen* $1, 2, 3, \ldots, n$ *tulo, esim.* $4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. *Jos* n *on isohko,* $n!$ *on kovasti suuri luku. Esim.* $13! = 6\,227\,020\,800$. *Isompien lukujen kertomat näyttävät päättyvän useampiin nolliin. Kuinkahan moneen nollaan päättyy luku* 1998!, *jos se kirjoitettaisiin normaaliin tapaan auki? Perustele!*

Immo Heikkisen ratkaisu. Luvun loppunollien määrä riippuu siitä, kuinka monta kymppiä saadaan muodostettua sen tekijöistä. Koska $10 = 2 \cdot 5$, on loppunollien lukumäärä itse asiassa sama kuin luvun alkutekijähajotelman 2:n ja 5:n eksponenteista pienempi. Tarkastellaan luvun 1998! tekijöitä ja yritetään saada selville kuinka monta niistä on viitosia. Joka viides luvuista on jaollinen viidellä ja koska $1998/5 = 399{,}6$, on 1998 tekijöistä 399 jaollisia viidellä. Mutta mutta. Näistä joka viides (79) on jaollinen 5^2:lla. Näistä taas joka viides (15) on jaollinen 5^3:lla. Ja edelleen joka viides (3) jaollinen 5^4:lla. Ts. 5:n eksponentti alkutekijähajotelmassa on:

$$399 + 79 + 15 + 3 = 496,$$

joka onkin loppunollien lukumäärä koskapa kakkosia on ”reilusti”enemmän. Siis luvussa 1998! on 496 loppunollaa.

43. *Toinen omituinen kysymys loppunollista. Alkuluvut ovat jaottomia positiivisia kokonaislukuja;* 1 *ei yleisesti noudatettavan sopimuksen mukaan kuitenkaan ole alkuluku. Olkoot nyt* $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{99},\ p_{100}$ *sata pienintä alkulukua. Muodostetaan luku*

$$n = p_1^1 \cdot (p_1^2 p_2)(p_1^3 p_2^2 p_3) \cdots (p_1^{100} p_2^{99} p_3^{98} \cdots p_{98}^3 p_{99}^2 p_{100}^1).$$

Kuinkahan moneen nollaan n *päättyy?*

Immo Heikkisen ratkaisu. Tämä tehtävä menee samalla tavalla kuin edellinenkin, alkutekijähajotelman muodostaminen vain on helpompaa, koska tekijöinä on pelkästään alkulukuja. Olemme kiinnostuneita erityisesti alkulukujen $p_1 = 2$ ja $p_3 = 5$ eksponenteista.

$$n = p_1(p_1^2 p_2)\cdots(p_1^{100}p_2^{99}\cdots p_{100}^1) = p_1^{1+2+\cdots+100}p_2^{1+2+\cdots+99}p_3^{1+2+\cdots+98}\cdots p_{100}^1 = p_1^{5050}p_2^{4950}p_3^{4851}\cdots p_{100}^1.$$

Nyt koska 5:n eksponentti on 4851 ja koska 2:n eksponentti on suurempi, on luvussa loppunollia 4851 kpl.

44. *Kuuluisa* 1600-*luvulla elänyt ranskalainen matematiikko* Pierre de Fermat *esitti aikanaan muotoa* $2^{2^n} + 1$ *olevia lukuja koskevan otaksuman (että ne olisivat kaikki alkulukuja), jonka yhtä kuuluisa* 1700-*luvulla elänyt sveitsiläinen* Leonhard Euler *osoitti virheelliseksi. Lukuja* $F_n = 2^{2^n} + 1$ *eli* $5, 17, 257, 65537, \ldots$ *kutsutaan kuitenkin* Fermat'n luvuiksi. *Todista, että* F_n *(auki kirjoitettuna) päättyy aina numeroon* 7, *kun* $n > 1$.

Immo Heikkisen ratkaisu. Todistetaan täydellisellä induktiolla, että kaikille $n > 1$ luvun $F_n = 2^{2^n} + 1$ viimeinen numero on 7. Kun $n = 2$, on $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$, joten väite pätee. Oletetaan, että väite pätee, kun $n = k$. Siis $F_k = 2^{2^k} + 1 = 10m + 7$ jollekin luvulle m eli $2^{2^k} = 10m + 6$. Kun $n = k + 1$, on $F_{k+1} = 2^{2^{k+1}} + 12^{(2^k)^2} + 1 = (10m+6)^2 + 1 = 100m^2 + 120m + 36 + 1 = 100m^2 + 120m + 30 + 7 = 10(10m^2 + 12m + 3) + 7$, eli F_{k+1} päättyy 7:ään. Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi.

45. *Tehdään seuraavat havainnot:* $1\cdot2\cdot3\cdot4 + 1 = 25 = 5^2$, $2\cdot3\cdot4\cdot5 + 1 = 121 = 11^2$, $3\cdot4\cdot5\cdot6 = 361 = 19^2$. *Onko seuraava väite aina tosi: jos kerrotaan keskenään mitkä tahansa neljä peräkkäistä kokonaislukua ja tulokseen lisätään yksi, tulokseksi saadaan neliöluku eli kokonaisluvun toinen potenssi?*

Immo Heikkisen ratkaisu. Tutkitaan mielivaltaisen neljän peräkkäisen kokonaisluvun tulon ja 1:n summaa. Olkoon luvut n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Silloin $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1 = n^4+3n^3+n^2+3n^3+9n^2+3n+n^2+3n+1 = n^2(n^2+3n+1)+3n(n^2+3n+1)+n^2+3n+1 = (n^2+3n+1)(n^2+3n+1) = (n^2+3n+1)^2$, joka on kokonaisluvun neliö. Siis väite on tosi.

46. *Tuntuu jo vähän omituiselta: jos otetaan mikä hyvänsä kolminumeroinen luku, kerrotaan se kahdella ja kirjoitetaan luvut peräkkäin kuusi- tai seitsennumeroiseksi luvuksi (se kaksinkertainen ensin), niin syntynyt luku on tasan jaollinen* 23*:lla ja* 29*:llä. Perustele tämä!*

Immo Heikkisen ratkaisu. Olkoon tämä kolminumeroinen luku x. Kerrotaan se kahdella ja kirjoitetaan luvut peräkkäin (se kaksinkertainen ensin) eli: $1000 \cdot 2x + x = 2001x$. Luku 2001 on jaollinen sekä 23:lla että 29:llä, joten tämä jaollisuus ei riipu millään tavalla x:stä.

Uudet tehtävät.

Tällä kertaa teemana ovat neliöjuuret. Tiesitkö, että $\sqrt{\ }$-merkki on itse asiassa muotoiltu r-kirjain, latinan juurta tarkoittavan *radix*-sanan ensimmäinen kirjain? Sama *radix* esiintyy vaikkapa *retiisissä* tai *radikaalissa*.

47. Osoita, että luvun $(4 + \sqrt{10})^n$ kokonaisosa on kaikilla n pariton luku.

48. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} + \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 9.$$

49. Todista, että kaikilla $n \geq 0$ on olemassa m siten, että

$$(\sqrt{2} + 1)^2 = \sqrt{m} - \sqrt{m - 1}.$$

50. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{5 - \sqrt{5 + x}} = x.$$

51. Ratkaise yhtälö

$$\underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \cdots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}}}_{n \text{ juurimerkkiä}} = x$$

52. Osoita, että lukua $100 + 60\sqrt{3}$ ei voi kirjoittaa muotoon $(x + y\sqrt{3})^2$ millään reaaliluvuilla x, y.

Lähetä ratkaisusi osoitteella Matti Lehtinen, Peukaloisentie 4 A 6, 00820 Helsinki, tai sähköpostilla osoitteeseen matti.lehtinen@helsinki.fi. Hyvät ratkaisut julkaistaan Solmussa. Myös jo käsiteltyihin tehtäviin voi lähettää uusia ratkaisuja!

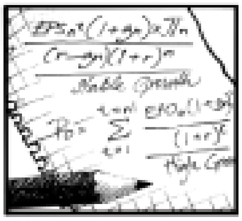
Matti Lehtinen

Solmun logo ja kannen kuva

Tämän lehden kannessa esiintyy ensimmäisen kerran Solmun uusi logo. Itse asiassa kuvio oli käytössä lähes samassa muodossa jo edellisen numeron 4/1998–1999 kannessa. Logon on suunnitellut Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen opiskelija Mikko Vaajasaari. Hän osallistui tänä keväänä pidetylle HTML-kurssille, jossa kaikki opiskelijat suunnittelivat edelliseen numeroon kansiehdotuksen. Nyt ensimmäistä kertaa käytettävä Solmun logo on osa Mikon tekemää ehdotusta.

Tämän numeron kannen kuvan on suunnitellut Rolf Nevanlinna -instituutissa työskentelevä matematiikan tutkijakoulutettava Panu Erästö. Alunperin kuva oli mukana laitoksen kotisivun tunnuskilpailussa, ja se sijoittui tässä kilpailussa toiseksi.

Panu itse kertoo kuvion syntyvän, kun tasasivuisen kolmion kullekin sivulle asetetaan 25 pistettä tasavälisin etäisyyksin ja kun toisiaan vastaavat pisteet yhdistetään. Hän arvelee keskelle jäävän alueen olevan *Reuleaux'n kolmio* eli se joukko, joka rajautuu, kun tasasivuisen kolmion kustakin kärjestä piirretään sivun säteinen ympyränkaari. Hän mainitsee tätä muotoa käytettävän *Wankel-moottoreiden* männissä.



MALU 2002 -projektissa tehtyjä pro graduja

Dosentti Matti Vuorisen johdolla Helsingin yliopiston matematiikan laitoksella toimivan Suomen Akatemian MALU 2002 -projektin toiminta alkoi huhtikuussa 1998 ja jatkuu vuoden 2000 loppuun. Projektin toiminta-ajatuksena on ollut tarjota opiskelijoille mahdollisuuksia teollisuussovelluksia lähellä olevien matematiikan pro gradujen tekoon ja samalla monipuolistaa laitoksen aiheeseen liittyvää opetustarjontaa.

Projekti on käynnistänyt digitaalisen tiedonsiirron pro gradu -seminaarin, jossa käsitellään langattoman teknologian matemaattisia menetelmiä. Pro gradujaan valmistavat opiskelijat ovat seminaarissa esitelleet tutkimusaiheitaan ja niiden taustalla olevaa teoriaa. Maaliskuussa 1999 valmistuivat ensimmäiset kaksi gradua, joista on tekijöiden laatimat tiivistelmät alla. Kummallekin graduntekijälle on löytynyt työpaikka samalta alalta. Lisäksi on valmisteilla kaksi muuta samoihin aihepiireihin liittyvää gradua.

Projektiin liittyvää Vuorisen opetustoimintaa ovat myös kevään 1999 kurssi *Numeeriset menetelmät ja C-kieli*[21] ja syksyllä 1999 pidettävä *Matematiikan menetelmäkurssi*.

[21] http://www.math.helsinki.fi/~hrantala/nrkurssi.html

P. Lindroos: An autoregressive model for low bit rate video

Pro gradu työ tehtiin yhteistyössä Nokia Research Centerin kanssa ja se sai Suomen Akatemian MALU 2002 -projektin rahoitusta. Työhön liittyvät mittaukset tehtiin Teknillisessä Korkeakoulussa, jossa talletettiin kuvapuhelussa lähetetty informaatio tiedostoihin.

Kuvapuhelussa videokooderi ensin koodaa kuvan digitaaliseen muotoon, jossa se lähetetään vastaanottajalle. Mittauksessa em. koodatut kuvat otettiin talteen siten että koodatun kuvan koko ja lähetysaika olivat luettavissa. Kuvien koista saatiin aikasarja, johon sovitettiin autoregressiivinen prosessi. Sovituksen seurauksena saatiin ko. prosessin parametrien estimaatit. Seuraavaksi laadittiin C-kielinen tietokoneohjelma, joka simuloi estimoitua prosessia. Lopuksi vertailtiin mitattua ja simuloitua aikasarjaa keskenään.

Työhön liittyi mittauslaitteistoon, yleisemmin alan tekniikkaan, ja aihetta sivuaviin julkaisuihin perehtyminen. Sovitus ja estimointi perustuivat ns. *Yule–Walker* -menetelmään.

E. H. Rantala: Simulation of carrier-to-interference distribution in 1/3-reuse cellular networks

Pro gradu on tehty sovelletun matematiikan alalta. Se käsittelee matkapuhelinverkon mallintamista ja verkon kapasiteetin simuloimista. Työ tehtiin yhteistyössä Nokia Research Centerin kanssa Suomen Akatemian MALU 2002 -projektin rahoituksella.

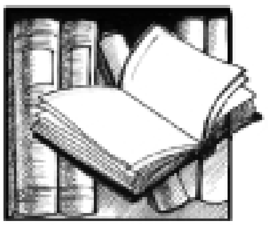
Työssä keskityttiin tutkimaan tukiaseman ja matkapuhelimen välistä radioliikennettä. Tukiaseman ja matkapuhelimen välinen radioliikenne eli tietoliikenneyhteys aiheuttaa häiriötä eli interferenssiä muille yhteyksille. Erityisesti työssä tutkittiin tukiasemasta matkapuhelimeen kehittyvää samakanavahäiriötä ja varsinaisen hyötysignaalin suhdetta koko verkossa esiintyvään samakanavahäiriöön. Tämä suhde on tunnusomainen verkon ominaisuus.

Verkossa on käytössä huomattava määrä tukiasemia, joiden avulla käyttäjät kommunikoivat keskenään. Yksi tukiasema voi palvella rajoitettua määrää matkapuhelimia. Työssä on tutkittu kuinka monta puhelinta yksi tukiasema voi palvella ilman, että samakanavahäiriö kasvaa liian suureksi. Samakanavahäiriö riippuu voimakkaasti siitä, mitkä tukiasemat uudelleenkäyttävät taajuuksia.

Tietokoneet ovat osaltaan mahdollistaneet tällaisen puhelinverkon toiminnan kokeellisen tutkimisen. Tutkimusta varten on tehtävä systeemistä malli eli kuvattava oikea systeemi matemaattisin lausekkein ja algoritmein. Mallin ratkaisussa tietokonesimulointi on ainoa mahdollinen tapa saada tuloksia, koska tehtävä johtaa massiiviseen laskentaan.

Työssä verkosta tehtiin malli, joka sisältää useita yksinkertaistuksia. Yksinkertaistukset ovat kuitenkin realistisia, niin että saadaan relevanttia tietoa verkon häiriökäyttäytymisestä. Työtä varten malli ohjelmoitiin C++-kielellä käyttäen erityisesti kielen tarjoamaa oliotekniikkaa. Tutkimus perustui suurelta osin tästä verkkoa simuloivasta ohjelmasta eli simulaattorista saatuihin tuloksiin.

Matti Vuorinen
`<vuorinen@csc.fi>`



Hyvinvointivaltion Tabut

Hyvinvointivaltion Tabut – professori Yrjö Ahmavaara on kirjoittanut kolmesataasivuisen kritiikin nykykulttuuristamme.

Kirja alkaa lainauksella Touko Voutilaisen tekstistä: ”Korkeammat arvot voidaan yhdistää semmoiseen käsitteeseen kuin sivistys, joka ei ole samaa kuin kulttuuri. Kulttuuri on jokin rajoitettu yhdenmukaisuus, sivistys on vain yksi: se universaalinen aines mikä kuhunkin kulttuuriin sisältyy. Toisiin kulttuureihin sitä sisältyy enemmän, toisiin vähemmän, länsimaiseen kulttuuriin enemmän kuin mihinkään muuhun. Ja se mikä länsimaisesssa kulttuurissa on sivistystä, on ensi sijassa tieteellinen ajattelu. Se säilyy, vaikka ns. länsimainen kulttuuri tuhoutuisikin.”

Ahmavaara tekee selvän pesäeron eksaktin tieteen ja kommentoivan tieteen välille: Eksaktin tieteen peruspiirteet ovat objektiivisuus, pysyvyys ja kasautuvuus, kommentoiva tiede taas on lähellä subjektiivista itseilmaisua. 1960-luvulla alkaneesta käsitteiden sekaannuksesta Ahmavaara kirjoittaa: ”Eksaktien tieteiden tulkinnasta subjektiiviseksi itseilmaisuksi 60-lukulaisten filosofien tieteenfilosofiassa sai alkunsa kaiken tiedon subjektivointi ja kommentoivien, selityksissään subjektiivisten tieteiden nostaminen eksaktien tieteiden tasolle ja jopa yläpuolelle. Tästä filosofisesta asenteesta tuli eräissä maissa myös hyvinvointivaltion tiede- ja koulupolitiikkaa leimaava piirre. Kun kaikki tieto oli yhtä subjektiivista ja pelkkää mielipiteiden esittämistä, silloin oli kenttä vapaana tiede- ja koulupoltiikan politisoinnille.”

Ahmavaaran kirja tarkastelee hyvin kriittisesti sitä ”kasvatusopillista poliittista joukkoliikettä”, joka Yhdysvalloista käsin valloitti länsimaisten hyvinvointivaltioiden koululaitokset 1960- ja 1970-luvuilla ja joka ”halveksi objektiivista ja eksaktia tietoa ja perusti koululaitoksen utopioiden varaan”. Perustana on vaikuttavaan asemaan noussut tasa-arvon rousseaulainen tulkinta, joka ”arvioi ihmisten syntyvän psyykkisiltä ominaisuuksiltaan samanlaisina ja kaikkien psyykkisten erojen johtuvan yhteiskunnallisista seikoista, erityisesti syrjinnästä”. Ahmavaara viittaa siihen, että rousseaulainen tasa-arvoideologia on paradoksaalisesti johtanut ihmisten itsekkyyden lisääntymiseen korostaessaan heidän oikeuksiaan ja unohtaessaan heidän velvollisuutensa ihmisinä ja yhteiskunnan jäseninä. Toisen ihmisen palvelu on alettu kokea ihmisen arvoa alentavaksi, tapakulttuuri on heikentynyt, on ”korostettu lapsen synnynnäistä viisautta, jota opettajan opittu viisaus ei saisi häiritä: opettajan piti oppia lapselta pikemmin kuin päinvastoin. Tämä tosin kohotti lapsen itsetuntoa, kuten toivottiin, mutta samalla se ehkä korosti lapsen itsekkyyttä ja heikensi hänen kykyään ottaa huomioon muita”. Ahmavaara käsittelee myös laajasti nuorison ja jopa lasten väkivaltaisuutta ja sen herättämää vastarintaa sekä nuorisorikollisten hoidosta saatuja tuloksia.

Ahmavaara tarkastelee yleisesti hyvinvointivaltiossa tapahtunutta vallan keskittymistä ja tiedon käsitteen hämärtymistä; virkamieshallinto politisoitiin, virkamiesasiantuntijat korvattiin puolueaktivisteilla, ”joilla ei tarvinnut olla eikä usein ollutkaan täsmällistä tietoa heidän hoidettavakseen uskotuista asioista”. ”Pahinta oli prosessin ulottuminen koululaitoksen suunnitteluun ja hallintoon.Tämä 1960-luvun inspiroima kasvatusidealismi – lausutut ihanteelliset pyrkimykset oikeuttavat tämän sanan – johti kuitenkin uuden ajan koululaitoksen piirissä ennen näkemättömään tiedollisen opetuksen tason ja tavoitteiden laskuun...". Ahmavaara perustelee väitteensä yksityiskohtaisella tutkimustiedolla ja kertoo havainnollisia esimerkkejä Britanniasta: "kaksi vuosikymmentä kasvatusidealismin kehumaa 'aktiivista oppimista', 'lapsikeskeisyyttä' ja leikkimistä..."on johtanut "meluisiin sirkusmaisiin koulutunteihin, jotka ovat paljolti tuhonneet lasten keskittymiskyvyn". Syksyllä 1991 Britannian hallituksen koulutarkastajat vierailivat Ranskassa ja totesivat, että siellä koko luokkaa opetettiin samanaikaisesti, mustaa taulua käytettiin, oppitunnit eivät olleet kyllästyttäviä. Lapset suorittivat tehtävänsä erittäin huolellisesti sellaisissa keskeisissä aineissa kuin äidinkielessä ja matematiikassa, suoritukset arvosteltiin pätevästi, lapset käyttäytyivät hyvin ja olivat aktiivisia, 11-vuotiaat lapset opiskelivat jo vakavasti otettavia kursseja esim. geometriassa – johon yliopiston opettajat Britanniassa huomauttivat, että se ei ole heillä mahdollista yliopiston ensimmäisellä lukukaudella tason laskun takia.

Ahmavaara kirjoittaa Suomesta otsikolla *Onko suomalainen koulutus matkalla kohti katastrofia?* ja toteaa: "Koulutuksen osalta suomalainen julkisuus heijastaa lähes uskomatonta omahyväisyyttä – näyttää siltä, että Suomessa ei koulutuksesta puhuttaessa lainkaan tajuta, mistä on kysymys. Itsekriittistä koulukeskustelua ei Suomessa juurikaan ole esiintynyt."Ahmavaara siteeraa professori Roger Blin-Stoylea: "maan tulevaisuus riippuu sellaisista opettajista, jotka kouluttavat kyvykkäimpiä oppilaita valitsemaan alakseen tieteen"ja toteaa, että sama koskee tietenkin myös Suomea.

Ahmavaara kaipaa kiireesti kasvatusrealismia katastrofin välttämiseksi, käsittelee laajasti ihmisten älyllisten suorituskykyjen eroja ja kertoo lopuksi yrityksistä USA:ssa ja Englannissa muuttaa "agressiiviseen, rousseaulaiseen kasvatusidealismiin perustuneen hyvinvointivaltion koululaitosta siten, että se paremmin vastaa tietoon perustuvan yhteiskunnan haasteita".

Suomen suhteen Ahmavaara viittaa OECD:n raportissa esitettyyn kritiikkiin mm. tehottomuudesta, suuntautumisesta väärille aloille, valinnanmahdollisuuksien paljoudesta, "se johtaa helposti pintapuoliseen opiskeluun", käsittelee Luma-talkoita, kertoo kansainvälisten koko ikäluokan käsittävien vertailujen tuloksista ja ihmettelee esimerkiksi sitä, mihin perustuu väite koulunopettajien hyvästä pohjakoulutuksesta ja kansainvälisesti korkeasta ammattitaidosta, koska systemaattisia vertailuja ei ole tehty – kuin ehkä muihin maihin, joissa taso myös on laskenut. Ahmavaara kysyy: "Miksi suomalainen julkisuus ei tiedä tai ei välitä tason laskusta myös Suomen kouluissa?"

Marjatta Näätänen
matematiikan laitos
Helsingin yliopisto