Solmu 1/1999-2000

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto
`http://www.math.helsinki.fi/Solmu/`

Päätoimittaja *Pekka Alestalo*
Toimitussihteeri *Jouni Seppänen*

Sähköposti (Internet)
`Pekka.Alestalo@Helsinki.FI`
`Jouni.Seppanen@iki.fi`

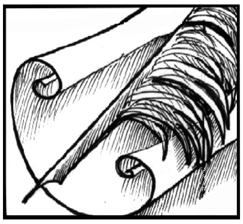
Toimituskunta:
Heikki Apiola
Matti Lehtinen
Kerkko Luosto
Kullervo Nieminen
Marjatta Näätänen
Graafinen avustaja Marjaana Beddard

Seuraavaan lehteen tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään lokakuun loppuun mennessä.

Lehden aloittamisen tekivät taloudellisella tuellaan mahdolliseksi Nokia (`http://www.nokia.com`) ja Taloudellinen Tiedotustoimisto (`http://www.tat.fi`). Keväästä 1997 alkaen on Opetusministeriö (`http://www.minedu.fi`) avustanut taloudellisesti Solmua.

Huom! Solmua jaetaan jokaiseen tilaajakouluun vain yksi kappale. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys



Pääkirjoitus

Yksi matematiikan opetuksen päämääristä on matematiikan soveltaminen käytännön ongelmien ratkaisuun. Joidenkin mielestä tämän pitäisi olla tärkein tai jopa ainoa päämäärä, jonka pitäisi näkyä kaikessa opetuksessa.

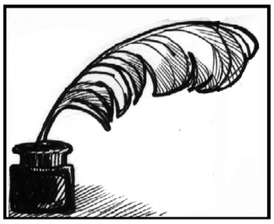
Matematiikan soveltamisella tarkoitetaan tietysti sovelluksia matematiikan ulkopuolelle – käytännön tilanteisiin, fysiikkaan, kemiaan tai melkein mihin tieteeseen tahansa, vaikkapa psykologiaan. Soveltavien tehtävien lisääminen on varmasti suositeltavaa, mutta esimerkiksi lukion tunneille sopivien "todellisten" sovellusten keksiminen ei ole helppoa. Tarkoittaako tämä siis sitä, ettei matematiikkaa loppujen lopuksi voikaan soveltaa?

Ei tietenkään, mutta ainakin kaksi ongelmaa tulee heti mieleen. Ensinnäkin, maailma ja sen ilmiöt tapaavat olla melko monimutkaisia, eikä lukiomatematiikka riittä kaikkein mielenkiintoisimpien sovellusten esittämiseen. Tämä on tietysti hyvä siinä mielessä, että jotakin uutta opittavaa jää myös luonnontieteitä lukion jälkeenkin opiskeleville. Toinen ongelma piilee nähdäkseni siinä, että opetusohjelmaan pakollisena kuuluva luonnontieteiden osuus on lähes olematon. Edelliseen verrattuna tämä seikka rajaa ainakin matematiikan tunneilla käsiteltävissä olevia sovelluksia paljon enemmän. Sellaiset fysikaaliset suureet kuin nopeus ja tiheys lienevät kaikille tuttuja, mutta voiko samaa sanoa energiasta ja tehosta tai niiden yhteydestä toisiinsa? Kilowattitunti ei taida olla aivan itsestäänselvä käsite.

En malta olla tässä välissä kertomatta eräästä kohdalleni sattuneesta matematiikan ja fysiikan sovelluksesta kalastukseen; kertomus on täysin totta, kuten kalajutut aina. Vuosia sitten saimme kavereiden kanssa uistimella suuren hauen. Koska kalastuksessa on tärkeintä tietää saaliin paino, olimme hetken aikaa pulassa: kesämökiltä ei löytynyt minkäänlaista puntaria tai vaakaa. Ongelma ratkesi kuitenkin pian, kun muistimme fysiikasta tutun vvv-periaatteen "voima $\times$ varsi $=$ vakio", ja niinpä saimme maitotölkin ja laudanpätkän avulla hauen painoksi 6,2 kg. Kaiken kruunuksi paikalle sattuivat iltakävelyllä olleet naapurit, jotka eivät uskoneet selitystämme kalan punnitsemisesta. Naapuri haki kalavaakansa, joka näytti painoksi, sadan gramman tarkkuudella, 6,2 kg! Tätä voisi pitää myös epäsuorana todistuksena sille, että täysi maitopurkki painaa noin kilon. Lievästi voitonriemuisina siirryimme miettimään, mitä kalalle pitäisi tehdä.

Tämä esimerkki on matemaattiselta kannalta varsin yksinkertainen; siitä selviää kerto- ja jakolaskuja käyttämällä. Jos kuitenkin haluaisimme määrittää kalan painon vielä tarkemmin, olisi otettava myös laudan paino huomioon, ja silloin tarvittaisiinkin jo integraaleja avuksi!

Pekka Alestalo



Verkkolehtien yhteistyö alkaa: matemaattinen sanakirja tekeillä, avustajia etsitään

Osallistuin Cambridgessä Englannissa heinäkuussa kokouksiin, joissa käsiteltiin Englannin NRICH-projektia ja yhteistyön aloittamista Englannin, Hollannin, Puolan, Unkarin ja Suomen välillä.

Englannin NRICH-projekti[1] pyrkii rikastuttamaan matematiikan kouluopetusta Internetin avulla, lisäksi Englannissa on samansuuntaisesti toimiva Passmaths-projekti[2].

NRICH on verkkoklubi, joka tarjoaa kouluille ilmaiseksi matematiikkaan ja sen opetukseen liittyviä palveluja. Projektin johtaja on **Toni Beardon** (The University of Cambridge, School of Education). Joka kuukausi ilmestyy NRICH INTERACT-lehti, jossa on haasteita 11–19-vuotiaille ja koululaisten ratkaisuja esitettyihin tehtäviin. Oppilaita rohkaistaan laajentamaan ajatteluaan ja taitoaan selittää muille ideoitaan, etsimään uusia ratkaisuja, varioimaan tehtäviä. The New Inspiration Section sisältää oppilaiden kirjoittamia artikkeleita. The Resource Bank sisältää yli 200 ongelmaa ja ratkaisua, myös interaktiivisia geometrian ongelmia, sekä monia pelejä, joita voidaan ratkoa ilmankin tietokonetta. The Monthly Six tarjoaa ongelmia, jotka voi ratkaista yksinkertaisilla perustiedoilla ja More Challenging Problems vaativampia tehtäviä 15–19-vuotiaille. NRICH Games sisältää pelejä ja matematiikkaan liittyviä kysymyksiä voi kysyä AskNRICH palvelusta, joka on erityisen hyvä palvely yksinään opiskeleville. Sähköpostiklubeissa on yli 1200 jäsentä eri puolilta maapalloa, opiskelijat keskustelevat matematiikasta NRICHtalk-osoitteessa, opettajat käyttävät NRICHsupport- ja NRICHprimath-osoitteita vaihtaakseen kokemuksia ja mielipiteitä. NRICH-projekti on yhteistyössä seuraavien kanssa: The Royal Institution of Great Britain, Cambridge University ja Homerton College. NRICH on myös yhteistyössä muiden ryhmien kanssa opettajien jatkokoulutuksen suhteen ja auttaa järjestämään mestariluokkia erityisen kyvykkäille lapsille, matemaattisia huvipäiviä ja erityistyöskentelyä.

Passmaths keskittyy matematiikan sovelluksiin, matemaatikkojen työmahdollisuuksiin ja informaatioon yliopistojen kursseista.

Hollannissa on oma Pythagoras-matematiikkalehtensä[3], joka ilmestyy hollanniksi. Lehden päätoimittaja on **Chris Zaal** ja kauniin monivärisen paperikopion voi tilata. Lehden sähköpostiosoite on `<pythagoras@wins.uva.nl>`. Puolassa on meneillään

[1] `http://nrich.maths.org.uk`

[2] `http://pass.maths.org.uk`

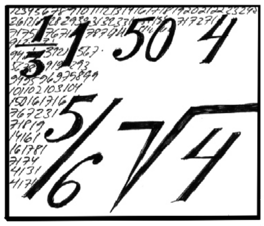
[3] `http://www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/`

monenlaisia matematiikan opetukseen liittyviä asioita, yhteistyöhön kanssamme osallistuu prof. **Wacek Zawadowski**. Unkarin yli 100-vuotias Kömal lienee ainakin nimeltä tuttu suomenkin matematiikan opettajille. Lehden päätoimittaja on **Vera Olah** ja taustavoimina Unkarin János Bolyai -matemaattinen yhdistys ja Roland Eötvös -fysiikan yhdistys. Kömalista[4] ilmestyy jonkin verran myös englanninkielellä.

Cambridgessa ehdotettiin yhteisen matematiikan verkkosanakirjan teon aloittamista. Sanakirja ilmestyisi eri kielillä, mm. suomeksi. Sanakirjan perustaso olisi tarkoitettu 10–11-vuotiaille. Perustasolta voidaan siirtyä edistyneemmälle tasolle, jolloin saadaan tarkempi määritelmä käyttöön. Internetin antamia mahdollisuuksia elävöittää termien merkitystä yritetään käyttää hyväksi, esimerkiksi voidaan käyttää liikkuvia kuvia. Lopuksi joitain esimerkkejä kyseeseen tulevista sanoista: jänne, ympyrä, vakio, sylinteri, etäisyys, tusina, Eukleides, Eratosthenes, Fibonacci, tunti, indeksi, isometria, kilo, litra, metri, Möbiuksen nauha, positiivinen luku, joukko, symmetria, paino, nolla. Suomalaisten tulisi työstää 4–5 sanaa tammikuuhun mennessä. Tämän tavoitteen saavuttamiseksi tarvittaisiin hyviä ideoita ja työstä kiinnostuneita henkilöitä. Toivottavasti tällaisia löytyy! Toivon pikaisia yhteydenottoja mieluiten sähköpostitse, ja mahdolliset rahoitusideatkin olisivat tervetulleita.

Marjatta Näätänen, dosentti
HY matematiikan laitos
<marjatta.naatanen@helsinki.fi>

[4] http://komal.elte.hu



Numerosokeus – kansainvälinen vitsaus

"The purpose of computation is insight, not numbers"
(**Richard W. Hamming**, 1915-1998)

Syksyllä 1998 Helsingin Sanomissa kerrottiin Pohjois-Suomessa olevasta 154 000 hehtaarin metsäalueesta. Kirjoittaja halusi havainnollistaa metsän suuruutta ja kertoi, että alue vastaa 154 kilometrin pituista ja sadan metrin levyistä kaistaletta. Todella iso alue! Valitettavasti laskelma oli väärin, minkä lukijat huomasivat. Korjauksessa väitettiin, että alueen pituus on 1 540 kilometriä. Tämäkin oli väärin. Toinen korjaus tuotti vihdoin oikean tuloksen: sata metriä leveän kaistaleen pituus olisi 15 400 kilometriä.

Numerosokeus ei ole pelkästään suomalaisten ongelma. Vuonna 1996 julkistivat Intel-yhtiö ja USA:n energiaministeriö (DOE) tiedotteen, jossa kerrottiin uudesta ASCI Red -supertietokoneesta. Tämän koneen huipputeho on yli 1000 miljardia laskutoimitusta sekunnissa (1 teraflop/s). Tiedotteen mukaan kone on niin nopea, että USA:n väestöltä (lapset mukaan lukien) veisi 125 vuotta laskea taskulaskimella se määrä laskutoimituksia, minkä ASCI Red laskee sekunnissa.

Intelin ja DOE:n väite on miljoona kertaa liioiteltu – USA:n väestö pystyy tekemään laskutoimitukset noin tunnissa. Tiedotteen virhe johtuu sanan "triljoona" erilaisista merkityksistä: triljoona on USA:ssa 10^{12} eli 1 000 000 000 000 ja Euroopassa 10^{18} eli 1 000 000 000 000 000 000. Lukusanat miljardi ja "billion" sekä biljoona ja "trillion" aiheuttavatkin jatkuvia ongelmia amerikkalaisten ja eurooppalaisten keskusteluissa.

Vuonna 1998 julkistetusssa DOE:n uudessa lehdistötiedotteessa verrattiin superkoneen tehoa yhden ihmisen laskutehoon. Tällä kertaa laskelma oli periaatteessa oikein.

Suuret luvut aiheuttavat jatkuvasti ongelmia. New Scientist kertoi ihmisen geeniperimän selvittämisestä ja väitti, että ihmisen geeneihin sisältyy 30 miljardia emäsparia. Oikea arvo on 3 miljardia emäsparia. Projektin keston kannalta tämä on olennainen lukuarvo.

Suuruusluokkien arviointi

Niin kutsuttu tieteellinen merkintätapa tarkoittaa lukujen ilmaisemista muodossa $4{,}567 \times 10^8$ eli käyttämällä apuna kymmenen potensseja. Tämä merkintätapa on välttämätön suurten tai pienten lukujen esittämisessä. Ilman potenssimerkintää joutuisimme kirjoittamaan edellä mainitun luvun muodossa 456 700 000, josta on huomattavasti vaikeampi hahmottaa luvun suuruusluokka. Lisäksi tieteellinen merkintätapa kertoo, kuinka tarkasti suure on mitattu: edellä tarkkuutta oli neljä desimaalia eli todellinen lukuarvo lienee välillä 456 650 000 ... 456 750 000.

Jokaisen pitäisi kyetä käyttämään lukujen tieteellistä merkintätapaa, mutta jostain syystä sitä käytetään erittäin harvoin lehdissä tai yleistajuisessa kirjallisuudessa. Merkintätapa säästää paljon mieliharmia ja lukujen väärintulkintoja, kuten edellä lukusanan "triljoona" kohdalla.

Suuruusluokkien hahmottaminen on vaikeaa mm. tilavuuksien, pinta-alojen ja pituuksien vertaamisessa. Ajatelkaamme vaikkapa kuutiometrin suuruista määrää kuparilevyjä. Jos kuparilevyjen paksuus on yksi millimetri, kuutiometristä kuparia saa 1000 neliömetrin kuparikatteen. Saamme katettua siis noin 31 m × 31 m kokoisen alueen.

Entä kuinka pitkän langan saisi kuutiometristä kuparia? Jos langan poikkileikkauksen ala on yksi neliömillimetri, saamme kuparilangan pituudeksi tuhat kilometriä. Lanka ulottuisi suunnilleen Suomen päästä päähän. Tässä on vielä jatkokysymyksiä: Kuinka paljon kuparia tarvittaisiin maapallon ympäri vedettävään kuparilankaan? Paljonko tämä kuparimäärä vie tilaa kuution muotoisena kappaleena eli mikä on kuution särmän pituus?

Kaikissa edellisen tyyppisissä laskelmissa on syytä käyttää lukujen tieteellistä merkintätapaa. Toinen tapa havainnollistaa suuria lukuja on verrata niitä johonkin konkreettiseen. Esimerkiksi aurinkokunnan kokoa voi havainnollistaa mittakaavassa $1 : 10^9$ eli yhden suhde miljardiin. Aurinko on tällöin noin metrin läpimittainen pallo ja maapallo on noin 150 metrin päässä. Mikä on maapallon halkaisija? Miten kaukana on Mars, Jupiter tai Pluto?

Lukujen taidon kehittäminen

John Allen Pauloksen kirjassa *Innumeracy* (suomennettu nimellä *Numerotaidottomuus*) on mainioita harjoituksia "lukujen taidon" kehittämiseen. Paulos tuo esille, kuinka tärkeää on, ettei lukuihin suhtauduta kritiikittömästi. Luvut pitäisi käsittää välineiksi, joiden avulla on mahdollista tutkia väitteiden todenperäisyyttä tai verrata eri vaihtoehtoja toisiinsa.

Arvioikaamme Helsingissä työskentelevien pianonvirittäjien lukumäärää. Ensinnäkin tarvitsemme arvion pianojen määrälle Helsingissä. Olettakaamme, että joka kymmenennessä perheessä on piano ja perheen keskimääräinen koko on kolme ihmistä. Koska Helsingissä on noin puoli miljoonaa asukasta, saamme pianojen määräksi noin 15 000. Jos yksi pianonvirittäjä virittää kaksi pianoa päivässä ja vuodessa on 200 työpäivää, ehtii hän virittämään 400 pianoa vuodessa. Jos kukin Helsingin pianoista viritetään kerran vuodessa, tarvitaan tähän noin 40 pianonvirittäjää.

Arvio pianonvirittäjien määrällä on hyvin ylimalkainen ja osoittaa lähinnä oikean suuruusluokan. Olisin kuitenkin hyvin yllättäynyt, jos Helsingistä löytyisi yli 400 tai alle 4 pianonvirittäjää. Edellä tehtyä arviota voi verrata Helsingin puhelinluettelon keltaisten sivujen ilmoituksiin: 56 pianonvirittäjää mainostaa palvelujaan. Aivan kaikki pianonvirittäjät eivät tietenkään ilmoittele keltaisilla sivuilla, mutta toisaalta osa pianonvirittäjistä tekee myös korjauksia ja huoltotöitä.

Edellä kuvatun kaltaisia laskelmia joutuu tekemään esimerkiksi harkittaessa uuden yrityksen perustamista: riittääkö yritykselle asiakkaita vaihtoehtoisissa sijoituspaikoissa? Tässä voi karkeastakin laskelmasta olla arvaamaton apu. Näin mahdollisuuksista karsiutuvat pois ne paikat, jotka eivät missään tapauksessa tule kysymykseen. Vastaavasti voi esimerkiksi tarkistaa, pitääkö ostoskeskuksen ilmoitus odotettavissa olevasta asiakasmäärästä suunnilleen paikkansa.

Suuruusluokan arviointi auttaa myös kaupan kassalla: kun tiedän ostosten likimääräisen loppusumman, en tule huijatuksi. Italiassa tai Turkissa on myös hyötyä siitä, että pystyy muuntamaan hinnat likimääräisesti Suomen markoiksi. Italian osalta tämä ongelma tosin poistuu päiväjärjestyksestä euron myötä.

Todennäköisyyksien arviointi

Ihminen on hyvä löytämään säännönmukaisuuksia sellaisistakin tapahtumista, jotka ovat täysin satunnaisia. Ne esi-isämme, jotka kykenivät tehokkaasti havaitsemaan saalistajia tai saaliseläimiä, jäivät todennäköisesti henkiin. Ne jotka eivät huomanneet syy-yhteyttä vaikkapa vatsakivun ja tietyn tyyppisten hedelmien syönnin välillä selvisivät huonommin.

Pelkkä havainnointi tuottaa kuitenkin vain hypoteeseja ja johtaa helposti uskomuksiin, joilla ei ole tekemistä todellisuuden kanssa. Tämän vuoksi tieteellinen metodi korostaakin kokeiden merkitystä: hypoteesi pitää varmentaa vaikkapa kaksoissokkotestillä. Ilman tieteellistä metodia ajaudumme pseudotieteisiin kuten astrologiaan ja New Age -ilmiöihin, joissa varmistamattomat hypoteesit hyväksytään sellaisinaan.

Tapahtumien todennäköisyyksiin liittyy paljon uskomuksia. Me ihmiset yleistämme sattumuksia ja helposti korostamme itseämme kohdanneita yhteensattumia. Ajatelkaamme vaikkapa ns. enneunia. Olettakaamme, että näemme (ja muistamme seuraavina päivinä) keskimäärin sata unta vuodessa. Oletetaan, että joka miljoonas uni vastaa likimäärin jotain lähiaikojen tapahtumaa. Suomen väestö näkee noin 500 miljoonaa unta vuodessa, joista kertyy 500 potentiaalista enneunta vuodessa. Kukaan ei tietenkään kerro tuttavilleen unista, jotka eivät vastaa tulevaisuuden tapahtumia, mutta luultavasti ainakin muutama näistä 500:sta "enneunesta" päätyy lopulta jonkin lehden palstoille. Ja kas kummaa, taas tuli uusi todiste unien ennustuskyvystä.

Kun ihminen virittyy seuraamaan ympäristöään tietyin odotuksin, löytää hän yllättävän paljon todisteita näkökulmalleen – ja unohtaa vastaesimerkit. Arkipäiväinen esimerkki tästä on autokauppa: jos ostan itselleni tietyn merkkisen auton, näen kohta liikenteessä ylen määrin samanlaisia autoja. Hyvä esimerkki on myös viereisten kassajonojen nopeus: moni pohtii, miksi aina joutuu hitaimpaan kassajonoon. Kummallisuutta voi selittää esimerkiksi seuraavasti: jos oman jononi kummallakin puolella on kassajono, on hyvin todennäköistä, että jompikumpi näistä on omaani nopeampi.

Osakemarkkinat tai uhkapeli on esimerkki kollektiivisesta harhasta. Häviäjät harvoin kertovat epäonnestaan mutta voittajat nousevat esille. Täten peliautomaatti ääntelee ja vilkuttaa valoja voiton sattuessa. Ihmisille saattaa siten tulla illuusio huomattavien voittojen mahdollisuuksista, vaikka todellisuudessa useimmat osakemarkkinoille tai uhkapeliin osallistujista häviäisivät panoksensa. Samaan ideaan perustuvat ketjukirjeet ja erilaiset "rikastu nopeasti" -huijaukset.

Ihmeellistä mutta todennäköistä

Todennäköisyyksien laskeminen johtaa monenlaisiin yllättäviin huomioihin. Ajatelkaamme esimerkiksi todennäköisyyttä sille, että ihmisryhmästä löytyy henkilöitä, joilla on sama syntymäpäivä. Jotta voisimme olla varmoja tästä, täytyisi joukossa olla 367 ihmistä (selitä miksi!). Samojen syntymäpäivien lähes varmaan esiintymiseen tarvitaan kuitenkin paljon vähemmän ihmisiä. Esimerkiksi Tieteellinen laskenta Oy:ssä (CSC) on 70 työntekijää ja todennäköisyys sille, että kahdella tai useammalla on sama syntymäpäivä, on yli 99,9 % (todennäköisyys saadaan jakamalla luku $365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times 296$ luvulla 365^{70} ja vähentämällä tulos luvusta 1).

Voit itse tarkistaa, että jo 23 ihmisen joukosta löytyy samoja syntymäpäiviä 50 %:n todennäköisyydellä. Toisaalta CSC:n 70:n ihmisen joukosta löytyy vain 17 %:n todennäköisyydellä ihminen, jolla on sama syntymäpäivä kuin minulla.

Se että jotain tapahtuu juuri minulle on paljon epätodennäköisempää kuin että jotain tapahtuu jollekulle. Tarina "tutun tutulle" tapahtuneesta ihmeellisestä asiasta pitää siis tilastollisessa mielessä paikkansa. Ja jos kirjaamme ylös mitä tahansa yhteensattumia, löytyy niitä paljon enemmän kuin selvästi rajattuja tapahtumia. Onkin hyvin epätodennäköistä, ettei jotain ihmeellistä tapahdu jossain jollekulle. Tämän ymmärtääkseen tarvitsee vain mietiskellä maailman kuutta miljardia ihmistä: tästä joukosta löytyy kyllä mitä ihmeellisimpiä kohtaloita.

suomi	engl/UK	engl/USA	10^n, n	SI-etuliite (etymologia)		
tuhat	thousand	thousand	$3 = 1 \times 3$	k	kilo	(kr chilioi=1000)
miljoona	million	million	$6 = 2 \times 3$	M	mega	(kr megas, iso)
miljardi	milliard	billion	$9 = 3 \times 3$	G	giga	(kr gigas, jätti)
biljoona	billion	trillion	$12 = 4 \times 3$	T	tera	(kr teras, hirviö; myös tetra = 4)
1000 bilj.	1000 bill.	quadrillion	$15 = 5 \times 3$	P	peta	(kr penta = 5)
triljoona	trillion	kvintillion	$18 = 6 \times 3$	E	exa	(kr hexa = 6)
1000 trilj.	1000 trill.	sextillion	$21 = 7 \times 3$	Z	zetta	(lt septem = 7)
kvadriljoona	quadrillion	septillion	$24 = 8 \times 3$	Y	yotta	(lt octo = 8)
1000 kvadr.	1000 quadr.	octillion	$27 = 9 \times 3$			
kvintiljoona	quintillion	nonillion	$30 = 10 \times 3$			

Taulukko 1: Lukusanat eri maissa (lähde: **Olli Serimaa**, CSC)

Lisää aiheesta

Jack Cohen, Ian Stewart: That's amazing isn't it?, New Scientist, January 1998.

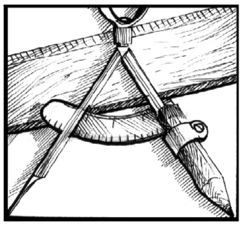
Juha Haataja: When We Are Lead Astray, CSC News, 3/1998.

L. Krauss: Fear of Physics: A Guide for the Perplexed, Basic Books, 1994.
Myös suomeksi: Oleta pyöreä lehmä, Art House, 1994.

John Allen Paulos: Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences, Vintage Books, 1990.
Myös suomeksi: Numerotaidottomuus. Art House, 1991.

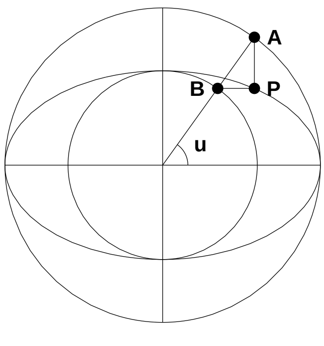
Carl Sagan: The Demon-Haunted World: Science as a Candle in the Dark, Ballantine Books, 1997.

Juha Haataja



Geometriakulma: Ellipsin parametriesitys ja mitä sillä voi tehdä

Palattakoon aluksi viidenteen geometriakulmaan ja ellipsin piirtämiseen pisteittäin:



Asettamalla ellipsin keskipisteestä säde, joka leikkaa a- ja b-säteiset ympyrät pisteissä A ja B, löydetään kuvan konstruktiolla ellipsin piste P. Jos säteen suuntakulma on u, saadaan trigonometrian avulla pisteen $P = (x, y)$ koordinaateille

$$x = a\cos u, \qquad y = b\sin u.$$

Koko ellipsi saadaan, kun annetaan kulmalle u arvot täyden kierroksen alueelta $[0, 2\pi[$.

On saatu ellipsin *parametriesitys*: Jokaisen ellipsin pisteen *paikkavektori*, so. keskipisteestä ellipsin pisteeseen osoittava vektori voidaan esittää muodossa

$$\vec{r}(u) = a\cos u\,\vec{i} + b\sin u\,\vec{j}, \quad 0 \le u < 2\pi.$$

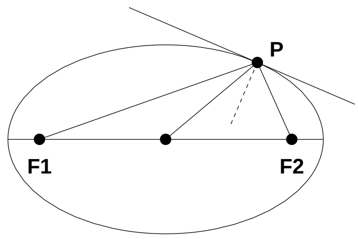
Muuttujaa u kutsutaan *parametriksi* tai ellipsin tapauksessa (muitakin käyriä voidaan nimittäin tarkastella niiden parametriesityksen avulla) myös nimellä *eksentrinen anomalia*.

Paikkavektorin derivaatta

$$\vec{t}(u) = \vec{r}\,'(u) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(u+h) - \vec{r}(u)}{h} = -a\sin u\,\vec{i} + b\cos u\,\vec{j}$$

antaa ellipsin *tangenttivektorin*. Erotusosamäärävektori $[\vec{r}(u+h) - \vec{r}(u)]/h$ on nimittäin parametriarvoja $u+h$ ja u vastaavien pisteiden välisen jänteen suuntainen ja rajaprosessissa $h \to 0$ pisteet lähestyvät toisiaan, jolloin jänne kääntyy tangentin suuntaiseksi.

Parametriesityksen avulla voidaan helposti osoittaa ellipsin heijastusominaisuus: jos polttopisteestä lähtenyt säde heijastuu ellipsin kehästä heijastumislain mukaisesti, se kulkee toisen polttopisteen kautta. Tämän näyttämiseksi riittää laskea polttopisteistä ellipsin pisteeseen osoittavien vektoreiden ja tangenttivektorin väliset kulmat ja todeta nämä yhtä suuriksi.



Polttopisteistä $F_1 = (-c, 0)$ ja $F_2 = (c, 0)$ parametriarvoa u vastaavaan ellipsin pisteeseen osoittavat vektorit ovat

$$\vec{p}_1 = (a\cos u + c)\vec{i} + b\sin u\,\vec{j} \quad \text{ja} \quad \vec{p}_2 = (a\cos u - c)\vec{i} + b\sin u\,\vec{j}.$$

Näiden pituudet ovat $|\vec{p}_1| = a + c\cos u$ ja $|\vec{p}_2| = a - c\cos u$; lasku, joka on melko suoraviivainen, mutta jossa tarvitaan ellipsille karakteristista yhtälöä $a^2 = b^2 + c^2$, jääköön lukijan suoritettavaksi.

Tangenttivektorin $\vec{t}(u)$ ja vektoreiden $\vec{p}_1$ ja $\vec{p}_2$ välisten kulmien kosinit saadaan lausekkeista

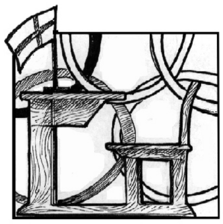
$$\frac{\vec{t}\cdot\vec{p}_1}{|\vec{t}|\,|\vec{p}_1|} \quad \text{ja} \quad \frac{\vec{t}\cdot\vec{p}_2}{|\vec{t}|\,|\vec{p}_2|}.$$

Laskemalla saadaan – yksityiskohdat jääkööt taas lukijalle –

$$\frac{\vec{t}\cdot\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|} = -c\sin u \quad \text{ja} \quad \frac{\vec{t}\cdot\vec{p}_2}{|\vec{p}_2|} = c\sin u.$$

Tällöin kosinit ovat vastalukuja ja niitä vastaavat kulmat siis muotoa α ja $180° - \alpha$, mikä vektoreiden suunnat huomioon ottaen merkitsee juuri heijastumislain mukaista tilannetta.

Simo K. Kivelä



Matematiikkaolympialaiset: hopeaa 17 vuoden jälkeen!

Romanialaisella matemaatikolla **Tiberiu Romanilla** oli 40 vuotta sitten idea, jonka hän toteutti. Kun kerran Romaniassa ja monissa sosialistisissa veljesmaissa pidettiin koululaisten matematiikkakilpailuja, niin miksei voitaisi pitää yhteiset, kansainväliset kilpailutkin? Ja 23. heinäkuuta 1959 kokoontuivatkin romanialaisten lisäksi Unkarin, Puolan, Tšekkoslovakian, Bulgarian, DDR:n ja Neuvostoliiton joukkueet Bukarestiin Kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin.

Tiberiu Roman ei varmaan arvannut, että hän seisoisi 15. heinäkuuta 1999 83-vuotiaana televisiokameran edessä Bukarestin Kuninkaallisen palatsin konserttisalissa 40. kansainvälisten matematiikkaolympialaisten avajaisissa, 81 eri maata edustavien 450 kilpailijan ja epälukuisen toimitsija- ja huoltajajoukon ympäröimänä, kuitenkin aloittamassa kilpailua, jonka rakenne ja henki on pysynyt jotakuinkin sellaisena, jollaiseksi hän työtovereineen sen hahmotti.

Romania on matematiikkakilpailujen kärkimaita. Romanialaiset ratkaisevat vaikeita tehtäviä, ja laativat niitä. Romanialaisten matematiikkakilpailujen dokumentaatiosta saadaan aina lukea tehtävän laatijan nimi. Joka järjestää kansainväliset matematiikkaolympialaiset, hän saa suorittaa eri maista lähetettyjen tehtäväehdotusten esivalinnan, ennen kuin kaikkien osallistujamaiden muodostama kansainvälinen tuomaristo pääsee lopullista valintaa tekemään. Romanian raati oli ankara – niin että olympialaisten tehtäväsarjasta tuli todella vaativa. Ensi kertaa moneen vuoteen yksikään kilpailija ei saanut täyttä 42 pistettä, ja mitalirajat jäivät totuttua alemmas. Olympialasten sääntöjen mukaan palkintoja saa enintään puolet kilpailijoista, ja kulta-, hopea- ja pronssimitalien lukumäärien tulee olla mahdollisimman tarkkaan suhteessa 1 : 2 : 3. Säännön mukaan ne 38 kilpailijaa, joiden pisteet olivat ainakin 28, palkittiin kultamitalilla. Parhaaseen pistemäärään, joka oli 39, pääsivät Ukrainan **Maksim Fedortšuk**, Romanian **Stefan Hornet** ja Unkarin **Tamas Terpai**. Hopeamitaliin oikeutti 19 pisteen suoritus ja pronssimitaliin 12 pisteen.

Tehtävien keskinäistä vaikeutta voi arvioida vaikkapa katsomalla kultamitalinsaajien keskimääräisiä pisteitä. Helpoin tehtävä oli numero 1, josta kultamitalinsaajat saivat 6,8 pistettä 7:stä, sitten tehtävä 2 (6,4), tehtävä 4 (6,3), tehtävä 5 (6,1) ja vaikeimpina tehtävät 3 ja 6 (3,7 pistettä). – Suomen joukkueen kannalta tehtävien vaikeusjärjestys oli hiuikan toinen: tehtävä 1 (2,8), 4 (2,5), 3 (2,3), 2 (1,5), 6 (1,3), ja hännänhuippuna klassisen geometrian tehtävä 5: keskiarvo 0,3 pistettä.

Maiden paremmuutta ei matematiikkaolympialaisissa virallisesti mitata, epävirallisesti sitäkin innokkaammin. Parhaan yhteispistemäärän kokosivat Venäjä ja Kiina, Vietnamin, Romanian ja Bulgarian seuraamina. Ennakkosuosikit Iran ja Yhdysvallat menestyivät odotettua heikommin.

Suomen joukkue oli valittu perinteisin kuvioin. MAOLin lukiokilpailun kaksi kierrosta, Pohjoismainen matematikkakilpailu huhtikuussa sekä valmennusrenkaaseen valittujen kirjevalmennusvastaukset antoivat valitsijoille, Suomen matemaattisen yhdistyksen valmennusjaoston aktiiveille tietoa joukkueeseen kelpuutettavista, ja toukokuussa Päivölän opistossa **Kerkko Luoston**, **Jari Lappalaisen**, **Jouni Seppäsen** ja tämän kirjoittajan johdolla pidetyn valmennusviikon kokeet ratkaisivat lopullisen valinnan. Suomen joukkueessa kilpailivat **Anne-Maria Ernvall** Turusta, **Tuomas Hytönen** Espoosta, **Riikka Korte** Helsingistä, **Mikko Leppänen** Ruskosta, **Hannu Niemistö** Loimaalta ja **Vesa Riihimäki** Ähtäristä. Hytönen, Leppänen ja Riihimäki olivat suorittaneet lukionsa Päivölässä. Joukkueen johtajana Romaniaan matkusti Kerkko Luosto jo 10. heinäkuuta, pääjoukko seurasi allekirjoittaneen johdossa 13.7.

Bukarestin lentokentällä kirjoittajaa odotti iloinen yllätys. Vastaanottoryhmään oli liittynyt matematiikkaolympialaisten järjestelytoimikunnan puheenjohtaja professori **Ioan Cuculescu**, tuttava monien matematiikkaolympialaisten ajalta, nyt jo olympiamatkat nuoremmilleen jättänyt ystävällinen herrasmies.

Joukkue majoittui Bukarestin teknillisen korkeakoulun asuntolaan, kohtuullisiin joskaan ei loisteliaisiin tiloihin, pohjoismaisten joukkueiden naapurustoon, ja bukarestilaisoppaan, **Alina Drăganin** hoiviin. Kahden hengen huoneissa oli jonkin verran kuusi- ja useampikinjalkaisia alivuokralaisia. Kisojen yksi pääsponsori oli romanialainen virvoitusjuomatehdas, ja kivennäisveden sekä virvoitusjuomien tarjonta oli riittävää, niin asuntolassa kuin muutenkin. Kuuma sää toki vaatikin nestetankkausta.

Yhden ilmastoontotuttelupäivän jälkeen seurasi avajaisseremonia, johon sekä puhe- että musiikkiohjelmaa oli varattu riittävästi. Arvovaltaisin puhuja oli Romanian opetusministeri **Andrei Marga**, sydämellisin professori Cuculescu. Seuraavina kahtena päivänä pidettiin itse kilpailut, molempina päivinä kolme tehtävää neljän ja puolen tunnin kokeissa. Kilpailupaikka oli Bukarestin teknillinen korkeakoulu. Helteinen sää viileni kilpailupäiviksi melko miellyttäväksi.

Seuraavina päivinä kilpailijat saattoivat vaihtaa vapaalle tuomariston ryhtyessä selvittelemään vastauksia ja arvostelemaan niitä mahdollisimman tasapuolisesti. Mitalit olivat selvillä heinäkuun 19. päivän iltana, jolloin niin joukkueet kuin tuomaristokin kokoontuivat puutarhajuhlaan syömään grillituotteita ja katselemaan aika huonosti palanutta juhannuskokon kaltaista nuotiota.

Suomen joukkueen osalta tulokset olivat tyydyttävät. Menestyksemme lievä nousutrendi oli taittunut edellisen kesän olympialaisissa Taiwanissa, kun joukkue oli saanut vain 30 pistettä, jäänyt ilman mitaleja ja sijoittunut sijalle 60. Nyt tehtävät olivat vaikeampia, mutta pisteitä tuli 65 ja sijoitus 43. Lievästi jäivät harmittamaan Ruotsin ja Norjan pisteet: 66 ja 67. Norjaa tosin avusti "vierastyöläinen", vasta 13-vuotias unkarilaissyntyinen ihmelapsi **David Kunszentik**, joka sai 22 pistettä ja hopeamitalin.

Erityinen ilonaihe Suomelle oli Hannu Niemistön hopeamitali, joka sekin tuli 22 pisteen suorituksesta. Peräti 17 vuotta ehti kulua edellisestä Suomen matematiikkaolympialaishopeasta. Hannun ansiolistalla oli jo pronssimitali vuoden 1997 matematiikkaolympialaisista. Sitkeä työ ja lahjakkuus saivat palkintonsa. Kaikki Suomen joukkueen jäsenet täyttivät kunnnialla paikkansa. Vesa Riihimäki keräsi 11 pistettä ja sai kunniamaininnan, Anne-Maria Ernvall ja Riikka Korte saivat 9, Mikko Leppänen 8 ja Tuomas Hytönen 6 pistettä.

Palkintojenjakoa ja loppuillallista edelsi vielä kilpailijoiden ja tuomariston yhteinen retki Karpaateille. Branin linna on saanut Draculan linnan maineen, ilmeisesti aivan ansiotta. Linnan sisutuksen makaaberi yksityiskohta oli Romanian 10 vuotta sitten syrjäytetyn presidentin ja diktaattorin ampuma karhu. Toinen tutustumiskohde oli Romanian taannoisen kuningasperheen sadunomainen vuoristolinna Sinaiassa.

Hannu Niemistö ja muut palkinnonsaajat saivat mitalinsa Romanian uskomattoman prameassa parlamenttitalossa, maailman toiseksi suurimmassa rakennuksessa, jonka **Ceausescu** oli rakennuttanut hallituspalatsikseen. Päättäjäisissä piti puheen itse Romanian presidentti **Emil Constantinescu**, matematiikkaolympialaisten suojelija. Matematiikkaa arvostetaan Romaniassa!

Joukkue palasi Suomeen 22. heinäkuuta. Matka ei ollut seikkailuton: Münchenin lentokentällä se keskeytyi lentokoneeseen kohdistuneen pommiuhkan vuoksi.

Matti Lehtinen

Joukkueiden yhteispisteet

Joukkueen vahvuus 6. Vajaiden joukkueiden koko on ilmoitettu maan nimen kohdalla.

1.	Kiina	182	**22.**	Latvia	86	**43.**	Bosnia	65	**64.**	Kypros	35
	Venäjä	182	**23.**	Italia	82		Suomi	65		Indonesia	35
3.	Vietnam	177	**24.**	Mongolia	78	**45.**	Argentiina	63	**66.**	Albania (5)	34
4.	Romania	173		Israel	78	**46.**	Espanja	60		Azerbaidzan	34
5.	Bulgaria	170	**26.**	Kuuba	77	**47.**	Thaimaa	57	**68.**	Trinidad	33
6.	Valkovenäjä	167		Etelä-Afrikka	77		Kreikka	57	**69.**	Viro (4)	30
7.	Korea	164	**28.**	Itävalta	75	**49.**	Kolombia	55	**70.**	Portugali	29
8.	Iran	159		Brasilia	75		Tsekinmaa	55	**71.**	Luxemburg (2)	26
9.	Taiwan	153	**30.**	Kanada	74	**51.**	Liettua	54	**72.**	Uruguay (4)	25
10.	Yhdysvallat	150		Hollanti	74	**52.**	Meksiko	53	**73.**	Filippiinit (4)	24
11.	Unkari	147	**32.**	Ranska	73		Uusi-Seelanti	53	**74.**	Tunisia (4)	22
12.	Ukraina	136		Sveitsi	73	**54.**	Tanska (5)	51	**75.**	Guatemala	19
13.	Japani	135		Hongkong	73		Belgia	51	**76.**	Kirgistan (3)	15
14.	Jugoslavia	130	**35.**	Kazakstan	72	**56.**	Moldova	50	**77.**	Turkmenistan (2)	13
15.	Australia	116	**36.**	Singapore	71	**57.**	Marokko	48	**78.**	Kuwait (4)	10
16.	Turkki	109		Makedonia	71	**58.**	Slovenia	46		Peru (2)	10
17.	Saksa	108	**38.**	Georgia	68	**59.**	Uzbekistan	42	**80.**	Venezuela (2)	8
18.	Intia	107	**39.**	Norja	67	**60.**	Makao	41	**81.**	Sri Lanka (1)	6
19.	Puola	104		Armenia	67		Islanti	41			
20.	Iso-Britannia	100	**41.**	Kroatia	66	**62.**	Irlanti	38			
21.	Slovakia	88		Ruotsi	66	**63.**	Malesia	37			

Tehtävät

1. Määritä kaikki äärelliset tasojoukot S, joissa on vähintään kolme pistettä ja jotka täyttävät seuraavan ehdon: kun A ja B ovat joukon S kaksi eri pistettä, joukko S on symmetrinen janan AB keskinormaalin suhteen.

2. Olkoon n kiinteä kokonaisluku, jolle $n \geq 2$.
(a) Määritä pienin sellainen vakio C, että kaikilla reaalisilla $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ pätee epäyhtälö

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \Big(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \Big)^4 .$$

(b) Määritä, milloin yhtäsuuruus on voimassa, kun C on kuten yllä.

3. Tarkastellaan $n \times n$-lautaa, missä n on kiinteä positiivinen parillinen kokonaisluku. Lauta koostuu n^2 yksikköruudusta. Kahden eri ruudun sanotaan olevan *vierekkäiset*, jos niillä on yhteinen sivu.

Laudan N ruutua merkitään niin, että jokaisen laudan (merkityn tai merkitsemättömän) ruudun vieressä on vähintään yksi merkitty ruutu.

Määritä luvun N pienin mahdollinen arvo.

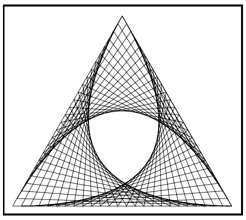
4. Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen parit (n, p), että p on alkuluku, $n \leq 2p$ ja $(p-1)^n + 1$ on jaollinen luvulla n^{p-1}.

5. Ympyrät Γ_1 ja Γ_2 sisältyvät ympyrään Γ ja sivuavat ympyrää Γ eri pisteissä M ja N. Ympyrä Γ_1 kulkee ympyrän Γ_2 keskipisteen kautta. Ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 leikkauspisteiden kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän Γ pisteissä A ja B. Suorat MA ja MB leikkaavat ympyrän Γ_1 pisteissä C ja D.

Todista, että suora CD sivuaa ympyrää Γ_2.

6. Määritä kaikki sellaiset kuvaukset $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että jokaisella $x, y \in \mathbb{R}$ on voimassa yhtälö

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x\, f(y) + f(x) - 1.$$



Edellisen Solmun kansikuvasta

Solmussa 5/1998-1999 on **Panu Erästön** suunnittelema kansikuva, jonka keskelle jäävän alueen Erästö arvelee olevan Reuleaux'n kolmio. Epäilin ja tarkistelin hieman: Reuleaux'n kolmio muodostuu ympyrän kaarista. Hetken kiroiltuani sain kuvion verhokäyristä parametriesitykseksi jotain muuta kuin ympyrän parametriesityksen.

Verhokäyrä[5] yhden parametrin käyräperheelle $(f(t,c), g(t,c))$, jonka tässä tapauksessa muodostavat tasasivuisen kolmion kahden sivun vastinpisteiden välille piirretyt janat,

$$f(t,c) = (1-c)f(t,0) + cf(t,1)$$
$$g(t,c) = (1-c)g(t,0) + cg(t,1)$$

missä $t, c \in [0,1]$, saadaan ratkaisemalla

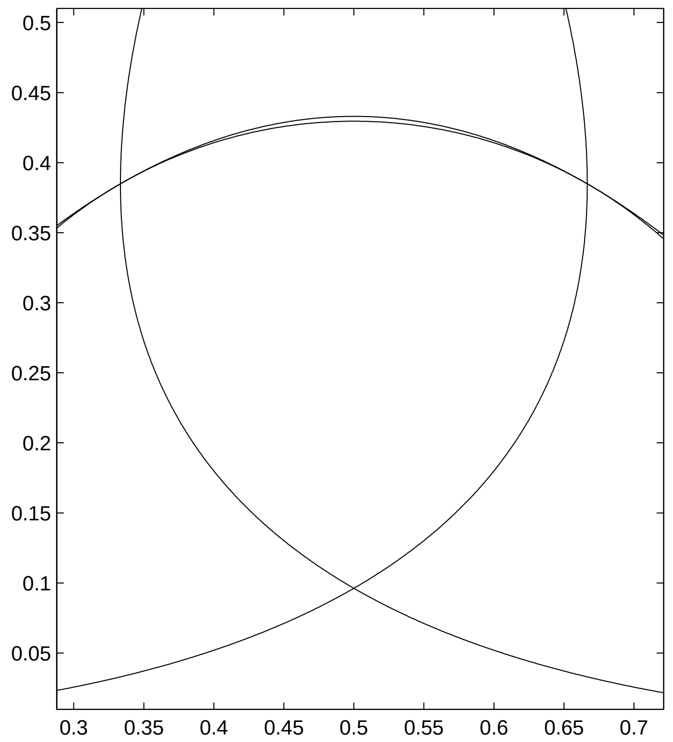
$$\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Tuloksena on verhokäyrä, jonka x- ja y-koordinaatit ovat parametrin t suhteen paraabeleja, joten verhokäyrä ei ole osa ympyrän kaarta.

Ohessa on Matlabilla piirretty kuva tilanteesta. Viimeistely jäi hieman puutteelliseksi, joten en enää kykene kertomaan, kumpi käyristä on ympyrän kaari ja kumpi ei.

Mikko Harju

[5] http://www.treasure-troves.com/math/Envelope.html



Virheitä viime Solmun tehtävissä

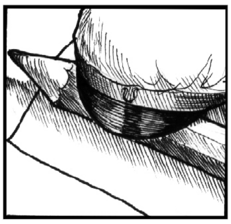
Solmun edellisessä numerossa julkaistut tehtävät numerot 49 ja 52 olivat menneet pahasti pieleen. Tässä oikeammat versiot:

49. Todista, että kaikilla $n \geq 1$ on olemassa sellainen m, että

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}.$$

52. Osoita, että lukua $100 + 60\sqrt{3}$ ei voi kirjoittaa muotoon $(x + y\sqrt{3})^2$ millään kokonaisluvuilla x, y.

Matti Lehtinen



Teetä, tutorialeja ja matematiikkaa

Viime keväänä kun suurin osa luokkatovereistani ja muista ylioppilaista luki tiiviisti pääsykokeisiin, minä sain viettää jo lomaa. IB-kirjoitukset olivat ohi ja opiskelupaikkakin oli tiedossa. Syksyllä, jos vain saisin tarpeeksi pisteitä IB-kirjoituksissa, aloittaisin opintoni Oxfordin yliopistossa Englannissa.

Nyt kun ensimmäisen vuoden opinnot alkavat olla lopuillaan, voi vain ihmetellä kuinka omituinen päähänpisto Oxfordiin tulo loppujen lopuksi oli. Opiskelu englantilaisissa yliopistoissa on hyvin koulumuotoista, akateeminen vapaus on tuntematon käsite. Opiskelu on kokopäiväistä ja rankkaa. En edes voisi kuvitella tekeväni töitä samalla, kuten monet yliopisto-opiskelijat Suomessa tekevät.

Oxfordin yliopisto poikkeaa vielä kaikista muista yliopistoista, kenties Cambridgeä lukuunottamatta, vanhoilla traditiollaan ja tavoillaan. Jotenkin tuntuu, että Oxford on ihan oma maailmansa, joka on jämähtänyt jonnekin ties-mille vuosisadalle. Oxfordin perinteistä suomalaisia ystäviäni huvittaa eniten se, että minulla on täällä koulupuku. Tai ei aivan, mutta kaikilla pitää olla akateeminen asu, johon kuuluu mm. hassu nelikulmainen hattu, mortar board. Tätä pukua ei tarvitse pitää sentään ihan joka päivä, mutta tentteihin ei pääse, ellei ole pukeutunut kyseiseen asuun. Selittäminen ei auta: jos vaikka mortar board jäi kotiin, tenttiin ei pääse ilman sitä. Samoin rehtorin puhuttelussa pitää olla akateemisen asun kaapuosa päällä, joissain collegeissa se vaaditaan myös jokaiseen ruokailuun.

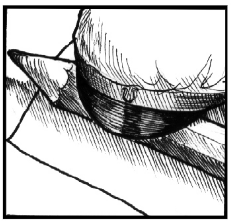
Ensimmäisenä vuonna Oxfordissa kaikki opiskelijat lukevat samoja kursseja, ovat samoilla luennoilla samaan aikaan ja tekevät samat laskuharjoitukset ja vuoden lopussa sitten samat tentit – honour moderationit. Ne ovat minulla edessä parin viikon päästä, tämän vuoden luennot ovat jo ohitse ja nyt on aikaa kerrata ahkerasti analyysia, algebraa, matemaattisia malleja, fysikaalista soveltavaa matematiikkaa ja ei-fysikaalista soveltavaa matematiikkaa. Jotka kaikki sitten tentitään kahden ja puolen päivän aikana. Toisena ja kolmantena (ja mahdollisesti neljäntenä) vuonna opiskelijat saavat valita, mihin matematiikan osa-alueisiin keskittyvät. On täysin mahdollista lukea pelkkää puhdasta tai sitten vastaavasti soveltavaa matematiikkaa. Bachelor of Arts -tutkinto suorietaan kolmessa vuodessa, ja jos haluaa suorittaa Master of Mathematics -tutkinnon, siihen vaaditaan yksi lisävuosi. Eli voi valita, haluaako lukea kolmen vai neljän vuoden kurssin.

Itse opiskelu koostuu luennoista, tehtävistä ja tutorialeista. Luentoja on 7–11 tuntia viikossa ja sen lisäksi on sitten kaksi tutorialia, yksi puhtaan matematiikan ja yksi sovelletun matematiikan. Tutorialit vastaavat Suomen yliopistojen laskuharjoituksia, sillä erotuksella, että tutorialeissa on vain kaksi opiskelijaa ja sitten tutor – opettaja, yleensä myös yliopiston luennoija. Tehtävät, joita viikossa pitää tehdä yleensä 30, pitää palauttaa puhtaaksi kirjoitettuna tutorille edellisenä päivänä, jotta hän voi korjata ne seuraavan päivän tutorialia varten. Tutorialissa laskut käydään sitten yhdessä läpi ja korjataan mahdolliset virheet, tai sitten muuten vain jutellaan mukavia.

Tutor on ensisijaisesti henkilökohtainen opettaja, ja hänen on tarkoitus pitää myös huolta oppilaansa kaikenlaisesta hyvinvoinnista, ei yksin akateemisesta. Joten joskus olemme keskustelleet siitä, että Englannista ei saa ruisleipää, tai että täällä ei pääse saunaan. Joskus päästään vähän liiankin henkilökohtaisiin asioihin, sillä onpa tutor minulle pariinkin otteeseen ehdottanut, että minun pitäisi juhlia enemmän ja viettää railakkaampaa opiskelijaelämää. Ihmettelen kyllä, milloin opiskelijaelämälle on aikaa, sillä oman kokemukseni perusteella opiskelu ja elämä ovat toistensa komplementteja.

Yhtä kaikki elämä Oxfordissa rupeaa alun kulttuurishokin jälkeen sujumaan. Kaupunki on aivan täynnä ihania keskiaikaisia rakennuksia ja puistoja on joka puolella. Olen oikein onnellinen, että minulla on tilaisuus asua näin hienossa paikassa. Yliopistolla on lukuisia järjestöjä, joissa voi käyttää vapaa-aikaansa, ja asuntolassa asuminen tuo sosiaalisen puolen elämään. Vaikka välillä ärsyttääkin, kun naapuri soittaa livejazzia joskus 3–4 a.m. … Mutta kaikkeen tottuu, vasemmanpuoleiseen liikenteeseen, brittiaksenttiin, small talkiin, teen juomiseen, sandwicheihin … ja yliopistomatematiikkaan.

Pirita Paajanen



Tyttökoulu kannustaa korkeatasoiseen matemaattisten aineiden opiskeluun: kokemuksia Luxemburgista

Kommentti Solmusta n:o 4/1998-99

Luxemburgista löytyy eräänlainen ratkaisu Solmussa esiin tuotuun ongelmaan: Ecole Privée Fieldgen[6]. Se on yli sata vuotta sitten perustettu (katolinen) tyttökoulu, jonka alkuperäinen tavoite oli opastaa tyttöjä koti- ja maatalouteen, mutta jonka nykyistä olemassaoloa koulun edustajat perustelevat juuri niillä syillä, joita **Marjatta Näätänen** toi esiin otsikossa mainitussa Solmussa.

Koulu on hyvin varustettu, tietokoneluokissa 250 konetta, koulun katolla observatorio jne. Koulun oppilaat ovat iältään 12:sta 19:een ja koulua voi tavoitteista riippuen käydä 3, 5 tai 7 vuotta. Seitsenvuotinen putki on yliopistoon johtava. Oppilaita tulee kouluun kaikkialta maasta, osa asuu koululla. Viimeisen 20 vuoden aikana oppilasmäärä on kaksinkertaistunut ollen nyt noin 1400 ja suuren suosion takia koulu joutuu rajoittamaan oppilasmäärää. Opettajakunnasta noin puolet on miehiä. Koulun edustajat sanovat Saksassa ja Sveitsissä tehtyjen tutkimusten osoittavan, että tyttökoulun käyneistä suhteellisesti suurempi osa jatkaa yliopisto-opintoja matematiikassa, fysiikassa ja tietotekniikassa kuin sekakoulun käyneistä tytöistä ja että ero on tilastollisesti merkitsevä.

Fieldgen joutuu käyttämään samaa opetusministeriön vuosittain vahvistamaa opetussuunnitelmaa kuin maan muutkin koulut. Koulun alkaessa opettajat saavat ministeriöstä kirjan, jossa on annettu kunkin oppiaineen opetettavat sisällöt sekä ajankäyttösuunnitelma. Kirjassa on lueteltu oppikirjasta läpikäytävät kappaleet, esimerkit sekä harjoitustehtävät. Luxemburgissa on ylioppilaskoettamme vastaava valtakunnallinen päättökoe, jossa on osallistuttava kahdeksan aineen kokeeseen. Keskimäärin neljäsosa oppilaista reputtaa. Näissä raameissa opettajat pyrkivät löytämään tyttöjä motivoivan lähestymistavan matemaattisiin aineisiin. Opettajia on osallistunut esim. Saksassa järjestettyihin seminaareihin, joissa pohditaan, miten fysiikkaa tulisi opettaa tytöille. Taustalla on käsitys, että tytöt ja pojat omaksuvat eri tavalla tiettyjä oppiaineita. Tyttöjä pyritään ohjaamaan heidän taipumuksiaan vastaaville aloille, vaikka nämä eivät olisi tyypillisiä "naisten aloja". Opettajien mielestä koulussa esiintyy vähemmän stereotyyppistä ajattelua kuten "tytöt ovat huonoja matematiikassa, pojat kielissä" ja näin tytöille tulee parempi itseluottamus matematiikassa.

Oppilaat tulevat kouluun 12 vuoden ikäisinä. Kolmen ensimmäisen kouluvuoden aikana ohjelma on matematiikan osalta kaikille sama. Matematiikkaa opetetaan 4,

[6] `http://www.restena.lu/epf/`

3 ja 3,5 tuntia viikossa. Kahdelle seuraavalle vuodelle oppilas voi valita joko kirjallisuus- tai tieteellispainotteisen linjan. Matematiikan viikkotuntimäärä on vastaavasti 3 ja 4. Lukiotamme vastaava osuus koulusta (kaksi viimeistä kouluvuotta) jakautuu kieli-, reaali- ja matemaattiseen linjaan. Matemaattisella linjalla matematiikkaa opiskellaan aluksi 7 viikkotuntia ja viimeisellä luokalla 9 viikkotuntia. Fysiikkaa ja kemiaa on yhteensä 7 viikkotuntia molemmilla luokilla.

Matematiikka opiskellaan ranskaksi. Sisältöjen painotukset poikkeavat eräiltä osin meikäläisistä. Geometria, vektorioppi ja analyyttinen geometria näyttää kietoutuvan yhdeksi kokonaisuudeksi. Analyyttiseen geometriaan perehdytään vektorioppia soveltaen ja varhaisessa vaiheessa käsitellään geometrisia kuvauksia. Opetus näyttäisi osin noudattavan spiraaliperiaatetta, sillä vektorioppiin palataan useasti aina syventäen. Myös vektoritulo sovelluksineen opetetaan ja geometristen kuvausten käsittely huipentuu matriisilaskentaan, jossa käsitellään 2×2- ja 3×3-matriisien ominaisuuksia. Myös kompleksiluvut ovat keskeisesti mukana kahden viimeisen kouluvuoden opetuksessa. Todennäköisyyslaskennasta käsitellään vain diskreettejä muuttujia ja kombinatoriikkaa sekä vähäsen tilastolaskentaa. Binomijakauma, geometrinen jakauma ja hypergeometrinen jakauma käsitellään. Sisältöjen painotus näyttäisi tukevan matemaattiseen ajatteluun suuntautumista, mikä onkin tärkeämpää kuin oppimäärän laajuus sinänsä. Täkäläistä suurempi tuntimäärä antaa mahdollisuuden oppimäärän kiireettömään läpikäyntiin.

Vaikka Fieldgen ei pyri olemaan eliittikoulu, joka vuosi koulun oppilaita on maan parhaan viiden prosentin joukossa. Koulun kasvava suosio ja sen oppilaiden hyvä menestyminen jatko-opinnoissa on yksi osoitus siitä, että Solmussa esiin nostettu ongelma on todellinen ja jotain konkreettista olisi tehtävä asian eteen. Fieldgen saattaisi olla hyvä opintoretken kohde näitä asioita pohtiville henkilöille.

Markku Halmetoja
<hamlet@mantta.fi>

Ovatko koulutusjärjestelyjemme valinnat oikeita?

Psykologian professori **Liisa Keltikangas-Järvisen** haastattelu julkaistiin 6. 6. 1999 Hufvudstadsbladetissa.

Keltikangas-Järvinen korostaa, että yhteiskunnan tulisi kiinnittää huomiota koulutusjärjestelyjen suhteen tehtäviin valintoihin. Tutkimustuloksiin viitaten hän kyseenalaistaa suurelta osin sen, mitä pidetään lastentarhasta alkaen läpi koko kouluajan luonnollisena ja hyvänä nyky-yhteiskunnassa.

1970-luvulla lainattiin tiettyjä piirteitä itänaapureista ja luovutettiin lasten kasvatus yhteiskunnalle, asiantuntijoille. Nyt ei kukaan edes mieti, millaisia arvoja lastentarhoissa lapset oppivat. Alle kolmevuotias ei hyödy ryhmässä olosta, jossa toimiminen ei ole sama asia kuin toimia sosiaalisesti. Jotta pieni lapsi oppisi toimimaan sosiaalisesti, on hänen ensin kehityttyvä yksilönä. Laumassa opitaan vain viidakon lait, ellei ole suuri joukko aikuisia ohjaamassa.

Sen sijaan myöhemmin, murrosiässä, lapsi tarvitsee vahvan ryhmän ympärilleen. Silloin hänelle kuitenkin annetaan luokaton lukio! Valitsemamme ratkaisut ovat aivan vääriä ja tämä tietenkin vaikuttaa myöhemmin.

Keltikangas-Järvinen korostaa, ettei hän tarkoita, että äitien olisi palattava kotiin hoittamaan lapsia. Hän puhuu erilaisesta päivähoitojärjestelmästä, jonka ei suinkaan tarvitse tulla kalliimmaksi kuin nykyinen.

Tutkimusten mukaan ujot lapset, joiden annetaan olla rauhassa ja kehittyä omaa vauhtiaan tulevat paremmin stressiä sietäviksi kuin alusta alkaen hyvin aktiiviset lapset. Työelämästä Keltikangas-Järvinen sanoo, että nykyisin on tultu äärimmäiseen pisteeseen työelämän hallitsevan aseman suhteen ihmisen elämässä.

Keltikangas-Järvinen ihmettelee myös, miksi ei kysytä, kuka oikein tarvitsee väkivaltaviihdettä. Jos ihmisen annetaan olla aivan niinkuin hän haluaa, vähenee ero ihmisen ja eläimen välillä. Kaikki etiikka, kulttuuri, sivistys on kovan työn tulosta. Ihminen ei ole luonnostaan kultivoitunut, vaan hän on oppinut nauttimaan näistä. Miksi emme voisi ponnistella kohti jotain korkeampaa ja parempaa, kysyy Keltikangas-Järvinen silläkin uhalla, että hänet leimattaisiin naiviksi tai moralistiksi. Hänen mielestään on kuitenkin ilahduttavia merkkejä näkyvissä. Tietty yksilön vastuu on tullut esiin, terve järki ja tavallinen jokapäiväinen elämä on noussut arvoon. On mahdollista, että ihmiset alkavat jälleen ottaa ohjat käsiinsä oman elämänsä suhteen.

Marjatta Näätänen, dosentti
HY matematiikan laitos
<marjatta.naatanen@helsinki.fi>