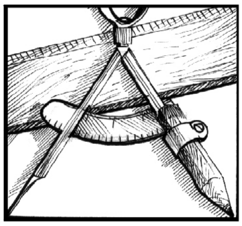


Tangram

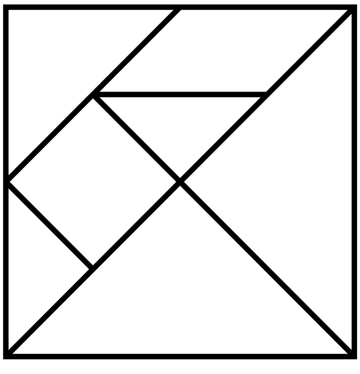
TUTUSTUTAAN TANGRAMIIN

Ensikohtaaminen

Tangram on kiinalainen palapeliä muistuttava ongelmakimppu. Siinä neliö on jaettu erimuotoisiin ja -kokoisiin paloihin, joita kääntelemällä ja siirtelemällä on tarkoitus rakentaa erilaisia mielenkiintoisia kuvioita.

Siinä missä eurooppalaisen palapelin palojen muodot ja määrät vaihtelevat vaikeustason mukaan, tangramissa palat ovat neliöstä aina samalla tavalla leikatut seitsemän palaa. Vaikeustasoa muutellaan rakennettavia kuvioita muutellen.

Tangram soveltuu kaikille, kuvioiden vaikeustaso vaihtelee hyvin helpoista todella vaikeisiin. Tekeminen ei myöskään lopu kesken, uusia kuvioita voi kehitellä lähes loputtomiin.



Synty Kiinassa

Tangramin synnystä on lukuisia erilaisia tarinoita, kaikki yhtä viihdyttäviä ja mielenkiintoisia. Yhteistä tarinoissa on vain pelin pitkä ikä. Mitään tarinaa ei ole onnistuttu todistamaan muita todenperäisemmäksi.

Yksi legenda kertoo tangramin syntyneen, kun kiinalainen mies yritti koota hajonnutta levyä. Neliön sijaan paloista syntyi erilaisia eläimiä, ihmisiä ja rakennuksia. Toisen tarinan mukaan vanha kiinalainen jumalana palvottu kirjailija kirjoitti seitsemän kirjaa Maan kehityksestä ja kuvitti ne tangram-kuvilla.

Itse pelin historian lisäksi myös nimen historia on tuntematon. Se saattaisi tulla vanhasta kiinalaisesta Tandynastiasta ja kreikan sanasta gramma, kirjoitettu. Toinen vaihtoehto on tangramin muodostuminen kirjoitusvirheiden kautta vanhasta englanninkielisestä sanasta trangam, koru tai lelu.

Painotuotteet tangramista

Ensimmäiset tangram-kirjat painettiin 1700- ja 1800-lukujen vaihteessa, vanhin säilynyt kiinalainen kirja on vuodelta 1813. Ensimmäisen kirjan jälkeen julkaistiin useita muita kirjoja. Kiinalaisissa kirjoissa tangramtehtäviin on liitetty selittäviä kirjoitusmerkkejä. Osa kuvioista on itsessään jo kirjoitusmerkkejä.

Maihinnousu länsimaihin

Eurooppaan tangram levisi 1800-luvun alussa melko pikaisesti. Eurooppalaiset ja amerikkalaiset julkaisut muistuttivat paljon kiinalaisia, joskus kokonaisia sivuja oli kopioitu toisista kirjoista.

Euroopassa suhtautuminen kuvioihin erosi kiinalaisesta. Siinä missä kiinalaisilla kuvioilla oli merkitys, eurooppalaiset vain yrittivät rakentaa erilaisia kuvioita, joita kirjoihin kuvattiin. Kirjoista hävisivät selittävät kirjoitukset, joita kiinalaisissa kirjoissa oli.

Amerikkalainen *Sam Loyd* kirjoitti omissa kirjoissaan, että kiinalainen *Li Hung Chang* todisti Pythagoraan lauseen tangramin avulla jo tuhansia vuosia sitten. Eli tangramiin sisältyy myös matemaattinen puoli. Siitä seuraavaksi.

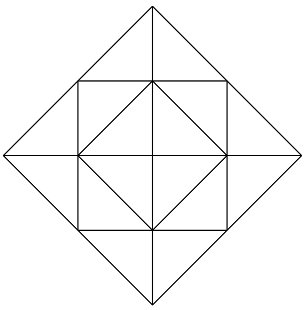
MATEMAATIKKO TUTKII TANGRAMIA

Kuperat monikulmiot

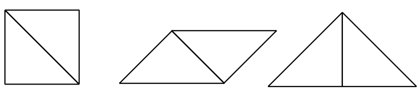
Ongelmia?

Ensin tarkastelemme mahdollisuutta rakentaa tangramin paloista kuperia monikulmioita. Kuperassa monikulmiossa kahden kärjen yhdysjana kulkee koko ajan monikulmion sisällä, riippumatta siitä, mitkä kaksi kärkipistettä valitaan. Kuinka monta erilaista monikulmiota on mahdollisuus rakentaa? Kuinka monta kulmaa monikulmiossa voi olla?

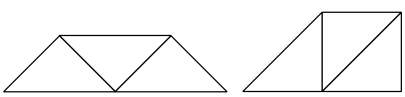
Aloitamme jakamalla tangramin kuutentoista samankokoiseen, tasakylkiseen suorakulmaiseen kolmioon, kutsumme näitä kolmioita peruskolmioiksi.



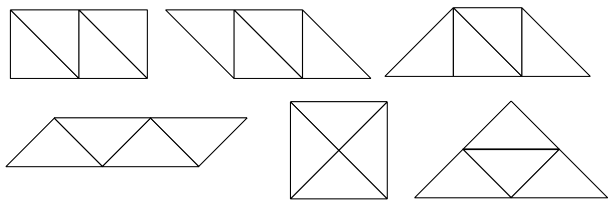
Kahdesta peruskolmiosta voidaan rakentaa kupera monikulmio kolmella eri tavalla:



Kolmesta peruskolmiosta saadaan kaksi kuperaa monikulmiota:



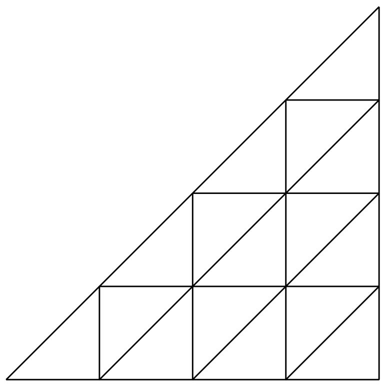
Neljällä peruskolmiolla syntyy kuusi kuperaa monikulmiota:



Kaikissa edellä esitetyissä kuperissa monikulmioissa lyhyt sivu on aina toista lyhyttä sivua vasten ja pitkät sivut ovat toisia pitkiä sivuja vasten.

Jos jokin monikulmion sivuista olisi rakentunut sekä peruskolmion lyhyistä että pitkistä sivuista, vaikuttaa siltä, ettei monikulmiota tällöin saada kuperaksi.

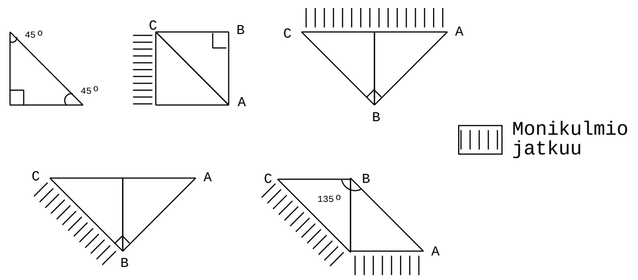
Tämä ei kuitenkaan estä sitä, että monikulmion ulkoreunan osat olisivat eri tavoin rakentuneita, kuten seuraava esimerkki osoittaa.



Kuperia monikulmioita rakennettaessa kolmioiden lyhyet sivut ovat aina toisia lyhyitä sivuja ja pitkät sivut toisia pitkiä sivuja vasten. Lisäksi monikulmion ulkoreunat koostuvat joko lyhyistä tai pitkistä kolmioiden sivuista. Todistus sivuutetaan.

Kulmien lukumäärä

Peruskolmioista rakennetun monikulmion kulma (kuvissa kulma ABC) on suora kulma, 90°, jos vierekkäiset sivut ovat samanlaiset (molemmat lyhyistä tai pitkistä sivuista koostuvia). Jos sivut ovat erilaisia, kulma on 45° tai 135°.



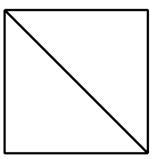
Monikulmion kulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$, missä n on kulmien lukumäärä. Merkitään a:lla monikulmion 45° kulmien lukumäärää, b:llä 90° kulmien lukumäärää ja c:llä 135° kulmien lukumäärää. Monikulmion kulmien summa on siis $a\cdot 45° + b\cdot 90° + c\cdot 135° = (n-2)\cdot 180°$. Lisäksi $a+b+c=n$. Jälkimmäisestä yhtälöstä $c = n-(a+b)$; sijoitetaan se ensimmäiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} 45a + 90b + 135(n-a-b) &= (n-2)\cdot 180 \qquad \mid : 45 \\ a + 2b + 3n - 3a - 3b &= 4n - 8 \\ -2a - b &= n - 8 \\ 2a + b &= 8 - n \end{aligned}$$

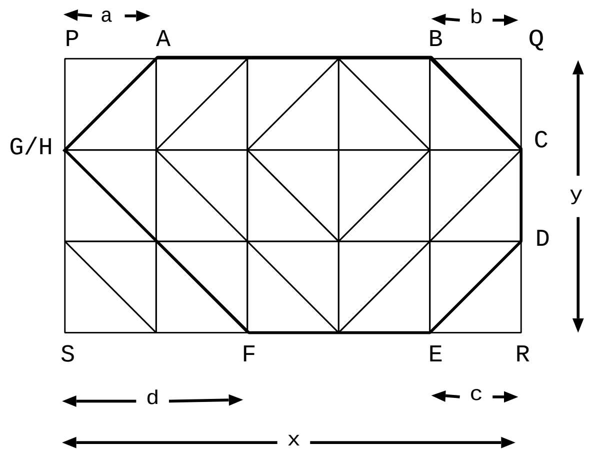
Koska $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin $8-n \geq 0$ ja $n \leq 8$. Monikulmion kulmien lukumäärä voi siis olla kolmesta kahdeksaan. Tätä laskettaessa ei olla tehty minkäänlaisia olettamuksia peruskolmioiden määrästä. Tulos on siis voimassa aina, myös silloin kun peruskolmioita on kuusitoista. Kuudellatoista peruskolmiolla kulmia ei kuitenkaan ole kuin korkeintaan kuusi, tarkempi perustelu paljastuu seuraavassa luvussa. Olemme ratkaisseet toisen ongelmistamme. Nyt voimme tutkia mahdollisten kuperien monikulmioiden määrää.

Kuperien monikulmioiden lukumäärä

Kolmion pitkää sivua vasten voidaan laittaa toisen kolmion pitkä sivu. Tästä muodostuu neliö, jonka sivut ovat kolmioiden lyhyiden sivujen pituisia.

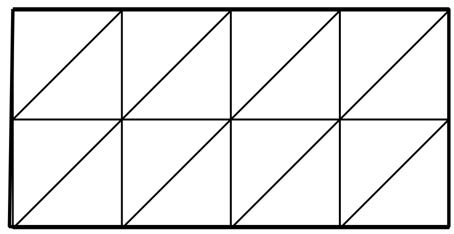


Jokainen peruskolmiosta rakennettu kupera monikulmio voidaan siis peruskolmioita lisäämällä täydentää suorakulmioksi. Suorakulmion sivujen pituudet ovat kolmion lyhyen sivun pituuden moninkertoja. Monikulmioiden sivut, jotka koostuvat kolmioiden lyhyistä sivuista, sivuavat suorakulmion sivuja.

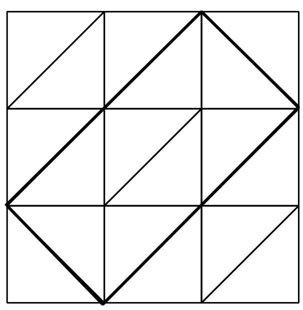


Suorakulmion kulmat: P, Q, R, S. Monikulmion kulmat: A, B, C, D, E, F, G, H.

Kaikki sivut kolmion lyhyistä sivuista:



Kaikki sivut kolmion pitkistä sivuista:



Suorakulmion vaakasuora sivu koostuu x:stä neliön sivusta ja pystysuora y:stä neliön sivusta. Neliön sivun pituus on peruskolmion lyhyen sivun pituinen (täydentämisen seurauksena). Suorakulmion sivujen pituudet ovat x ja y kertaa kolmion lyhyen sivun pituus.

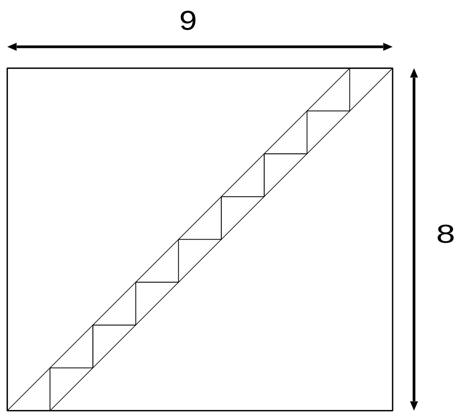
Jokainen neliö koostuu kahdesta peruskolmiosta ja suorakulmio koostuu xy:stä neliöstä. Suorakulmion ala on $2xy$ peruskolmiota.

Kolmiot PAH, BQC, DRE ja GFS ovat suorakulmaisia tasakylkisiä kolmioita, niiden alat ovat a^2, b^2, c^2 ja d^2 peruskolmion alaa (a, b, c, ja d ovat peruskolmion lyhyen sivun moninkertoja).

Kun suorakulmion sisälle rakennettu monikulmio koostuu kuudestatoista peruskolmiosta, ja on siis mahdollisesti tangram, on monikulmion ulkopuolelle jäävä alue (suorakulmion sisällä) $a^2+b^2+c^2+d^2 = 2xy-16$. Lisäksi $a+b \leq x$, $c+d \leq x$, $b+c \leq y$, $a+d \leq y$.

Mahdollisia kuperia monikulmioita on kaksikymmentä kappaletta. Kolmetoista näistä voidaan rakentaa tangram-palikoilla. Se on osoitettavissa taulukoimalla kaikki epäyhtälöryhmän ratkaisut ja piirtämällä ratkaisuja vastaavat monikulmiot (katso liitteet 1 & 2). Taulukko ja kuvat osoittavat myös jo aikaisemmin todetun asian, kuudestatoista peruskolmiosta rakennetussa kuperassa monikulmiossa on korkeintaan kuusi kulmaa.

Taulukointi voidaan aloittaa tutkimalla suorakulmioiden sivujen tuloa, xy:tä. Koska suorakulmion ala on $2xy$ peruskolmion alaa ja peruskolmioita on käytettävissä 16, niin $xy = 8$, kun koko suorakulmio on täytetty peruskolmioilla. Tämä on alaraja xy:lle. Kun peruskolmioista rakennetaan suorakulmion lävistäjä, saa xy suurimman arvonsa, $8 \cdot 9 = 72$:



Näiden rajojen löydyttyä tutkitaan jokaista tällä välillä olevaa kokonaislukua. Jaetaan tutkittava luku mahdollisiin x:n ja y:n arvoihin, esimerkiksi kun $xy = 12$, pareja voivat olla 1 ja 12, 2 ja 6 tai 3 ja 4. Sitten tutkitaan mahdollisia a:n, b:n, c:n ja d:n arvoja. Koska $2xy - 16$ on parillinen, myös lausekkeen $a^2+b^2+c^2+d^2$ tulee olla parillinen, esimerkiksi $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ tai $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ eivät siis kelpaa.

Valitun xy:n avulla saadaan lausekkeesta

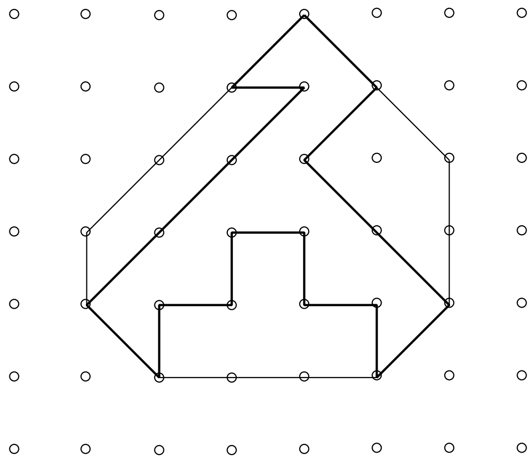
$$2xy - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

a:n, b:n, c:n ja d:n neliöiden summa, josta selvitetään a:n, b:n, c:n ja d:n eri mahdollisuudet. Lopuksi karsitaan ehdoilla $a+b \leq x$, $c+d \leq x$, $b+c \leq y$ ja $a+d \leq y$ mahdottomat nelikööt suhteessa x:n ja y:n muodostamiin pareihin.

Lisää ongelmia?

Tangram täydentyy monikulmioksi

Tarkastelemme tangram-kuvioita, joiden kärkipisteet saadaan asetettua säännöllisen ruudukon suorien leikkauspisteisiin. Tällaiset tangramit voidaan täydentää kuperiksi monikulmioiksi jo tutuiksi tulleiden peruskolmioiden avulla.



Jos tangramille asetetaan vielä ehdoksi, että se on yksiosainen, on mahdollista miettiä, löytyykö ylärajaa tarvittavien palikoiden lukumäärälle. Uteliaimmille voidaan paljastaa, että tällainen yläraja on olemassa, yksiosaisen tangramin täydentämiseen tarvitaan korkeintaan 56 peruskolmiota (Elffers 1981, s. 174).

Jaolliset tangramit

On myös olemassa tangrameita, jotka on mahdollista jakaa kahteen samanlaiseen osaan, jaollisia tangrameita. Näitä on 65 erilaista (Elffers 1981, s. 175). Pareja voi yhdistellä useilla eri tavoilla yhtenäisiksi jaollisiksi tangrameiksi, jotka on peruskulmioilla mahdollista täydentää kuperiksi monikulmioiksi. Ongelmanratkonnasta pitäville voidaan esittää aivonystyröitä työllistävä ongelma: mikä on täydentämiseen tarvittavien peruskolmioiden yläraja näiden jaollisten peruskolmioiden kohdalla?

HYVÄSTIT TANGRAMILLE

Kuten tarkkaavainen ja kärsivällinen lukija on huomannut, tangram voi viihdyttää monella eri tavalla. Tangramin maailmaan voi sukeltaa puhtaasti tieteellisesti tutkien. Sen geometrisistä ominaisuuksista löytyy paljon mielenkiintoista. Mutta tämä ei ole ainoa vaihtoehto. Tangramista voi nauttia aivan mainiosti ilman minkäänlaista matematiikkaa, työkaluna ainoastaan mielikuvitus. Voi etsiä tehtäviä, joita yrittää ratkaista. Voi itse yrittää kehitellä kuvioita, eläimiä, ihmisiä toimissaan, rakennuksia. Nauttikaa elämästä tangramin seurassa!

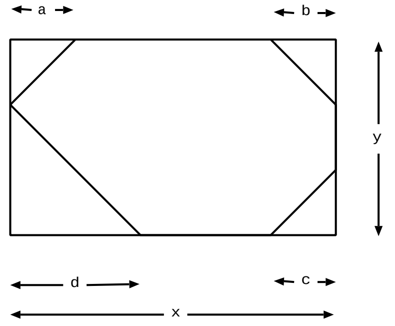
Teemu Mehtiö
Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio

Lähdeluettelo

Elffers, Joost (1981). *Tangram*, Bokförlaget Prisma, Tukholma.

Liite 1: Mahdolliset kuperat monikulmiot kuudellatoista peruskolmiolla

Numero	xy	x	y	$2xy-16$	$(a^2+b^2+c^2+d^2)$	a	b	c	d	Tangram mahdollinen
1	8	8	1	0	0	0	0	0	0	Ei
2	8	4	2	0	0	0	0	0	0	Kyllä
3	9	9	1	2	2	1	1	0	0	Ei
4	9	9	1	2	2	1	0	1	0	Ei
5	9	3	3	2	2	1	1	0	0	Kyllä
6	9	3	3	2	2	1	0	1	0	Kyllä
7	10	5	2	4	4	1	1	1	1	Kyllä
8	10	5	2	4	4	2	0	0	0	Kyllä
9	12	6	2	8	8	2	2	0	0	Kyllä
10	12	6	2	8	8	2	0	2	0	Kyllä
11	12	4	3	8	8	2	2	0	0	Kyllä
12	12	4	3	8	8	2	0	2	0	Kyllä
13	15	5	3	14	14	3	1	2	0	Kyllä
14	15	5	3	14	14	3	2	1	0	Kyllä
15	16	4	4	16	16	2	2	2	2	Kyllä
16	16	4	4	16	16	4	0	0	0	Kyllä
17	24	6	4	32	32	4	0	4	0	Ei
18	25	5	5	34	34	4	1	4	1	Ei
19	25	5	5	34	34	5	0	3	0	Ei
20	72	9	8	128	128	8	0	8	0	Ei



Ehdot:

1° $2xy - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

2° $a + b \le x$

$c + d \le x$

$b + c \le y$

$a + d \le y$

Liite 2: Kuperien monikulmioiden kuvat

Tangramit vastaavien monikulmioiden vieressä.