Harjoituksia 14–16-vuotiaille oppilaille

1 Aluksi

Nämä tehtävät on poimittu vuonna 1999 julkaistusta kirjasta *Century of Kömal 1994–1997*. Lisää tietoa unkarilaisesta matematiikanopetuksesta löytyy mm. internetistä osoitteesta `http://komal.elte.hu`.

2 Tehtävät ja ratkaisut

Tehtävä 1. Bob suunnitteli labyrintin ruutupaperille. Labyrintin seinät seurasivat ruutujen sivuja. Bob aloitti piirtämällä ensin suuren neliön ja sitten sen sisään väliseiniä. Väliseinien piirtämiseen Bob käytti yhteensä 400 seinän palasta.

Kun Bob oli valmis, hän huomasi, että hänen labyrintissaan oli mistä tahansa ruudusta toiseen täsmälleen yksi sellainen reitti, joka ei palaa samaan ruutuun. Mikä oli suuren neliön sivujen pituus?

Ratkaisu 1. Olkoon Bobin ensin piirtämä suuri neliö kooltaan $n \times n$, ja ajatellaan siinä kaikkien vierekkäisten ruutujen keskipisteet yhdistetyiksi viivoilla. Silloin joka rivillä on $n-1$ vaakasuoraa yhdysviivaa ja näin ollen n:llä rivillä on yhteensä $n(n-1)$ vaakasuoraa yhdysviivaa. Pystysuoria viivoja on samaten $n(n-1)$ kappaletta ja täten saamme yhteensä $2n(n-1)$ kappaletta viivoja, jotka yhdistävät kaikkien n^2:n ruudun keskipisteitä.

Kun Bob piirtää yhden osan väliseinää, hänen täytyy leikata matkalla tasan yksi yhdysviiva; vaakasuora, kun hänen seinänsä kulkee pystysuunnassa, ja pystysuora muutoin. Poistetaan nyt ne yhdysviivat, jotka Bob joutuu leikkaamaan piirtäessään seiniä. Silloin labyrintissä tulee olemaan tasan $2n(n-1)-400$ yhdysviivaa jäljellä; nämä seuraavat labyrintin polkuja.

Muodostetaan nyt uusi verkko (graafi), missä labyrintin ruutujen keskipisteet ovat kärkinä ja jäljelle jääneet yhdysviivat särminä. Tässä verkossa on n^2 kärkeä ja $2n(n-1)-400$ särmää. Tiedämme, että verkko on yhtenäinen (eli voimme saavuttaa jokaisen kärjen mistä tahansa kärjestä), koska labyrintti kulkee jokaisen ruudun kautta. Lisäksi tiedämme, että verkko on silmukaton (eli se ei sisällä umpinaisia polkuja), koska labyrintissä on vain yksi tie kulkea ruudusta toiseen. Täten voimme päätellä, että verkko on puu ja että siinä on siten tasan yksi kärki enemmän kuin siinä on särmiä. Tästä saamme yhtälön

$$n^2 = 2n(n-1) - 400 + 1 \qquad \text{eli} \qquad n^2 - 2n - 399 = 0,$$

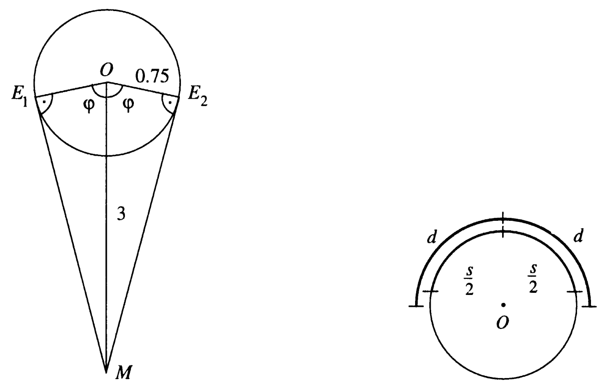
jolla on kaksi juurta: -19 ja 21. Koska sivun pituus ei voi olla negatiivinen, saadaan suuren neliön sivun pituudeksi 21 pituusyksikköä.
<u>VASTAUS:</u> 21 pituusyksikköä.

Tehtävä 2. Matemaatikkojen julisteet oli kiinnitetty pyöreisiin mainospylväisiin, joiden halkaisija oli $1,5$ metriä. Julisteiden kiinnittäjät huomasivat, että lukijat seisoivat kolmen metrin päässä pylvään keskipisteestä. He halusivat asettaa julisteet siten, että mistä tahansa suunnasta olisi ainakin yksi niistä kokonaan näkyvissä. Kuinka leveitä tulisi julisteiden tällöin enintään olla?

Ratkaisu 2. Jokainen kolmen metrin päässä mainospylvään keskuksesta seisova näkee sen osuuden pylväästä, joka on esitettynä vasemmalla kuvassa 1. Koko pylvään asemasta on siten riittävää tarkastella kuvan leikkausympyrää.

Kuvaan 1 merkityssä pisteessä M seisova ihminen näkee ympyränkaaren E_1E_2. Merkitään nyt tämän ympyräkaaren pituutta s:llä ja kulmaa E_1OE_2 2φ:llä. Tällöin vasemmanpuoleisesta kolmiosta E_1OM saadaan $\cos\varphi = \frac{0{,}75}{3} = \frac{1}{4}$ ja edelleen $\varphi \approx 75.52°$.

Ympyräkaaren s pituus saadaan nyt laskettua seuraavasti.



Kuva 1: Kuva tehtävään 2.

$$s \approx 0.75 \cdot 2\pi \cdot \frac{2 \cdot 75,52^\circ}{360^\circ} \approx 1,977 \text{ metriä.}$$

Jos nyt merkitsemme julisteen leveyttä d:llä, niin täytyy olla $d \leq \frac{s}{2}$, koska jos $d > \frac{s}{2}$, niin silloin olisi mahdollista, että kaksi julistetta koskettaisivat toisiaan s:n pituisen ympyräkaaren keskellä, ja tällöin kumpikaan julisteista ei näkyisi kokonaan pisteeseen M. (Katso kuva 1.)

Koska etsimme suurinta mahdollista leveyttä, voimme olettaa, että julisteet peittävät pylvään kokonaan; tällöin pylvään ympärysmitta on jokin kokonaisluku n kertaa julisteen leveys. Jos meillä on siis n julistetta, niin on oltava voimassa, että $\frac{0,75 \cdot 2\pi}{n} \leq \frac{s}{2}$. Tästä epäyhtälöstä saadaan ratkaisuksi $n \geq 4,767$.

Pienin julisteiden määrä, jolla julisteet näkyvät kaikkiin suuntiin, on siis 5. Ja yhden julisteen leveys on tällöin

$$\frac{0,75 \cdot 2\pi}{5} \approx 0,942 \text{ metriä.}$$

VASTAUS: Julisteiden pitää olla leveydeltään noin 0,94 metriä; tällöin niitä mahtuu yhteen pylvääseen viisi kappaletta.

Tehtävä 3. Yhdysvalloissa yliopistojen välinen lentopallomestaruus ratkaistaan seuraavasti. Joukkueet jaetaan ensin lohkoihin, joissa on viisi tai kuusi joukkuetta. Lohkoittain joukkueet pelaavat ns. *round robin* -järjestelmän mukaan, jossa jokainen joukkue pelaa ainakin kerran jokaista muuta joukkuetta vastaan. Joukkueet, jotka häviävät enintään kerran pääsevät jatkoon lohkostaan. Kuinka monta joukkuetta voi enintään päästä jatkoon yhdestä alkulohkosta?

Ratkaisu 3. Voimme lähestyä kysymystä yleisemmin. Ajatellaan, että yksi lohko koostuu k:sta joukkueesta ja että joukkueet, joilla on enintään m tappiota, lunastavat paikan jatkossa. Ja kysymys on edelleen sama: kuinka monta joukkuetta voi selvitä jatkoon yhdestä lohkosta?

Jos $m \geq k-1$, niin selvästi jokainen joukkue pääsee jatkoon. Oletetaan nyt, että $m \leq k-2$ ja siis $k \geq 3$.

Merkitään jatkoon pääsevien joukkueiden lukumäärää t:llä, ja tutkitaan ensin niitä otteluita, jotka nämä joukkueet pelaavat keskenään. Niitä on $\frac{t(t-1)}{2}$ kappaletta, koska jokainen joukkue pelaa $(t-1)$:n joukkueen kanssa, eli yhteensä $t(t-1)$ ottelua, kun jokainen lasketaan kahdesti. Joka ottelussa on myös häviäjäjoukkue; täten jatkoon päässeet t joukkuetta kärsivät yhteensä vähintään $\frac{t(t-1)}{2}$ tappiota. Mitään näistä jatkoon menevistä joukkueista ei voitettu enempää kuin m kertaa, joten saadaan epäyhtälö

$$\frac{t(t-1)}{2} \leq tm.$$

Tämä epäyhtälö toteutuu, kun $t=0$. Jos oletetaan, että $t \neq 0$, niin epäyhtälö voidaan sieventää muotoon

$$t \leq 2m+1.$$

Koska nyt $t=0$ toteuttaa myös tämän epäyhtälön, saamme tulokseksi, että jatkoon menevien joukkueiden lukumäärä on enintään $2m+1$.

Seuraavaksi käsittelemme samaan tapaan niitä otteluita, jotka pelattiin pudonneiden joukkueiden kesken. Jokainen näistä on hävinnyt enintään t:lle jatkoon selviytyneelle joukkueelle, ja koska jokainen kärsi vähintään $m+1$ tappiota kaiken kaikkiaan, seuraa tästä, että jokaisen pudonneen joukkueen voitti vähintään $m+1-t$ muuta pudonnutta joukkuetta. Tästä taas seuraa, että pudonneet joukkueet hävisivät yhteensä vähintään $(k-t)(m+1-t)$ ottelua keskinäisissä otteluissaan. Tämä luku ei voi kuitenkaan olla suurempi kuin kaikkien pudonneiden joukkueiden keskenään pelaamien otteluiden lukumäärä, eli epäyhtälönä

$$\frac{(k-t)(k-t-1)}{2} \geq (k-t)(m-t+1).$$

Jos $k \neq t$ (eli $k > t$, koska $k \geq t$ aina), tämä epäyhtälö sievenee muotoon

$$k - t - 1 \geq 2m - 2t + 2,$$

josta edelleen saadaan

$$t \geq 2m - k + 3.$$

Tämä epäyhtälö toteutuu myös, kun $k = t$, koska $k - 2 \geq m$.

Yhteenvetona saadaan siis, että mahdolliset t:n arvot ovat välillä

$$2m - k + 3 \leq t \leq 2m + 1.$$

Nyt meidän on vielä näytettävä, että jokaista mahdollista t:n arvoa kohti voidaan löytää sellainen turnaus, jossa tasan t joukkuetta pääsee jatkoon. Valitaan ensin t jatkoon pääsevää joukkuetta; muut $k - t$ joukkuetta putoavat siis jatkosta. Valitsemme näiden kahden ryhmän välillä pelattujen otteluiden tulokset niin, että jatkoon menevät joukkueet voittavat ne kaikki.

Tutkitaan sitten niitä otteluita, jotka pelataan jatkoon menevien joukkueiden välillä. Oletetaan ensin, että $t = 2m + 1$. Ajatellaan joukkueet sijoitetuiksi ympyrän kehälle jossakin järjestyksessä. Sovitaan, että jokainen joukkue voittaa ne m joukkuetta, jotka ovat sen oikealla puolella, ja vastaavasti tietenkin häviää vasemmalla puolellaan oleville m:lle joukkueelle. Tällä tavalla kaikkien otteluiden tulos on valittu ja nämä t joukkuetta todella pääsevät jatkoon.

Tapauksessa $t < 2m + 1$ voidaan toimia seuraavasti: Siirretään tilapäisesti putoavia joukkueita jatkoon pääsevien seuraan kunnes lukumäärä on $2m + 1$, ja valitaan tulokset yllä esitetyllä tavalla. Lopuksi palautetaan mukaan otetut putoavat joukkueet taas omaan ryhmäänsä ja muutetaan niiden mahdolliset voitot jatkoon valituista joukkueista tappioiksi. Tällöin yksikään t:stä alunperin jatkoon tarkoitetusta joukkueesta ei häviä useammin kuin m kertaa ja todella pääsee siis jatkoon.

Seuraavaksi tarkastellaan putoaviksi jätettyjen joukkueiden pelaamia otteluita. Olkoon tällä kertaa aluksi $t = 2m-k+3$. Tällöin on siis $k-(2m-k+3) = 2k-2m-3$ putoavaa joukkuetta. Edellä esitettyyn tapaan voimme järjestää myös nämä joukkueet ympyrän kehälle ja valita tulokset niin, että jokainen putoava joukkue häviää $k-m-2$ kertaa muille jatkosta putoaville joukkueille (ja samoin voittaa $k-m-2$ niistä). Lisäksi niiden pitää hävitä myös jatkoon pääseville joukkueille; ne kärsivät siten yhteensä $(k-m-2)+(2m-k+3) = m+1$ tappiota ja siksi siis putoavat.

Suuremmilla t:n arvoilla putoavia joukkueita tulee olemaan vähemmän. Lainaamalla joukkueita jatkoon pääsevien joukosta voimme kasvattaa ryhmän lukumäärän tilapäisesti arvoon $2k-2m-3$ ja sopia tulokset samalla tavoin kuin edellä. Tämän jälkeen palautetaan jatkoon pääseville joukkueille jo aikaisemmin valitut tulokset sekä keskinäisiin että putoavien kanssa käytäviin otteluihin. Silloin putoaviksi tarkoitetut $k-t$ joukkuetta häviävät edelleen vähintään $m+1$ kertaa ja aiemmin määritellyt jatkoon menevien tulokset eivät ole muuttuneet.

Lähempi tarkastelu osoittaa, että pieni korjaus on paikallaan. On näet mahdollista, että $2m+1 > k$ tai $2m-k+3 < 0$, jolloin t ei voi saavuttaa vastaavia arvoja. Täten enintään seuraavat epäyhtälöt pätevät

$$\max(0, (2m-k+3)) \leq t \leq \min(k, (2m+1)).$$

Mutta nyt joudumme ongelmiin päättelymme kanssa: Jos $2m+1 > k$, ei meillä ole tarpeeksi joukkueita t:n nostamiseksi edes tilapäisesti arvoon $2m+1$ kuten yllä tehtiin. Vastaavasti, jos $2m-k+3 < 0$, niin $k < 2k-2m-3$ ja siksi putoavien joukkueiden määrä ei saavuta haluttua arvoa $2k-2m-3$. Nämä ongelmat kuitenkin poistuvat kun käytämme seuraavaa menettelyä.

Jos tarvitsemme tilapäisesti useampia joukkueita kuin mitä todellisuudessa on, niin voimme käyttää lisäksi kuvitteellisia "haamujoukkueita". Asetetaan tällöin ensin tulokset samalla tavoin kuin edellä on tehty ja jätetään sitten kokonaan "haamujoukkueet" sekä niiden pelaamat ottelut pois. Tämä menettely ei suurenna jatkoon meneviksi valittujen t:n joukkueen tappioiden lukumäärää eikä se kasvata myöskään putoavien joukkueiden voittojen lukumäärää. Toisin sanoen, valitsemamme t joukkuetta kärsivät edelleen enintään m tappiota, ja muut $k - t$ joukkuetta voittavat enintään $k - m - 2 = (k - 1) - (m + 1)$ ottelua. Tämän johdosta annetut t joukkuetta pääsevät jatkoon, kun taas muut joukkueet putoavat.

Täten saimme tuloksen jokaisella epäyhtälöiden sallimalla t:n arvolla, ja näin ongelmamme myös ratkeaa. Annetuilla arvoilla $k = 5$, $m = 1$ ja $k = 6$, $m = 1$ jatkoon menevien joukkueiden lukumäärä t toteuttaa epäyhtälöt

$$\max(0, 2 - 5 + 3) = 0 \le t \le 3 \quad \text{ja} \quad \max(0, 2 - 6 + 3) = 0 \le t \le 3,$$

mistä saamme, että t on 0, 1, 2 tai 3.

VASTAUS: Ei yhtään, yksi, kaksi tai kolme joukkuetta voi päästä jatkoon yhdestä lohkosta.

Tehtävä 4. Vertaile lukuja 200! ja 100^{200} käyttämättä taskulaskinta tai logaritmitauluja.

Ratkaisu 4. Kirjoitetaan annetut luvut tuloiksi

$$200! = (200 \cdot 199) \cdot 198! \qquad \text{ja} \qquad 100^{200} = 100^3 \cdot 100^{197}.$$

Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä[1] seuraa, että

$$\sqrt[197]{198!} = \sqrt[197]{2 \cdot 3 \cdots 197 \cdot 198} < \frac{2 + 3 + \cdots + 198}{197} = \frac{200 \cdot 197}{197 \cdot 2} = 100$$

eli $198! < 100^{197}$. Lisäksi suluissa oleva tulo toteuttaa ehdon

$$(200 \cdot 199) = 39800 < 1000000 = 100^3.$$

Täten kertomalla kaksi epäyhtälöä (molempien kaikki tekijät positiivisia) keskenään saamme

$$200! < 100^{200}.$$

VASTAUS: $200! < 100^{200}$.

Ratkaisu 4, yleinen tapaus. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Vertaillaan lukuja $(2n)!$ ja n^{2n}, joissa kummassakin on $2n$ tekijää. Tällöin huomaamme

[1] Aritmeettinen keskiarvo $\geq$ geometrinen keskiarvo.

heti, että $(2n)! > n^{2n}$, kun $n = 1$ tai $n = 2$. Oletetaan siis jatkossa, että $n \geq 3$. Tutkitaan nyt osamäärää $\frac{n^{2n}}{(2n)!}$ kirjoittamalla se tuloksi, jonka tekijöinä on $2n-1$ murtolukua

$$(\frac{n}{1}) \cdot (\frac{n}{2}) \cdots (\frac{n}{n}) \cdots (\frac{n}{2n-2}) \cdot (\frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n}{2n}).$$

Selvästi $(n-1)$ ensimmäistä murtolukua ovat ykköstä suurempia, n:s murtoluku $\frac{n}{n}$ on tasan yksi ja muut murtoluvut ovat pienempiä kuin yksi. Muodostetaan sitten murtolukupareja seuraavasti

$$(\frac{n}{1}) \text{ ja } (\frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n}{2n}), \quad (\frac{n}{2}) \text{ ja } (\frac{n}{2n-2}), \ldots, \frac{n}{n-1} \text{ ja } (\frac{n}{2n-(n-1)}),$$

ja jätetään murtoluku $\frac{n}{n}$ ilman paria. Soveltamalla nyt geometrisen ja aritmeettisen keskiarvon välistä epäyhtälöä (ks. alaviite edellä) lukuihin k ja $(2n-k)$, missä $2 \leq k \leq n-1$, saamme

$$k(2n-k) < (\frac{k+2n-k}{2})^2 = n^2,$$

josta seuraa $\frac{n}{k} \cdot \frac{n}{2n-k} > 1$. Kaikissa muissa paitsi ensimmäisessä parissa on tekijöiden tulo siis suurempi kuin yksi. Tutkitaan seuraavaksi, millä n:n arvoilla ensimmäinen tulo olisi suurempi kuin 1. Kun $n \geq 3$, voimme muodostaa peräkkäin seuraavat yhtäpitävät epäyhtälöt:

$$\begin{aligned} n^3 &\geq 2n(2n-1) \\ n^2 &\geq 4n-2 \\ n^2-4n+4 &\geq 2 \\ (n-2)^2 &\geq 2 \\ n-2 &\geq \sqrt{2} \\ n &\geq \sqrt{2}+2 \approx 3,41. \end{aligned}$$

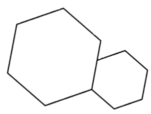
Täten siis jokaisen parin tulo on suurempi kuin yksi, kun $n \geq 4$, ja silloin $n^{2n} > (2n)!$ Tapauksessa $n = 3$, huomaamme, että $3^6 = 729 > 720 = 6!$ Täten, jokaisella kokonaisluvulla $n \geq 3$ (ja siis erityisesti, kun $n = 100$) pätee, että

$$n^{2n} > (2n)!$$

□

Tehtävä 5. On helppoa peittää taso samankokoisilla säännöllisillä kuusikulmioilla. Mutta onko mahdollista peittää tasoa kahdenlaisilla säännöllisillä kuusikulmioilla, jotka ovat eri kokoisia ja joita molempia pitää käyttää ainakin kerran?

Ratkaisu 5. Näytämme, ettei laatoitus onnistu. Oletetaan, että olisimme onnistuneet laatoittamaan tason siten, että kummankinlaisia kuusikulmioita on käytetty ainakin kerran. Tällöin siis jossain on oltava kaksi eri kokoista kuusikulmiota, jotka koskettavat toisiaan pitkin joitakin sivujaan. Yhteisen sivujanan



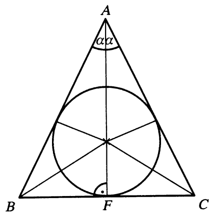
Kuva 2: Kuva tehtävään 5.

päätepisteet eivät voi olla kummankin kuusikulmion kärkinä, sillä silloinhan ne olisivat samankokoiset. Ainakin toisessa pienemmän kuusikulmion kärjessä jää siten 60° kulma kuusikulmioiden ulkopuolelle (ks. kuva 2). Jonkin toisen kuusikulmion pitää silloin peittää syntynyt 60° kulma menemättä kummankaan tarkastellun kuusikulmion päälle. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä säännöllisen kuusikulmion kaikki kulmat ovat 120°. □

Tehtävä 6. Kahdella teräväkulmaisella, tasakylkisellä kolmiolla on yhtä pitkät kyljet. Myös kolmioiden sisään piirrettyjen ympyröiden säteet ovat yhtä pitkät. Ovatko kolmiot välttämättä yhtenevät?

Ratkaisu 6. Osoitetaan, että on olemassa kaksi erilaista tasakylkistä kolmiota, joilla on yhtä pitkät kyljet ja joiden sisään piirrettyjen ympyröiden säteet ovat samat.

Olkoon F tasakylkisen kolmion ABC kannan BC keskipiste. (Katso kuva 3.) Olkoon kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r ja edelleen $\measuredangle FAB = \measuredangle FAC =$



Kuva 3: Kuva tehtävään 6.

α. Kolmio on teräväkulmainen, jos ja vain jos $\alpha < 45°$. Ongelmamme on yhtäpitävä kysymyksen "Määrääkö lukujen AB ja r suhde yksikäsitteisesti kulman α?" kanssa.

Ilmaistaan aluksi suhde $\frac{AB}{r}$ luvun α avulla. Kolmio ABF on suorakulmainen; täten $AF = AB \cdot \cos\alpha$ ja $BF = AB \cdot \sin\alpha$. Jos merkitsemme kolmion ABC alaa T:llä, niin $T = AB^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$. Voimme ilmaista kyseisen alan myös sisään piirretyn ympyrän avulla seuraavasti

$$T = r \cdot \frac{AB + BC + CA}{2} = r(AB + BF) = r \cdot AB(1 + \sin\alpha).$$

Näistä kahdesta yhtälöstä seuraa

$$\frac{AB}{r} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}. \tag{1}$$

Näytämme nyt, että on olemassa kaksi eri kulmaa $0 < \alpha < 45°$, joilla yhtälön (1) lausekkeet saavat saman arvon. Tämä pätee, jos ja vain jos funktio $\alpha \mapsto \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}$ ei ole aidosti monotoninen välillä $(0°, 45°)$.[2] Neljän merkitsevän numeron tarkkuudella saamme nyt, että

$$\frac{1 + \sin 36°}{\cos 36° \cdot \sin 36°} = 3,339,$$

$$\frac{1 + \sin 38°}{\cos 38° \cdot \sin 38°} = 3,330 \text{ ja}$$

$$\frac{1 + \sin 40°}{\cos 40° \cdot \sin 40°} = 3.336.$$

[2]Funktio on selvästi jatkuva kyseisellä välillä; sen nimittäjä $\neq 0$ koko välillä.

Täten funktio ei ole monotoninen. (Tämä voitaisiin näyttää myös ilman likiarvotarkasteluja derivaatan avulla.) Siis, jos esimerkiksi $\frac{AB}{r} = 3,335$, niin on mahdollista löytää ainakin kaksi ehdon (1) täyttävää eri α:n arvoa; toinen väliltä $[36°, 38°]$ ja toinen väliltä $[38°, 40°]$.

Olemme siis näyttäneet, että kaksi tasakylkistä kolmiota eivät ole välttämättä yhtenevät, vaikka niiden kyljet olisivatkin yhtä pitkät ja niiden sisään piirretyt ympyrät samankokoiset. □

Tehtävä 7. Rengasmaisen kilparadan pituus on yksi kilometri. Kaksi moottoripyöräilijää ajaa rataa vastakkaisiin suuntiin. Molemmat moottoripyöräilijät lähtevät pisteestä A. Toinen ajaa koko ajan vakionopeudella, toinen taas kiihdyttää tasaisesti. Moottoripyöräilijät kohtaavat ensimmäisen kerran pisteessä B ja sitten uudelleen lähtöpisteessä A. Kuinka pitkän matkan oli vakionopeudella ajanut moottoripyöräilijä ehtinyt ajaa saapuessaan pisteeseen B?

Ratkaisu 7. Olkoon ensimmäisen ajajan nopeus v (km/h) ja olkoon toisen ajajan kiihtyvyys a (km/h^2). Koska molemmat kulkevat saman yhden kilometrin matkan saman ajan t kuluessa, seuraa tästä, että $at^2/2 = vt = 1$ eli $t = \frac{1}{v}$ ja $a = \frac{2v}{t} = 2v^2$.

Merkitään T:llä sitä aikaa, joka ajajilta kuluu, kun he ajavat pisteestä A pisteeseen B. Tiedämme, että molempien moottoripyörien tänä aikana yhteensä kulkema matka on yksi kilometri ja näin ollen

$$\frac{a}{2}T^2 + vT = 1.$$

Sijoittamalla nyt $a = 2v^2$ tähän yhtälöön saadaan

$$v^2T^2 + vT - 1 = 0.$$

Nyt muuttuja vT ilmaisee kilometreinä sen matkan, jonka ensimmäinen ajaja kulkee ennen kuin hän kohtaa toisen ajajan pisteessä B. Kyseessä on toisen asteen yhtälö muuttujan vT suhteen ja, kun vain positiivinen ratkaisu on mahdollinen, saamme ensimmäisen ajajan kulkemaksi matkaksi lähtöpisteestä pisteeseen B

$$vT = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618 \text{ km}.$$

<u>VASTAUS:</u> Vakionopeudella ajanut moottoripyöräilijä oli ajanut moottoripyörien kohdatessa noin 0,62 kilometriä.

Tehtävä 8. Etsi ne positiiviset kokonaisluvut a, b, c, jotka toteuttavat yhtälön

$$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) = 2.$$

Ratkaisu 8. Koska yhtälö on symmetrinen lukujen a, b ja c suhteen, voimme olettaa, että $a \leq b \leq c$. Permutoimalla tällaisia ratkaisuja, saamme lopulta kaikki alkuperäisen yhtälön ratkaisut.

Tarkastellaan ensin pienintä lukua a. Jos $a = 1$, niin

$$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) = 2(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) > 2,$$

mikä ei ole mahdollista, ja on siis oltava $a \geq 2$. Toisaalta, jos $a \geq 4$, niin

$$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) \leq (1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{4}) = (\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64} < 2,$$

eikä ratkaisua löydy tällöinkään. Täten ainoat mahdolliset a:n arvot ovat $a = 2$ tai $a = 3$.

Tapauksessa $a = 2$ saadaan

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) &= 2,\\
(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) &= \frac{4}{3},\\
3(b+1)(c+1) &= 4bc,\\
3b+3c+3 &= bc,\\
b = \frac{3c+3}{c-3} &= \frac{3(c-3)+12}{c-3} = 3 + \frac{12}{c-3}.
\end{aligned}$$

Koska b on kokonaisluku ja $c \geq 2$, niin nimittäjän $c-3$ mahdolliset arvot ovat ne luvun 12 tekijät, jotka eivät ole pienempiä kuin -1, eli luvut $-1, 2, 3, 4, 6, 12$, ja vastaavat parit (b, c) ovat $(-9, 2)$, $(15, 4)$, $(9, 5)$, $(7, 6)$, $(6, 7)$, $(5, 9)$, $(1, 15)$. Näistä vain parit $(6, 7)$, $(5, 9)$ ja $(4, 15)$ täyttävät ehdon $2 \leq b \leq c$, ja ne myös ovat tarkastellun yhtälön ratkaisuja.

Tapauksessa $a = 3$ saadaan taas

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) &= 2,\\
(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2},\\
2(b+1)(c+1) &= 3bc,\\
2b+2c+2 &= bc,\\
b = \frac{2c+2}{c-2} &= \frac{2(c-2)+6}{c-2} = 2 + \frac{6}{c-2}.
\end{aligned}
$$

Koska $c \geq b \geq 3$ ja luvut ovat kokonaislukuja, niin mahdolliset erotuksen $c-2$ arvot ovat 1, 2, 3 ja 6. Vastaavat parit (b,c) ovat $(8,3)$, $(5,4)$, $(4,5)$, $(3,8)$. Näistä vain parit $(4,5)$ ja $(3,8)$ toteuttavat vaaditut ehdot ja ne ovat myös yhtälön ratkaisuja.

<u>Vastaus:</u> Alkuperäisen yhtälön kaikki lukukolmikkoratkaisut (a,b,c) ovat $(2,4,15)$, $(2,5,9)$, $(2,6,7)$, $(3,3,8)$, $(3,4,5)$ sekä kaikki näiden kolmikoiden eri permutaatiot[3], joita on yhteensä $6+6+6+3+6 = 27$ kappaletta.

Tehtävä 9. Suorakulmainen suuntaissärmiö leikataan ensin kahteen, sitten neljään ja sitten vielä kahdeksaan yhtäsuureen osaan kolmella toisiaan vastaan kohtisuoralla viillolla. Näin syntyneiden suuntaissärmiöiden yhteenlaskettu pinta-ala kasvaa samassa suhteessa joka leikkauksella. Osoita, että alkuperäisen suuntaissärmiön tilavuus on kaksi kertaa suurimman sen sisään mahtuvan kuution tilavuus.

Ratkaisu 9. Merkitään särmiön sivuja symboleilla a, b, c ja sen alaa S:llä. Koska kolmen leikkauksen jälkeen alkuperäinen pinta-ala kaksinkertaistuu (meidän tulee leikata jokaisen tahkon suuntaan yhden kerran, jotta saisimme 8 pientä särmiötä), alueen pitää siis kasvaa $\sqrt[3]{2}$-kertaiseksi alkuperäisestä arvostaan joka leikkauksella. Kolmessa leikkauksessa tämä johtaa yhtälöihin

[3] Esim. ratkaisun (2,4,15) permutaatiot ovat (2,4,15), (2,15,4), (15,2,4), (15,4,2), (4,2,15) ja (4,15,2).

$$\sqrt[3]{2}S = S + 2bc,$$
$$\sqrt[3]{2}(S + 2bc) = S + 2bc + 2ac,$$
$$\sqrt[3]{2}(S + 2bc + 2ac) = S + 2bc + 2ac + 3ab.$$

Vähentämällä nyt ensimmäinen yhtälö toisesta ja edelleen toinen yhtälö kolmannesta saadaan

$$a = b\sqrt[3]{2} \qquad \text{ja} \qquad b = c\sqrt[3]{2}.$$

Täten särmiön kolme sivua ilmaistuna c:n avulla ovat c, $c\sqrt[3]{2}$ ja $c\sqrt[3]{4}$, ja tällöin sen tilavuus on

$$abc = c \cdot c\sqrt[3]{2} \cdot c\sqrt[3]{4} = c^3 \cdot \sqrt[3]{2^3} = 2c^3.$$

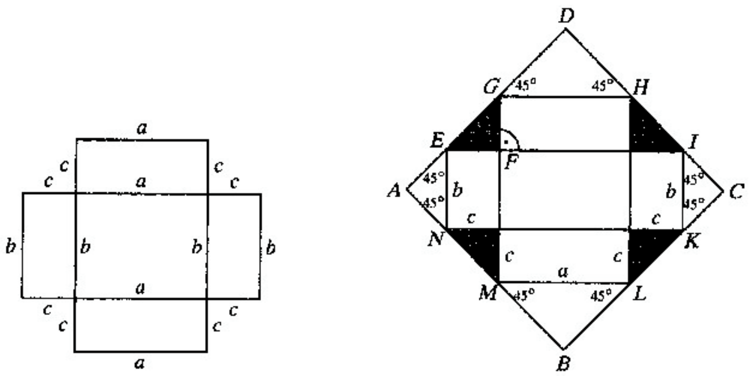
Koska lyhyin särmä on c, niin suurimman särmiön sisään mahtuvan kuution tilavuus on c^3, joka on todella tasan puolet koko särmiön tilavuudesta ($2c^3$). $\square$

Tehtävä 10. Onko mahdollista kääriä laatikko, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c, neliönmuotoiseen käärepaperiarkkiin, jonka sivun pituus on $\frac{a+b+2c}{\sqrt{2}}$? (Paperia ei saa leikata ja paperin pitää peittää kuutio täydellisesti.)

Ratkaisu 10. Kääriminen on mahdollista. Todistamme tämän "avaamalla" laatikon, levittämällä sen tasoon (Katso kuva 4.) ja sitten peittämällä näin syntyneen monikulmion neliöllä, jonka sivun pituus on vaadittu $\frac{a+b+2c}{\sqrt{2}}$.

Valitaan ensin toinen suorakulmaisen suuntaissärmiön tahkoista, jonka sivujen pituudet ovat a ja b, ja liitetään sen viereen neljä muuta sivutahkoa kuten kuvassa 4 vasemmalla on tehty. Sen jälkeen yhdistetään liitettyjen c-sivuisten tahkojen kärjet janoilla kuten kuvassa 4 oikealla (kärjet E ja G, H ja I, K ja L sekä M ja N). Näiden janojen jatkeet määrittävät nyt nelikulmion $ABCD$. Koska kolmio EFG (kuten myös muut tummennetut kolmiot kuvassa 4) on tasakylkinen ja suorakulmainen, seuraa tästä, että $ABCD$ on myös suorakulmainen. Edelleen,

$$AB = AN + NM + MB = \frac{b}{\sqrt{2}} + c\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}$$



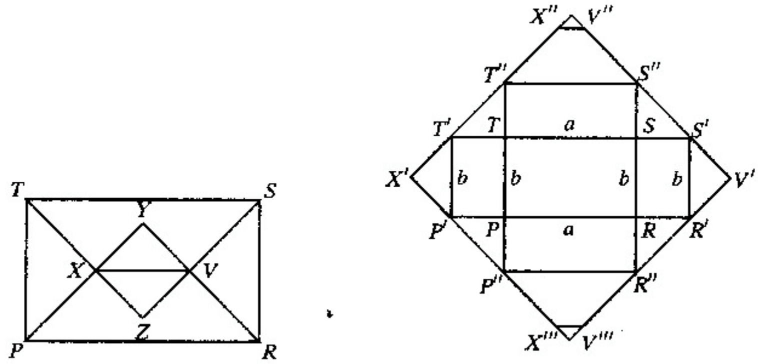
Kuva 4: Ensimmäinen kuva tehtävään 9.

ja

$$BC = BL + LK + KC = \frac{a}{\sqrt{2}} + c\sqrt{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Siten $ABCD$ on neliö, jonka sivun pituus on $\frac{a+b+2c}{\sqrt{2}}$.

Nyt meidän täytyy enää näyttää, että särmiön kuudes sivutahko (sivuinaan a ja b) peittyy myös neliön $ABCD$ alle. Olkoot kuudennen tahkon kärkinä pisteet P, R, S ja T ja sen kulmien puolittajien leikkauspisteet V, Z, X ja Y. (Katso kuva 5.) Jos $a = b$ niin nämä neljä pistettä yhtyvät. Koska kulmien puolittajat



Kuva 5: Toinen kuva tehtävään 9.

leikkaavat toisensa kohtisuoraan, PRY, RSV, STZ ja TPX ovat suorakulmaisia tasakylkisiä kolmioita ja $\triangle PRY \cong \triangle STZ \cong \triangle GHD \cong \triangle LMB$ ja $\triangle RSV \cong$

$\triangle TPX \cong \triangle NEA \cong \triangle IKC$.

Täten jakamalla kuudes särmiön tahko neljään osaan (tapauksessa $a \geq b$ kolmioihin RSV ja TPX sekä kolmi- tai nelikulmioihin $PRVX$ ja $STXV$) ja sitten asettamalla joka palanen vastaavan sivutahkon jatkoksi kuten kuvassa 5 saadaan koko särmiö peitetyksi neliöllä, jonka sivun pituus on $\frac{a+b+2c}{\sqrt{2}}$.

Vastaus: Kääriminen on mahdollista.

Tehtävä 11. Äärellisestä joukosta on valittu seitsemän kolmialkioista osajoukkoa niin, että mitkä tahansa kaksi joukon alkiota kuuluvat tasan yhteen osajoukoista.

a) Kuinka monta alkiota joukossa on?

b) Kuinka monta annetuista osajoukoista voidaan valita siten, että millään kolmella niistä ei ole yhteistä alkiota.

Ratkaisu 11. a) Merkitään joukon alkioiden lukumäärää n:llä. Tällöin niiden osajoukkojen lukumäärä, joissa on tasan kaksi alkiota on

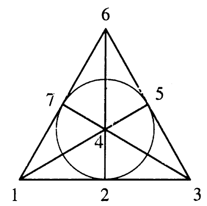
$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Jokainen kolmialkioinen osajoukko sisältää tasan kolme kaksialkioista osajoukkoa, ja siksi, tehtävänannosta johtuen, seitsemän kolmialkioista osajoukkoa yhdessä sisältää $7 \cdot 3 = 21$ eri kaksialkioista osajoukkoa. Täten $\frac{n(n-1)}{2} = 21$, josta saamme yhtälön $n^2 - n - 42 = 0$ ja edelleen ratkaisuksi $n = 7$.

Vastaus: Joukossa on 7 alkiota.

b) Jos merkitsemme joukon alkioita symboleilla 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7, niin mahdolliset ehdokkaat seitsemäksi osajoukoiksi ovat esim. $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$ $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$ $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 7\}$ $\{3, 5, 6\}$. Sama esimerkki on kuvattuna seuraavassa kuviossa, missä joukon alkiot on kuvattu pisteillä ja merkitty numeroilla ja missä annetut osajoukot on kuvattu suorilla ja ympyrällä.

Seuraavaksi meidän tulee näyttää, että enintään neljä osajoukkoa voidaan valita siten, että millään kolmella niistä ei ole yhteisiä alkioita. Jos valitsemme viisi osajoukkoa, niin silloin niillä on yhteensä $5 \cdot 3 = 15$ alkiota (kun alkion jokainen esiintymä lasketaan erikseen). Koska $15 > 2 \cdot 7 = 14$, niin on siis ainakin



Kuva 6: Kuva tehtävään 11.

yksi alkio, joka esiintyy (vähintään) kolme kertaa; ts. näiden viiden osajoukon joukossa on kolme osajoukkoa, joissa on sama alkio. Toisaalta on kuitenkin mahdollista valita neljä osajoukkoa siten, että millään kolmella niistä ei ole yhteistä alkiota. Tätä varten valitaan jokin joukon alkio, esim. 1. Ehtojen mukaisesti tämä alkio sisältyy tasan $\frac{7-1}{3-1}$ eli kolmeen annettuun osajoukkoon. Näytetään nyt, etteivät mitkään lopuista $7-3=4$ osajoukosta sisällä samaa alkiota. Jos meillä on kolme osajoukkoa, joissa on kaikissa sama alkio, niin silloin loppujen näiden kolmen osajoukon $3(3-1)=6$ eli kuudesta alkiosta täytyy kaikkien olla eri alkioita ja niin niiden täytyy sisältää myös alkio 1, mikä on mahdotonta. (Nämä neljä osajoukkoa, edellisessä esimerkissä ovat $\{2,4,6\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,4,7\}$ ja $\{3,5,6\}$.)

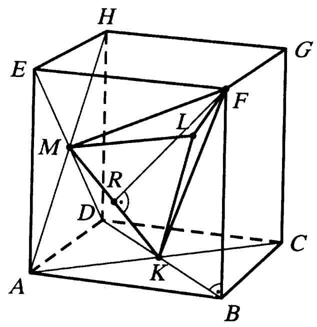
Siis: joukossa on seitsemän alkiota ja voimme aina valita enintään neljä osajoukkoa siten, että missään kolmessa näistä osajoukoista ei ole yhteistä alkiota.

<u>Vastaus:</u> Osajoukoista voidaan valita neljä siten, ettei millään kolmella niistä ole yhteisiä alkioita.

Tehtävä 12. Annetun kuution särmän pituus on a. Eräs kärki ja kolmen sitä vastassa olevan sivutahkon keskipisteet yhdistetään. Laske näin muodostuvan tetraedrin pinta-ala.

Ratkaisu 12. Merkitään kuution kärkiä symboleilla A, B, C, D, E, F, G, H kuten kuvassa 12.

Olkoot kärkeä F vastassa olevien tahkojen keskipisteet K, L, ja M. Olkoon edelleen suoran KM keskipiste R. Tetraedrissä $KLMF$ suorat KM, ML, ja LK ovat kaikki pituudeltaan $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, koska nämä suorat ovat keskijanoja tasasivuises-



Kuva 7: Kuva tehtävään 12.

sa kolmiossa ACH, jonka sivun pituudet ovat $a\sqrt{2}$. Edelleen, $KF = LF = MF$, koska jokainen yhdistää yhden kuution sivun keskipisteen toiseen sen vastakkaisista kärjistä. Voimme laskea näiden janojen pituudet käyttämällä Pythagoraan lausetta:

$$(KF)^2 = (KB)^2 + (BF)^2 = (a\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + a^2 = \frac{3}{2}a^2 \qquad \text{eli}$$

$$KF = LF = MF = a \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Kolmiot KMF, LMF ja LKF ovat yhteneviä, koska niiden vastinsivut ovat pareittain samat. Käyttämällä uudelleen Pythagoraan lausetta saadaan

$$(FR)^2 = (FK)^2 - (RK)^2 = (FK)^2 - (\frac{KM}{2})^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{11}{8}a^2,$$

ja koska kolmion KMF ala on

$$T_{KMF} = \frac{1}{2}KM \cdot FR = a^2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{8},$$

ja tasasivuisen kolmion KLM ala on

$$T_{KLM} = KM^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8},$$

saadaan täten tetraedrin kokonaisalaksi

$$S = T_{KLM} + 3T_{KMF} = \frac{a^2}{8}(\sqrt{3} + 3\sqrt{11}) = 1,46a^2.$$

<u>Vastaus:</u> Tetraedrin pinta-ala on noin $1,46a^2$.