HTKK, TTKK, OY, /Arkkitehtiosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 6.6.1994
Ratkaisut

1.

2.

3.

4.

5. Tasot I ja II lohkaisevat (kumpikin erikseen) kuutiosta tetraedrit, joiden tilavuudet ovat $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$. Näillä tetraedreilla on yhteinen leikkauskappale, joka on myös tetraedri. Sen tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(a \cdot \frac{1}{2}a) \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{24}a^3$. Tällöin kysytyn kappaleen tilavuus on

$$a^3 - 2 \cdot \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{24}a^3 = \frac{17}{24}a^3.$$

6. Sivulta katsottuna (projisoituna neliön lävistäjän kautta kulkevalle pystytasolle) asetelma muodostaa lattiapinnan yläpuolelle kaksi yhtenevää kolmiota ja näitä ja lattiaa sivuavan ympyrän. Ympyrän (eli alkuperäisen pallon) sädettä R haetaan. Jatkamalla kolmioiden ympyrän puolella olevia sivuja saadaan lattiapinnan alapuolelle uusi, kolmas kolmio, joka on yhdenmuotoinen ko. kolmioiden kanssa. Uuden kolmion kanta (lattiapinnalla) on $2(\sqrt{2}-1)r$. Jos uuden kolmien korkeus on x, yhdenmuotoisten kolmioiden avulla voidaan kirjoittaa verrannot

$$\frac{x}{h} = \frac{(\sqrt{2}-1)r}{r} \quad \text{ja} \quad \frac{x+R}{\sqrt{h^2+r^2}} = \frac{R}{r}.$$

Ratkaisemalla

$$R = \frac{(\sqrt{2}-1)hr}{\sqrt{h^2+r^2}-r}.$$