HTKK, TTKK, LTKK, OY/Arkkitehtiosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 2.6.1997 Ratkaisut

1. Asettamalla $2x^2+x-7 = x^2+2x+5$ saadaan yhtälö $x^2-x-12 = 0$, joka antaa käyrien leikkauskohdiksi $x = -3$ ja $x = 4$. Tällöin kysytty pinta-ala A on

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{4} [x^2+2x+5-(2x^2+x-7)]dx \\ &= \int_{-3}^{4} (-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+12x) = \frac{343}{6}. \end{aligned}$$

2. Erilaisia työviikkoja voi ensinnäkin olla sellaisia, että niissä on 3 päivää yhtä aktiviteettia, 1 päivä toista aktiviteettia ja 1 päivä kolmatta aktiviteettia, ja toiseksi sellaisia, että niissä 2 päivää yhtä aktiviteettia ja 2 päivää toista aktiviteettia ja 1 päivä kolmatta aktiviteettia. Edellisessä tapauksessa on siis 3 ryhmää joista yhteen kuuluu 3 samanlaista aktiviteettia. Edelisessä tapauksessa on siis 3 ryhmää joista yhteen kuuluu 3 samanlaista aktiviteettia. Tässä ryhmät voidaan asettaa $\frac{5!}{3!} = 20$ erilaiseen järjestykseen, ja koska 3 aktiviteetin tyhmään voidaan valita 3 erilaista aktiviteettia, erilaisia työviikkoja on $20 \cdot 3 = 60$ kappaletta. Jälkimmäisessä tapauksessa on myös 3 ryhmää, joista nyt kahteen kuuluu 2 samanlaista aktiviteettia. Tässä ryhmät voidaan asettaa $\frac{5!}{(2!2!} = 30$ erilaiseen järjestykseen, ja koska 3 erilaisesta aktiviteetista voidaan muodostaa 3 erilaista kahden aktiviteetin ryhmää, erilaisia työviikkoja on $30 \cdot 3 = 90$ kappaletta. Yhteensä erilaisia työviikkoja on $\underline{60 + 90 = 150}$ kappaletta. Koska $40 \cdot 4,5 = 180 > 150$, Teemu Teekkari ehtii käydä läpi kaikki erilaiset työviikot.

3. Lotan ja Petterin noppien silmäluvut muodostavat pareja. Näistä laskemalla tapahtuman A = 'Lotan nopan silmäluku $\geq$ Petterin nopan silmäluku' todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

Jotta Lotta voittaisi koko potin, tapahtuman A on satuttava 3 kertaa peräkkäin. Tällöin

$$P(\text{'Lotta voittaa'}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = (\frac{7}{12})^3.$$

Odotusarvo sille, kuinka paljon Lotta ansaitsee, on

$$E_{\text{Lotta}} = 4 \cdot (\frac{7}{13})^3 + (-1)(1-(\frac{7}{13})^3) = -\frac{13}{1728} < 0.$$

Siten voidaan odottaa, että Lotta häviää ja <u>Petteri voittaa</u> toistettaessa peliä monta kertaa.

4. Olkoot r, h ja R muodostettavan kartionmuotoisen suppilon (lyhyesti kartion) pohjaympyrän säde, korkeus ja reunaviivan pituus. Nyt R on myös sen ympyrän säde, jonka kokoisesta paperinpalasta kartion vaippaa aletaan muodostaa. Ilmeisesti $r^2 + h^2 = R^2$. Tällöin maksimoitava tilavuus on

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h, h\varepsilon[0, R].$$

Nyt $V'(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 3h^2) = 0$, kun $h = R\sqrt{3}\varepsilon[0, R]$, ja koska $V(0) = 0 = V(R)$ ja $V(R\sqrt{3}) > 0$, niin $V(h)$ saavuttaa maksimin, kun $h = R\sqrt{3}$.

Koska kartion pohjaympyrän kehän pituudelle on

$$2\pi r = 2\pi\sqrt{R^2 - h^2} = 2\pi R\sqrt{2/3} = (2\pi - \alpha)R,$$

poisleikattavan sektorin kulmaksi tulee $\underline{\alpha = 2\pi(1 - \sqrt{2/3})\text{ rad eli } 66^o}$.

5. Kuulien keskipisteet A, B, C ja D muodostavat säännöllisen tetraedrin. Olkoon ΔABC tetraedrin pohjakolmio ja B tetraedrin huippu. Tällöin tetraedrin korkeus h on sama kuin kolmiossa ΔABE sivulle AE piirretyn korkeusjanan pituus, missä E on tetraedrin särmän CD keskipiste. Koska $[AB] = 1$ ja $[BE] = [AE] = \sqrt{3}/2$, niin korkeudelle h pätee yhtälö

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1 - h^2} + \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 - h^2}.$$

Tästä $h = \sqrt{2/3}$, joten pyramidin korkeus on $\underline{1 + h = 1 + \sqrt{2/3}}$.

6. Olkoot A (vast. B ja C) kolmion ΔABC huippupiste (vast. kantapisteet) ja O siirrettävän ympyrän keskipiste.

Säde r_1 (Kuva 2b): Nyt $[AO] = 2r_1$. Koska $2r_1 + r_1 = 1$, on $r_1 = 1/3$.

Säde r_2 (Kuva 2c): Muodostetaan suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on jana OC ja jonka toinen kateetti on alkuperäisen kolmion ΔABC sivulla BC. Tästä $r_2^2 + (1/2)^2 = (1 - r_2)^2$, joten $r_2 = 3/8$.

Säde r_3 (Kuva 2d): Jatketaan jana CO 1-pituiseksi janaksi. Koska kolmiossa ΔABC jokaisen korkeusjana pituus on $\sqrt{3/2}$ ja koska $r_0 = \sqrt{3}/6$, niin

$$\begin{aligned} r_3 &= r_0 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$