HTKK, TTKK, OY/Arkkitehtiosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 10.5.1999
Ratkaisut

1. Bruttotulojen suhteeellinen kasvu vuonna 1995 vuoteen 1994 verrattuna oli
$$\frac{147836-125213}{125213}=0,1807 \quad \text{eli} \quad 18,07\%.$$
Vastaavasti vuosina 1996, 1997 ja 1998 kasvu edelliseen vuoteen verrattuna oli $15,23\%$, $17,95\%$ ja $-3,01\%$. Suurin suhteellinen kasvu on siis tapahtunut vuonna 1995.

2. Olkoon $\triangle ABC$ tasakylkinen kolmio, jonka kanta on AB. Tällöin $|AC| = |BC| = 13$ ja $AB| = 10$, ja korkeusjanan CD pituudeksi saadaan $h = \sqrt{13^2-5^2} = 12$. Olkoon kolmion $\triangle ABC$ sisäänpiirretyn (vast. ympäripiirretyn) ympyrän säde r (vast. R). Kun ympyröiden keskipisteistä, jotka sijaitsevat korkeusjanalla CD, piirretään kohtisuora jana sivulle AC (tai sivulle BC), muodostuu kummankin ympyrän tapauksessa kaksi yhdenmuotoista suorakulmaista kolmiota. Yhdenmuotoisuuden perusteella on
$$\frac{5}{h}=\frac{r}{8} \quad \text{ja} \quad \frac{\frac{13}{2}}{R}=\frac{h}{13},$$
joten $r=\frac{10}{3}$ ja $R=\frac{169}{24}$. Tällöin kysytty ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys on $12-R-r=\frac{13}{8}$.

3. Koska suora $5y-x=17$ (eli $y=\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$) ja paraabeli $y=\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x+1$ leikkaavat vain kun x on -2 tai 3, käyrien rajaamaksi äärelliseksi pinta-alaksi saadaan
$$\int_{-2}^{3}\left[\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}-\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x+1\right)\right]dx=\frac{2}{5}\int_{-2}^{3}(-x^2+x+6)\,dx$$
$$=\Big|_{-2}^{3}\left(-\frac{2}{15}x^3+\frac{1}{5}x^2+\frac{12}{5}x\right)=\frac{25}{3}.$$

4. Olkoon d laivamatkan pituus, R maapallon säde ja x Helsingin satamaan rakennettavan tornin korkeus. R-säteisessä ympyräsektorissa, joka vastaa kaarenpituutta d, keskuskulman suuruus on $\alpha=\frac{d}{R}$ radiaania. Kun ympyräsektori täydennetään lisäämällä toiseen säteeseen pituus x, on näköyhteyden tapauksessa lopputuloksena suorakulmainen kolmio. Tästä
$$\cos\alpha=\frac{R}{R+x} \quad \Rightarrow \quad x=\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)R.$$

Sijoittamalla lukuarvot vastaukseksi tulee $x = 273\,\mathrm{m}$.

5. Jos α (tässä $160°$) on säännöllisen n-kulmion (sisä)kulma ja β monikulmion sivua vastaava keskuskulma, niin monikulmiota muodostavista kolmioista päätellään, että $n\beta = 360°$ ja $\alpha + \beta = 180°$, joten $n = \frac{360°}{180° - \alpha} = 18$. Edelleen, jos x on monikulmion sivun pituus ja r monikulmion ympäripiirretyn ympyrän säde, niin

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad x = 2r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Sijoittamalla lukuarvot vastaukseksi saadaan $x = 5,557$ pituusyksikköä.

6. Heti huomataan, että R-säteisiä palloja on $\sqrt[3]{125} = 5$ kerroksessa ja että r-säteisiä palloja asetetaan siten 4 tasoon, kuhunkin $4 \cdot 4 = 16$, eli yhteensä 64 kappaletta. Kun sellainen kuutio, jossa on yksi r-säteinen pallo ja sitä ympäröivät 8 R-säteistä palloa, leikataan diagonaalisesti pohjaa vastaan kohtisuoralla aputasolla, leikkauskuviosta voidaan lukea ehto

$$R^2 + (R\sqrt{2})^2 = (R + r)^2.$$

Tästä ratkaisemalla $r = -R \pm R\sqrt{3}$, joten vastaukseksi saadaan $r = R(\sqrt{3} - 1)$.