HTKK, TTKK, LTKK, OY, ÅA/Insinööriosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 31.5.1994
Ratkaisut

1. Käyrä $y = e^{2x}$ ja suora $y = 9$ leikkaavat pisteessä $(x_1, 9)$, missä $x_1 = \ln 3$. Ilmeisesti $x_1 < 3$. Tällöin kysytty pinta-ala A on
$$A = \int_0^{x_1} e^{2x}\, dx + (3 - x_1) \cdot 9 = 4 + (27 - 9 \ln 3) = \underline{31 - 9 \ln 3}.$$

2. Äänenvoimakkuus kohdassa x on
$$I(x) = \frac{kI_o}{x^2} + \frac{4kI_o}{(300 - x)^2}$$
missä I_o (vast. $4I_o$) on kohdassa $x = 0$ (vast. kohdassa $x = 300$) olevan diskon äänenvoimakkuus. Kerroin k on verrannollisuuskerroin. Funktion $I(x)$ minimi välillä $0 < x < 300$ löydetään derivaatan
$$I'(x) = -\frac{2kI_o}{x^3} + \frac{8kI_o}{(300 - x)^3}$$
nollakohdista. Ehto $I'(x) = 0$ antaa yhtälön
$$(\frac{300 - x}{x})^3 = 4.$$
josta $x = 300/(1 + \sqrt[3]{4}) \approx 116$m. (Tällöin $300 - x = 184$m.) Ensimmäisen derivaatan testillä todetaan, että löydetty nollakohta on funktion $I(x)$ paikallinen minimikohta. Koska lisäksi $I(x)$ on vähenevä välillä $(0, x)$ ja kasvava välillä $(x, 300)$, vieläpä aidosti, $I(x)$ saavuttaa pienimmän arvonsa kohdassa x.

3. Olkoon A tapahtuma 'virkailija 1 varattu' ja B tapahtuma 'virkailija 2 varattu'. Tällöin
$$P(A) = P(B) = \frac{51}{60} \qquad \text{ja} \qquad P(A \cap B) = \frac{47}{60}$$
Koska tapahtuman $A \cup B$ eli tapahtuman 'ainakin toinen virkailija varattu' todennäköisyys on
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{51}{60} + \frac{51}{60} - \frac{47}{60} = \frac{55}{60}$$
niin kysytty todennäköisyys on
$$1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{55}{60} = \underline{\frac{1}{12}}.$$

4. Olkoon P (vast. Q) lentokoneen paikka (maan pinnalle projisoituna) ensimmäisen (vast. toisen) havainnon aikana. Merkitään myös $a = |AQ|$, $b = |BQ|$ ja $c = |BP|$. Tällöin, jos h on lentokoneen lentokorkeus, on

$$h = c\tan(28,0^\circ), \qquad h = b\tan(21,0^\circ)$$

ja

$$c = kb, \text{ missä } \qquad k = \frac{\tan(21,0^\circ)}{\tan(28,0^\circ)}.$$

Koska $\measuredangle PBQ = 45^\circ$, on $c = a\sqrt{2}$. Edelleen, koska, $|AB| = 21,6\text{km}$, suorakulmaisesta kolmiosta $\triangle ABC$ seuraa, että

$$21,6^\circ = b^2 + a^2 = b^2 + \frac{1}{2}c^2 = (1 + \frac{1}{2}k^2)b^2.$$

Siten

$$b = \frac{21,6}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}k^2}}.$$

Tällöin lentokorkeudeksi h tulee

$$h = b\tan 21^\circ = \frac{21,6\tan 21,0^\circ}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}k^2}} \approx \underline{7400\text{m.}}$$

Kosinilauseen perusteella koneen lentämälle matkalle $x = |PQ|$ pätee

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(45^\circ) = (1 + k^2 - k\sqrt{2})b^2$$

ja

$$x = b\sqrt{1 + k^2 - k\sqrt{2}}$$

joten koneen vauhti on $60x$ km/h $\approx$ <u>820 km/h</u>. (=230m/s).

5. Pallolla on liike-energiaa (törmäyksen jälkeen)
   1. pompussa $\frac{1}{2}m(v_1^+)^2$,
   2. pompussa $\frac{1}{2}m(v_2^+)^2 = 0,95 \cdot \frac{1}{2}m(v_2^-)^2 = 0,95 \cdot \frac{1}{2}m(v_1^+)^2$,

   $\vdots$

   n. pompussa $\frac{1}{2}m(v_n^+)^2 = (0,95)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}m(v_1^+)^2$

joten yleisesti

$$v_n^+ = v_1^+(\sqrt{0,95})^{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Koska 1. pomppuun kuluu aika $t_2 - t_1 = kv_1^+ = 0,6$, saadaan n. pomppuun kuluvaksi ajaksi

$$t_{n+1} - t_n = kv_n^+ = kv_1^+(\sqrt{0,95})^{n-1} = 0,6(\sqrt{0,95})^{n-1}.$$

Tällöin kokonaisaika (päättymättömään suppenevan geometrisen sarjan summana) on

$$0,6 + 0,6(\sqrt{0,95}) + 0,6(\sqrt{0,95})^2 + \cdots = \frac{0,6}{1 - \sqrt{0,95}} \approx \underline{23,7\text{s}}.$$

6. Sijoittamalla havaintoarvot malliin (I) $A_{n+1} = aA_n + bB_n$ saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 112a + 35b &= 133 \\ 133a + 49b &= 91 \\ 91a + 28b &= 112 \end{cases}$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan vakioiksi $a = 4$ ja $b = -9$. Kolmas yhtälö toteutuu, kun nämä sijoitetaan siihen. Johtopäätös on, että malli (I) on yhteensopiva havaintoaineiston kanssa. Vakio $b = -9$ merkitsee, että kukin B-lajin aikuinen syö (keskimäärin) 9 A-lajin toukkaa. Sijoittamalla havaintoarvot malliin (II) $B_{n+1} = cB_n + dA_n$ saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 35c + 112d &= 49 \\ 49c + 133d &= 28 \\ 28c + 91d &= 35 \end{cases}$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä $c = \frac{-69}{17}$ ja $d = \frac{29}{17}$. Sijoitus kolmanteen yhtälöön antaa ristiriidan $\frac{707}{17} = 35$. Malli (II) ei siten ole yhteensopiva havaintojen kanssa.