HTKK, TTKK, LTKK, OY, ÅA/Insinööriosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 30.5.1995
Ratkaisut

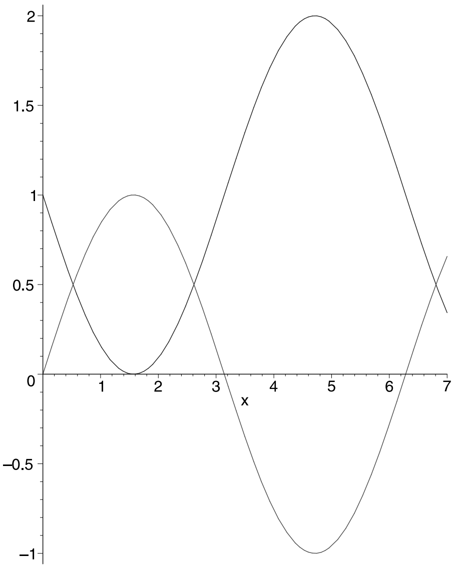
1. Olkoon tuotteen veroton hinta A. Silloin verollinen hinta 22%:n arvonlisäverolla on 1,22A ja 12%:n arvonlisäverolla vastaavasti 1,12A. Verollisen hinnan lasku on siis 0,1A, joka on prosentteina 1,22A:sta $100 \cdot \frac{0{,}1A}{1{,}22A} = 8,20$ (%).

2. Koska oletuksen mukaan on $f''(x) = 18x - 3\sqrt{x}$, on $f'(x) = 9x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + C_1$ ja $f(x) = 3x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C_1x + C_0$ (missä C_1 ja C_0 ovat integrointivakioita). Koska funktio f saa ääriarvon kohdassa $x = 1$, on $f'(1) = 0$, mistä seuraa $C_1 = -7$. Koska $f(1) = 2$, saadaan edelleen $C_0 = \frac{34}{5}$. Siis $f(x) = 3x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - 7x + \frac{34}{5}$. Piste $x = 1$ on minimikohta, sillä $f''(1) = 15 > 0$.

3. Nopeuden ollessa v ovat polttoainekustannukset tunnissa Av^2, missä A on verrannollisuuskerroin. Kun $v = 10$, on $Av^2 = 1500$, mistä saadaan $A = 15$. Siis kokonaiskustannukset/h ovat $K = 15v^2 + 4500$, jolloin kokonaiskustannukset/km ovat $f(v) = \frac{K}{v} = 15v + \frac{4500}{v}$. Ehdosta $f'(v) = 0$ saadaan f:n minimikohta: $v = 10\sqrt{3} = 17,32(km/h)$. (Derivaatan merkkitarkastelu vahvistaa, että tämä on todella minimikohta.)

4. Vektorin $\bar{v}$ vektoriprojektio vektorille $\bar{u}$ on $\bar{w} = (\frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \cdot \bar{v})\frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \frac{11}{3}(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$. Haettu peilikuvavektori on $\bar{w} + (\bar{w} - \bar{v}) = \frac{7}{3}\bar{i} + \frac{7}{3}\bar{j} + \frac{19}{3}\bar{k}$.

5. Leikkauspisteet (vrt. kuvio): $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{13\pi}{6}$. Kysytty pinta-ala on $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (\sin x - (1 - \sin x))dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} ((1 - \sin x) - \sin x)dx = (2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}) + (\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$.



6. a) Kuutioita tulee kolmeen kerrokseen, ja kunkin kuution mahtuminen (tai ei-mahtuminen) riippuu siitä, onko voimassa $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16a^2$, missä x, y, z ovat ko. kuution kauimpana varaston takanurkasta sijaitsevan kärkipisteen koordinaatit. Alimpaan kerrokseen mahtuu 8 kuutiota, seuraavaan 6 ja ylimpään 3 kuutiota, siis yhteensä 17.
b) (Oletetaan $a = 1$.) Varasto on $\frac{1}{8}$-pallo, jonka säde on $R = 100$ ja tilavuus siis $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 523598,7\ldots$. Koska yhden kuution tilavuus on 1, niitä siis ei voi mahtua yli 523598 kappaletta.
Ajatellaan varastoa rajoittavan pallokuoren sisään toinen pallokuori, jonka säde on yhden kuution lävistäjän verran pienempi kuin R, siis $R_0 = 100 - \sqrt{3}$. Jos varasto on mahdollisimman täynnä, ei sisemmän pallokuoren sisällä ole ollenkaan tyhjää. Koska sisemmän pallokuoren sisään jäävä tilavuus on $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = 496860,3\ldots$, ei suurin mahdollinen kuutioiden lukumäärä voi olla alle 496861.