HTKK, TTKK, LTKK, OY, ÅA/Insinööriosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 2.6.1999
Ratkaisut

1. Välttämätön ja riittävä ehto on, että kätrillä on korkeintaan yksi leikkauspiste, ts. että yhtälöllä

$$x^2 + 3ax = x^3 - 2x^2 + 3x$$

on korkeintaan yksi ratkaisu. Selvästi $x = 0$ on yhtälön ratkaisu (riippumatta vakion a arvosta), ja sieventämällä yhtälö saadaan seuraava ehto: käyrät eivät rajoita äärellisiä tasoaluetta jos ja vain jos yhtälöllä

$$x^2 - 3x + 3 - 3a = 0 \qquad (1)$$

ei ole reaalisia ratkaisuja paitsi mahdolisesti $x = 0$. Jos $x = 0$ olisi yhtälön (1) ratkaisu, niin $x = 3$ olisi myös ratkaisu. Siis ainoa mahdollisuus on, että yhtälöllä (1) ei ole ollenkaan reaalisia ratkaisuja, jolloin diskriminantin on oltava aidosti negatiivinen:

$$3^2 - 4(3 - 3a) < 0 \qquad eli \qquad \mathbf{a} < \frac{1}{4}$$

2. Auringonsäteiden suuntainen pylvään huipun kautta kulkeva suora toteuttaa yhtälöryhmän

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z - 12}{7/5}.$$

Kyseisen suoran ja seinän leikkauspiste toteuttaa lisäksi seinän yhtälön $y = \frac{6}{5}x + \frac{37}{7}$, ja näiden yhtälöiden ratkaisuna saadaan leikkauspisteen koordinaatit $x = \frac{185}{28}$, $y = \frac{185}{14}$ ja $z = \frac{11}{4} = 2.75$. Siis varjon huippu on seinällä korkeudella

$$\mathbf{2 \quad m \quad 75 \quad cm}.$$

3. Sarja on geometrinen suhdelukuna $\frac{-3}{x}$, joten se suppenee jos ja vain jos pätee $\left|\frac{-3}{x}\right| < 1$ eli $|x| > 3$. Sarjan summa on tällöin $\frac{1}{1+\frac{3}{x}} = \frac{x}{x+3}$. Yhtälön

$$\frac{3x + 8}{x + 1} = \frac{x}{x + 3} \qquad eli \qquad x^2 + 8x + 12 = 0$$

ratkaisut ovat $x = -2$ ja $x = -6$. Pisteessä $x = -2$ sarja hajaantuu, joten tehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu $\mathbf{x = -6}$.

4. (Huom: $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$.)

   Funktio E on derivoituva välillä $0 < p < 1$, ja

$$E'(p) = -\log_2 p - p\frac{1}{p\ln 2} + \log_2(1-p) + (1+p)\frac{1}{(1-p)\ln 2} = \log_2(\frac{1-p}{p}).$$

   Siis E'(p) = 0 jos ja vain jos $\frac{1-p}{p} = 1$ eli $p = \frac{1}{2}$.

   Selvästi $E'(p) > 0$ kun $0 < p < \frac{1}{2}$, ja $E'(p) < 0$ kun $\frac{1}{2} < p < 1$, joten p = $\frac{1}{2}$ on todella funktion E maksimikohta välillä $0 < p < 1$.

   Kysytty maksimiarvo on E($\frac{1}{2}$) = $-\frac{1}{2}\log_2(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\log_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \mathbf{1}$.

5. Kuution särmän pituuden x on oltava jaollinen luvuilla 7, 11 ja 13. Koska näillä ei ole yhteisiä tekijöitä, pienin mahdollinen x:n arvo on x=7 · 11 · 13 = 1001. Pienimmän mahdollisen kuution tilavuus on siten 1001^3. Yhden rasian tilavuus on 1001, joten (pienin mahdollinen) rasioiden lukumäärä on

$$\frac{1001^3}{1001} = 1001^2 = \mathbf{1002001}.$$

6. a) On näytettävä, että jos $x(t) = 0$ niin $y(t) = H$.

   Jos $x(t) = 0$, niin $t = \frac{R\sin\alpha}{v\cos\alpha}$; sijoittamalla tämä sekä tehtävässä annetut a ja p saadaan

$$y(t) = R\cos\alpha + vt\sin\alpha - (1/2)gt^2 = \ldots = R(\frac{a}{2} + \frac{1}{p} - \frac{a}{2p^2}) = H. \quad m.o.t.$$

   b) On määriteltävä suurin nopeus v (tai vastaavasti pienin vakion a arvo), jolla H $\leq$ 1.9 R kaikilla kulmilla α (eli kaikilla suureen p arvoilla, $0 < p \leq 1$).

   Jos nopeus v on annrttu, lausekkeen H = R($\frac{a}{2} + \frac{1}{p} - \frac{a}{2p^2}$) suurin arvo p:n suhteen saadaan derivoimalla:

$$\frac{dH}{dp} = \frac{R}{p^2}(\frac{a}{p} - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = a.$$

   helposti nähdään, että tämä on todella maksimikohta (paitsi jos a $\geq$ 1, mutta tällöin on $p_{max} = 1$ ja vastaava H:n arvo on H = R, jolloin varmasti pätee H $\leq$ 1.9R). Siin (tietllä nopeudella v) suurin H:n arvo saadaan sijoittamalla $p = a$:

$$H_{max} = \frac{R}{2}(a + \frac{1}{a}).$$

Saadaan (olettaen $a < 1$)

$$H_{max} < 1.9R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) < 1.9 \quad \Leftrightarrow \quad a > 1.9 - \sqrt{1.9^2 - 1} = 0.2845$$

eli

$$v < \sqrt{\frac{0.33g}{0.2845}} = 3.37(m/s) \quad eli \quad \mathbf{v < 12.1km/h}.$$