HTKK, TTKK, LTKK, OY, ÅA/Insinööriosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 2.6.1999

1. Miten reaaliluku a tulee valita, jotta paraabeli $y = x^2 + 3ax$ ja käyrä $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ eivät erottaisi xy-tasosta äärellistä aluetta?

2. Auringonpaisteessa 12 m korkeasta pystysuorasta sähköpylväästä syntyy varjo, joka yltää läheiselle pystysuoralle seinälle. Oletamme seuraavassa, että pylväs on pystytetty xyz-koordinaatiston origoon pitkin z-akselia ja että seinä kulkee pitkin suoraa $y = \frac{6}{5}x + \frac{37}{7}$ (koordinaattiakselien yksikkö 1 m). Kuinka korkealla pylvään pään varjopiste on seinällä, kun auringonsäteiden suunta on $-\bar{i} - 2\bar{j} + \frac{7}{5}\bar{k}$? (Vastaus 5 cm:n tarkkuudella.)

3. Millä reaaliluvulla x pätee yhtälö $\frac{3x+8}{x+1} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \ldots$?

4. Datalähde tuottaa binäärilukujonoja, joissa bitti 0 esiintyy todennäköisyydellä p ja bitti 1 todennäköisyydellä $1 - p$. Millä todennäköisyyden p arvoilla lähteen informaatiomäärä (entropia), joka määritellään funktiona

$$E(p) = -p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) \qquad (0 < p < 1)$$

saavuttaa suurimman arvonsa? Mikä tämä suurin arvo on? ($\log_2$ tarkoittaa 2-kantaista logaritmia)

5. Samankokoisista tulitikkurasioista, joiden sivujen pituuksien suhteet ovat $7 : 11 : 13$, kasataan täysi kuutio siten, että rasioiden yhtä pitkät sivut tulevat yhdensuuntaisiksi. Kuinka monta rasiaa vähintään tarvitaan? (Perustelu vaaditaan.)

6. Polkupyöräilijä, joka ajaa lokasuojattomalla maastopyörällä märkää vaakasuoraa tietä pitkin, voi likaantua selästään takapyörän heittämän kuran johdosta. Tarkastelemme ongelmaa pyörän mukana liikkuvassa (x, y)-koordinaatistossa, jonka x-akseli osoittaa ajosuuntaan. Olkoon v ajonopeus (vakio) ja R takapyörän säde. Newtonin liikelakien mukaan takapyörästä hetkellä $t = 0$ irtoavan kurapisaran lentoradan pisteet $((x, y) = x(t), y(t))$, $t \geq 0$ (ajan t yksikkö s), toteuttavat ehdot

$$\begin{cases} x(t) = & -R\sin\alpha + vt\cos\alpha \\ y(t) = & R\cos\alpha + vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

missä g on vakio $9,8\ m/s^2$ ja α kulma joka ilmoittaa kurapisaran satunnaisesti vaihtelevan irtoamiskohdan.

a) Merkitsemme $a = gR/v^2$ ja $p = \cos\alpha$. Näytä, että jos $0 < p \leq 1$, niin kurapisaran lentorata kulkee pisteen $(0, H)$ kautta, missä

$$H = R(\frac{1}{2}a + p^{-1} - \frac{1}{2}ap^{-2}).$$

b) Oletamme, että pyöräilijän selän kuraantumiselle piste $P = (0;\ 1,9R)$ on kriittinen, eli oletamme , että pyöräilijään osuvat vain ne kurapisarat, joiden lentorata ylittää pisteen P. Mikä saa nopeus v enintään olla, jotta pyöräilijä välttyisi kuraantumiselta, kun $R = 0,33\text{m}$? (Vastaus yhden desimaalin tarkkuudella yksiköissä km/h.)