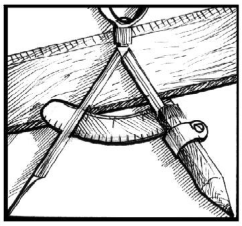


Ellipsit, hyperbelit ja paraabelit vinossa

Matti Lehtinen

1 Ellipsi, hyperbeli ja paraabeli suorassa

Opimme lukion analyyttisen geometrian kurssilla – ainakin, jos kävimme lukiota vielä muutama vuosi sitten – että ellipsin, hyperbelin ja paraabelin yhtälöt ovat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

ja

$$y = ax^2. \tag{3}$$

Yhtälöt ovat yksinkertaisia ja kauniita. Käyrien monia ominaisuuksia voi melko suoraan lukea yhtälöistä. Jos esimerkiksi $a > b$, niin ellipsin pisteille $(x,\, y)$ pätee

$$b^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 \le x^2 + y^2 \le x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2,$$

joten ellipsin lyhin etäisyys origosta on b ja pisin a, ja nämä saavutetaan pisteissä $(0,\, \pm b)$ ja $(\pm a,\, 0)$. Tai koska

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right),$$

niin aina kun x ja y ovat itseisarvoltaan suuria hyperbelin yhtälö (2) voi toteutua vain, jos jompikumpi tulon tekijä on lähes nolla. Hyperbelin pisteet ovat siis suurilla $|x|$:n ja $|y|$:n arvoilla lähellä suoria

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Sanomme, että nämä suorat ovat hyperbelin asymptootit.

2 Mutta riittääkö se?

Yhtälöissä (1) − (3) on kuitenkin heikkous, johon muuan Solmun lukija hiljattain kiinnitti huomionsa. Niissä oletetaan, että käyrät on pantu poseeraamaan yksinkertaisen asentoon: ellipsin keskipiste on origossa ja sen iso- ja pikkuakseli ovat koordinaattiakseleilla, hyperbelillä on samantapainen origon ja akselien suhteen symmetrinen asema ja paraabelin huippu on origossa ja akselina on tasan y-akseli. Mutta eiväthän oikeat ellipsit luonnossa ole näin. Satelliitin ellipsinmuotoisen radan iso- ja pikkuakselit eivät asetu minkään itsestään selvän maanpäällisen koordinaatiston mukaisesti.

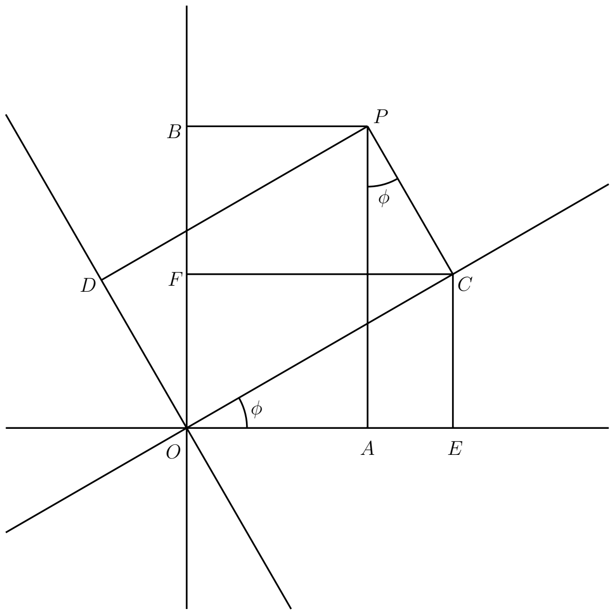
”Yliopistomatematiikassa” ellipsien, hyperbelien ja paraabelien eli yhdellä sanalla kartioleikkausten (nämä käyrät nimittäin voi synnyttää ympyräkartion ja sen suhteen eri asennoissa olevien tasojen leikkauksina, kuten jo antiikin ajoista on tiedetty) tutkimuksessa sovelletaan nykyisin tavallisesti symmetristen matriisien ominaisarvoteoriaa. Katsotaan tässä, mitä asiasta saattaisi saada irti hiukan kotikutoisemmilla keinoilla, niin sanotulla raa'alla laskemisella. Yritys saattaa vaikuttaa masokistiselta, mutta sen tehtyään ymmärtää tason geometriasta yhtä ja toista ja on saanut kohtuullisen hyvän lausekkeiden manipulointiharjoituksen. Matematiikan tekemistä helpottaa aina mukavasti se, että lausekkeiden käsittelyn perusalgebra ei takkua!

3 Kallistetaan!

Lähdetään liikkeelle ellipsistä tai hyperbelistä, jonka yhtälö on

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja muistetaan, että vaihtoehtoisista etumerkeistä ylempi liittyy ellipsiin, alempi hyperbeliin. Haluamme nyt asettaa kuvion muuhun kuin alkuperäiseen asentoon. Sen sijaan, että kääntäisimme kuviota, käännämmekin sen alla olevaa tasoa tai oikeastaan vain koordinaattiakseleita. Sehän käy näin:



Jos P on piste ja A sen kohtisuora projektio x-akselille ja B kohtisuora projektio y-akselille, niin P:n koordinaatit x ja y ovat janojen OA ja OB pituudet, asianmukaisin etumerkein varustettuina. Jos nyt koordinaattiakseleita kierretään vaikkapa niin, että vanhan x-akselin ja uuden x'-akselin välinen kulma on ϕ, niin pisteen P projektio uudella x'-akselilla on C ja uudella y'-akselilla D. P aseman määrittävät nyt luvut $x' = OC = DP$ ja $y' = OD = CP$. Olkoot vielä E ja F pisteen C kohtisuorat projektiot x-akselilla ja y-akselilla. Mutta $\angle CPA = \phi$, joten $x = OA = OE - AE = OC \cdot \cos\phi - CP \cdot \sin\phi = x' \cos\phi - y' \cdot \sin\phi$. Vastaavasti $y = AP = EC + FB = OC \cdot \sin\phi + CP \cdot \cos\phi = x' \cdot \sin\phi + y' \cdot \cos\phi$.

Piste $P = (x,\, y)$ kuuluu ellipsiin tai hyperbeliin, jonka yhtälön voimme kirjoittaa muotoon

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2, \tag{4}$$

silloin ja vain silloin, kun x ja y toteuttavat yhtälön (4). Jos pisteen P sijainti ilmoitetaan uuden koordinaatiston avulla luvuilla x', y', sen kuuluminen mainittuun käyrään riippuu edelleen siitä, toteuttavatko x ja y yhtälön (4) vai ei. Mutta tämä merkitsee, että käyrään kuulumisen ehto uusien koordinaattien avulla lausuttuna täytyy olla

$$b^2(x' \cos\phi - y' \sin\phi)^2 \pm a^2(x' \sin\phi + y' \cos\phi)^2 = a^2b^2.$$

Kun tässä yhtälössä tehdään potenssiin korotukset ja yhdistetään termit, saadaan

$$(b^2\cos^2\phi \pm a^2\sin^2\phi)x'^2 + (b^2\sin^2\phi \pm a^2\cos^2\phi)y'^2 + 2(\pm a^2 - b^2)\cos\phi\sin\phi x'y' = a^2b^2.$$

Käyrän yhtälö uusissa koordinaateissa on siis muotoa

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Cx'y' = G. \tag{5}$$

Selvin muutos lähtöyhtälöön on "sekatermin" $x'y'$ ilmaantuminen. A ja B eivät enää myöskään sisällä sillä tavoin suoraa informaatiota käyrän muodosta kuin yhtälöt (1) ja (2) tai (4).

Eräs mielenkiintoinen ominaisuus uudella muodolla on. Lasketaan suure $AB - C^2$. Se on

$$\begin{aligned}&(b^2\cos^2\phi \pm a^2\sin^2\phi)(b^2\sin^2\phi \pm a^2\cos^2\phi) - (\pm a^2 - b^2)^2\cos^2\phi\sin^2\phi \\ &\qquad = \pm a^2b^2(\sin^4\phi + \cos^4\phi) \pm 2a^2b^2\cos^2\phi\sin^2\phi = \pm a^2b^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)^2 = \pm a^2b^2.\end{aligned}$$

Kierron jälkeisessä yhtälössä suure on siis sama kuin alkuperäisessä yhtälössä (4) (jossa $C = 0$). Toisen asteen yhtälön diskriminanttia muistuttava suure $AB - C^2$ on invariantti koordinaatistojen kierron suhteen. Erityisesti suureen $AB - C^2$ etumerkki paljastaa heti, onko yhtälöön (5) päädytty soveltamalla kierron koordinaattimuutosta ellipsin vai hyperbelin yhtälöön.

Jos haluamme ellipsimme tai hyperbelimme ei ainoastaan tiettyyn asentoon vaan myös tiettyyn paikkaan, on tehtävä vielä origon siirto, sanokaamme pisteeseen $(x_0',\, y_0')$. Se merkitsee vielä uusia koordinaatteja $x'' = x' - x_0'$, $y'' = y' - y_0'$. Yhtälö (5) on uusissa koordinaateissa x'', y''

$$A(x'' + x_0')^2 + B(y'' - y_0')^2 + 2C(x'' + x_0')(y'' + y_0') = G,$$

joka puolestaan sievenee muotoon

$$Ax''^2 + By''^2 + 2Cx''y'' + 2Dx'' + 2Ey'' + F = 0. \tag{6}$$

Katsotaan vielä, mitä kierto ja siirto tekevät paraabelille (3). Kierron jälkeen nähdään, että paraabeliin kuuluvat pisteet $(x',\, y')$, joille pätee

$$x' \sin\phi + y' \cos\phi = a(x' \cos\phi - y' \sin\phi)^2$$

eli

$$x'^2 a\cos^2\phi + y'^2 a\sin^2\phi - x'y'2a\cos\phi\sin\phi - x'\sin\phi + y'\cos\phi = 0.$$

Tämä yhtälö on muotoa

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Cx'y' + D'x' + E'y' = 0.$$

Origon siirto $x'' = x' - x_0'$, $y'' = y' - y_0'$ johtaa lopulta tasan samanlaiseen muotoon kuin yhtälössä (6). Mutta mitä on nyt $AB - C^2$? Se on

$$a^2\cos^2\phi\sin^2\phi - a^2\cos^2\phi\sin^2\phi = 0.$$

Jokaisessa paraabelin kierrosta syntyneessä käyrän yhtälössä (6) on $AB - C^2 = 0$.

4 Mutta samaanhan olisi päästy määritelmästäkin

Ellipsi on yhden määritelmänsä mukaan käyrä, jonka pisteiden kahdesta kiinteästä pisteestä laskettujen etäisyyksien summa on vakio, hyperbeli vastaavasti käyrä, jonka pisteiden kahdesta kiinteästä pisteestä laskettujen etäisyyksien erotus on vakio. Nämä kaksi kiinteää pistettä ovat ellipsin tai hyperbelin *polttopisteet*. Vakiintuneen merkintätavan mukaan edellä mainittu summa tai erotus on $2a$ ja polttopisteet ovat etäisyydellä $2c$ toisistaan. Ellipsin tapauksessa on oltava $a > c$, hyperbelin tapauksessa $a < c$, tämän kertoo kolmioepäyhtälö. Toimitaan koordinaatistossa, jossa origo on polttopisteiden välisen janan keskipiste. Silloin polttopisteet ovat $(c\cos\alpha,\ c\sin\alpha)$ ja $(-c\cos\alpha,\ -c\sin\alpha)$, jollakin kulman α arvolla. Ellipsin määrittelyehto on

$$\sqrt{(x-c\cos\alpha)^2+(y-c\sin\alpha)^2}+\sqrt{(x+c\cos\alpha)^2+(y+c\sin\alpha)^2}=2a \tag{7}$$

ja hyperbelin

$$\sqrt{(x-c\cos\alpha)^2+(y-c\sin\alpha)^2}-\sqrt{(x+c\cos\alpha)^2+(y+c\sin\alpha)^2}=\pm 2a, \tag{8}$$

($\pm$-merkki tarvitaan, koska hyperbelin piste voi olla lähempänä toista tai toista polttopistettä.) Kun yhtälöitä (7) ja (8) lähdetään sieventämään, tullaan ensin yhtälöön

$$(x-c\cos\alpha)^2+(y-c\sin\alpha)^2=\left(2a\pm\sqrt{(x+c\cos\alpha)^2+(y+c\sin\alpha)^2}\right)^2$$

eli

$$\begin{aligned}&x^2-2cx\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha+y^2-2cy\sin\alpha+c^2\sin^2\alpha\\&\qquad=4a^2\pm 2a\sqrt{(x+c\cos\alpha)^2+(y+c\sin\alpha)^2}+x^2+2cx\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha+y^2+2cy\sin\alpha+c^2\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

Kun tästä pyyhitään pois samat termit yhtälön molemmilta puolilta ja vielä jaetaan neljällä, jää lupaavasti vain

$$a^2+cx\cos\alpha+cy\sin\alpha=\pm a\sqrt{(x+c\cos\alpha)^2+(y+c\sin\alpha)^2}.$$

Kun vielä korotetaan toiseen potenssiin, saadaan

$$\begin{aligned}&a^4+c^2x^2\cos^2\alpha+c^2y^2\sin^2\alpha+2c^2xy\cos\alpha\sin\alpha+2a^2cx\cos\alpha+2a^2cy\sin\alpha\\&\qquad=a^2(x^2+2cx\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha+y^2+2cy\sin\alpha+c^2\sin^2\alpha).\end{aligned}$$

Tässäkin on samoja termejä yhtälön molemmin puolin! Pyyhitään ne pois ja käytetään tietoa $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Jäljelle jää yhtälö

$$(a^2-c^2\cos^2\alpha)x^2+(a^2-c^2\sin^2\alpha)y^2-2c^2\cos\alpha\sin\alpha=a^2(a^2-c^2).$$

Jos otetaan käyttöön merkintä $b^2=a^2-c^2$, kun $a>c$ ja $b^2=c^2-a^2$, kun $a<c$, niin on päädytty ellipsin ja hyperbelin yhtälöihin

$$(a^2\sin^2\alpha\pm b^2\cos^2\alpha)x^2+(a^2\cos^2\alpha\pm b^2\sin^2\alpha)y^2-2(a^2\mp b^2)xy\cos\alpha\sin\alpha=\pm a^2b^2$$

tai yhtäpitävästi

$$(b^2\cos^2\alpha\pm a^2\sin^2\alpha)x^2+(b^2\sin^2\alpha\pm a^2\cos^2\alpha)y^2+(2(b^2\mp a^2)\cos\alpha\sin\alpha)xy=a^2b^2.$$

Tämähän näyttää aivan samalta kuin aikaisemmin perusasentoisesta yhtälöstä kiertämällä johdettu yhtälö. Tarkkaavainen lukija huomaa yhden eron, sillä xy-termit ovat erimerkkisiä. Sillekin on selityksensä. Aikaisempi yhtälö lähti siitä, että käyrä ensin oli perusasennossa ja xy-termin sisältävään yhtälöön päästiin, kun koordinaatistoa kierrettiin kulman ϕ verran. Tämä jälkimmäinen yhtälö johdettiin suoraan xy-koordinaateissa, polttopisteiden välinen jana vain oli kulmassa α x-akseliin nähden. Jos alkuperäinen akseli olisi kulkenut polttopisteitten kautta, olisi xy-koordinaatistoon päästäkseen pitänyt panna toimeen kierto kulman $\phi=-\alpha$ verran. Etumerkkieron selitys on nyt siinä, että $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, mutta $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

5 Yhtälö tunnetaan, mikä on käyrä?

Minkä kuvion muodostavat ne tason pisteet, jotka toteuttavat yhtälön

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0? \tag{9}$$

Pahimmassa tapauksessa ehdon toteuttavia pisteitä ei ole ollenkaan tai vain yksi, ja joskus yhtälön vasen puoli saattaa jakautua kahdeksi ensimmäisen asteen tekijäksi, jolloin yhtälön toteuttavat kahden eri suoran pisteet. Näitä erikoistapauksia lukuunottamatta (9) esittää kartioleikkausta. Minkälainen leikkaus on kyseessä, se nähdään kun koordinaatistoa kierretään niin, että xy-termi häviää. Kiertoyhtälöiden

$$\begin{cases} x = x' \cos\phi - y' \sin\phi \\ y = x' \sin\phi + y' \cos\phi \end{cases}$$

huomioon ottamisen jälkeen (9):n toisen asteen termit ovat

$$\begin{aligned}(A\cos^2\phi + B\sin^2\phi + 2C\sin\phi\cos\phi)x'^2 + (A\sin^2\phi + B\cos^2\phi - 2C\sin\phi\cos\phi)y'^2 \\ + (2(B-A)\sin\phi\cos\phi + 2C(\cos^2\phi - \sin^2\phi))x'y'.\end{aligned}$$

Termin $2x'y'$ kerroin on

$$(B-A)\sin(2\phi) - 2C\cos(2\phi).$$

Jos $B = A$, niin $x'y'$:n kerroin on nolla, kun $\cos(2\phi) = 0$ eli kun $\phi = \pm 45°$. Jos $B \neq A$, kerroin on nolla, kun

$$\tan(2\phi) = \frac{2C}{A-B}. \tag{10}$$

Kun kiertokulma ϕ valitaan näin, yhtälön (9) toisen asteen termit ovat yksinkertaisesti

$$A'x'^2 + B'y'^2.$$

Käyrän olemus selviää tulosta $A'B'$. Jos A' ja B' ovat samanmerkkiset, käyrä on ellipsi, jos erimerkkiset, käyrä on hyperbeli. Jos toinen kertoimista A', B' on nolla, käyrä on paraabeli. Käyrän laji määrittyy siis tulosta $A'B'$. Lasketaan se, kun (10) on voimassa eli kun pätee

$$(A-B)\cos\phi\sin\phi = C(\cos^2\phi - \sin^2\phi). \tag{11}$$

Kun käytetään hyväksi yhtälöä (11) ja temppua

$$\cos^4\phi + \sin^4\phi = (\cos^2\phi + \sin^2\phi)^2 - 2\sin^2\phi\cos^2\phi = 1 - 2\sin^2\phi\cos^2\phi,$$

saadaan

$$\begin{aligned}A'B' &= (A\cos^2\phi + B\sin^2\phi + 2C\cos\phi\sin\phi)(A\sin^2\phi + B\cos^2\phi - 2C\cos\phi\sin\phi) \\ &= AB(\sin^4\phi + \cos^4\phi) + (A^2 + B^2)\cos^2\phi\sin^2\phi + \\ &\quad + 2C\cos\phi\sin\phi(B-A)(\cos^2\phi - \sin^2\phi) - 4C^2\cos^2\phi\sin^2\phi \\ &= AB - (A-B)^2\sin^2\phi\cos^2\phi + 2C\cos\phi\sin\phi(B-A)(\cos^2\phi - \sin^2\phi) - 4C^2\cos^2\phi\sin^2\phi \\ &= AB + C^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)^2 - 2C^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)^2 - 4C^2\cos^2\phi\sin^2\phi \\ &= AB - C^2(\cos^2(2\phi) + \sin^2(2\phi)) = AB - C^2.\end{aligned}$$

Yhtälön (9) esittämä käyrä on siis (mainittuja suoraviivaisia erikoistapauksia lukuun ottamatta) ellipsi, paraabeli tai hyperbeli sen mukaan, onko $AB - C^2 > 0$, $= 0$ tai < 0.