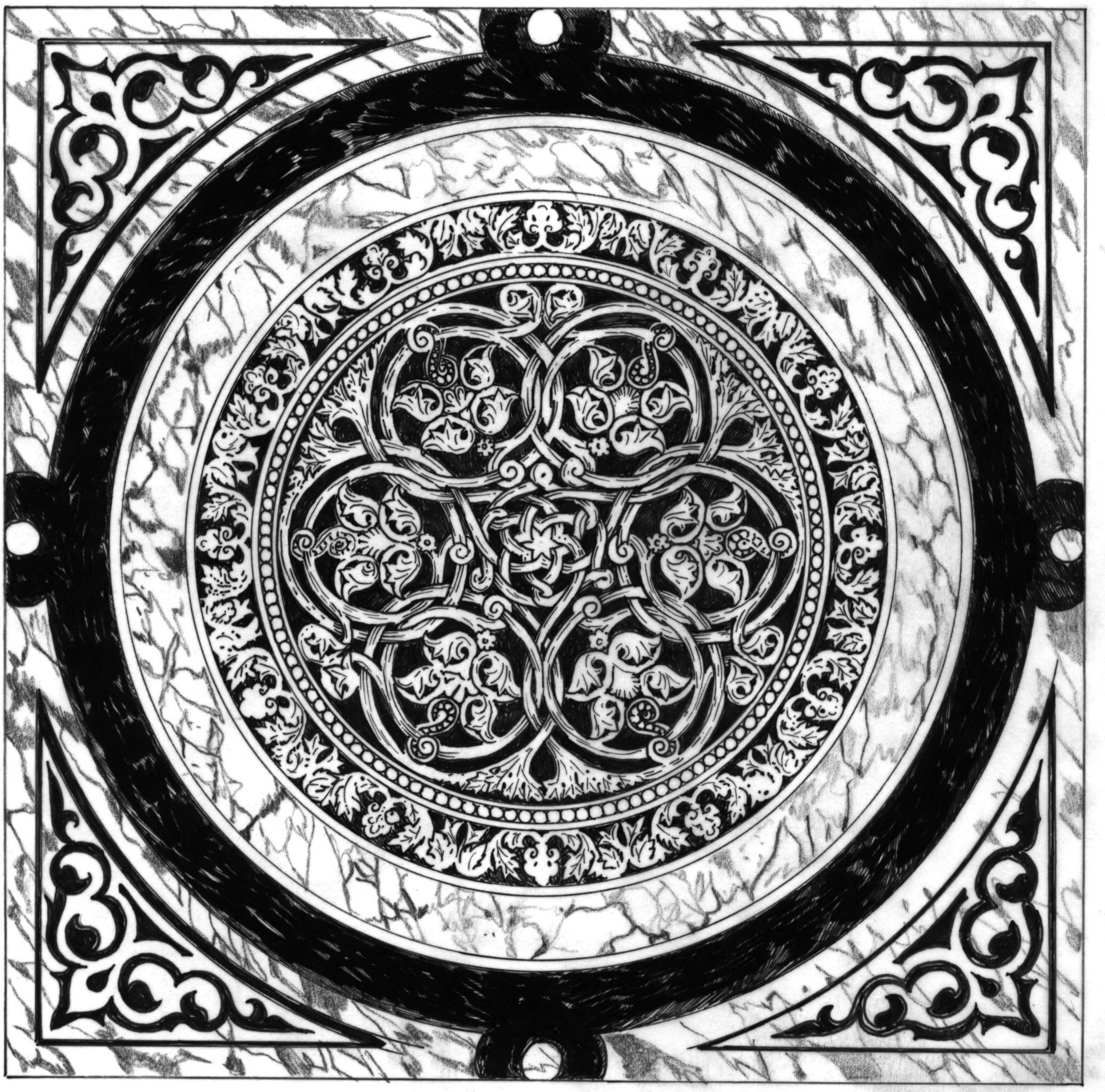
Solmu

Matematiikkalehti
1/2001

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 1/2001

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

Sähköposti
toimitus@solmu.math.helsinki.fi

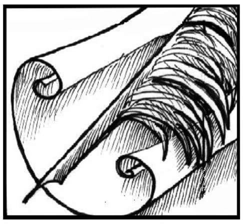
Seuraavaan lehteen tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään huhtikuun 2001 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Opetusministeriötä ja Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan nykyisin vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Täydellisen kokoelman Solmun jo ilmestyneitä paperikopioita voi pyytää esim. koulun kirjastoon niin kauan kuin niitä riittää. Ilmoittakaa postiosoitteenne ja mitkä numerot haluatte joko yllä mainittuun Solmun postiosoitteeseen tai sähköpostilla osoitteeseen toimitus@solmu.math.helsinki.fi.

Sisällys



Pääkirjoitus

Matematiikkaa opiskellaan yliopistoissa ja ammattikorkeakouluissa paljon enemmän sivuaineena kuin pääaineena. Tämä saattaa olla pienoinen yllätys monille lukiolaisille ja myös niille opiskelijoille, jotka eivät kohtaa matematiikan opintoja heti alussa.

Yleensä pidetään selvänä, että luonnontieteiden ja tekniikan eri alojen opinnot alkavat jonkinlaisella annoksella matematiikkaa. Myös lääke-, yhteiskunta- ja taloustieteissä matematiikka, ja varsinkin tilastomatematiikka, kuuluvat opintoihin jossakin vaiheessa, vaikkei ehkä aivan alussa.

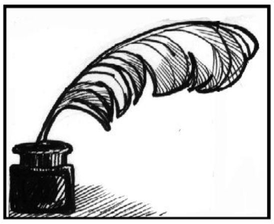
Viime aikoina on kuitenkin tullut esille joitakin tätä käytäntöä kritisoivia kommentteja, varsinkin tietotekniikan piiristä. Kritiikin pääasiallinen sisältö näyttäisi olevan se, että matematiikan kursseja on liikaa ja että kaiken lisäksi niillä opetettaisiin ”väärää matematiikkaa”. Se, kuinka paljon matematiikkaa tiettyyn tutkintoon sisältyy, on tietysti viime kädessä kyseessä olevan tahon itsensä päätettävissä, mutta monissa purkauksissa kuvastuu lähinnä paine opintokokonaisuuksien keventämiseen ja samalla opiskeluaikojen lyhentämiseen, jolloin helpoin, mutta samalla vaarallisin ratkaisu on ryhtyä karsimaan sivuaineita.

Mitä taas tulee ”väärän” matematiikan opettamiseen, voi näillä puheilla olla jonkinlaista perää siinä mielessä, että perinteisten matematiikan sivuainekurssien suunnittelussa on usein ajateltu lähinnä fysiikan tai kemian opintoja. Tällöin pääosissa ovat funktiot, derivaatat, integraalit ja differentiaaliyhtälöt. Tietojenkäsittelijöiden kohdalla enemmän huomiota voisi kiinnittää esimerkiksi tiettyihin algebran alueisiin, diskreettiin matematiikkaan ja matematiikassa esiintyviin algoritmeihin. Toisaalta myös algoritmien toiminnan analysointi johtaa funktioita koskeviin matemaattisiin kysymyksiin, minkä voi jokainen itse todeta lukemalla tätä uusinta Solmun numeroa. Opetukseen liittyvät ongelmat ovat kyllä matemaatikkojen tiedossa, mutta vaatimattomilla resursseilla ei aina voida järjestää useita erilaisia matematiikan sivuainekursseja.

Toisaalta matematiikan opiskeluun liittyy monien aineiden kohdalla tietty yleissivistyksen ajatus: koska useilla aloilla käytettävät menetelmät ja periaatteet ovat ainakin osittain matemaattisia, pitäisi kaikilla alan ammattilaisilla olla jonkinlainen käsitys näistä perusteista. Tietysti autoakin voi ajaa katsomatta koskaan konepellin alle, mutten pidä tätä kovin ammattimaisena autoiluna. Vielä kärjistetymmin voisi kuvitella, että ohitusleikkauksen pystyy tekemään parin vuoden täsmäkoulutuksen ja tietyn harjoittelujakson jälkeen; tällöin esimerkiksi anatomian oppikirjoista jätettäisiin lukematta kaikki kaulan yläpuolella ja vatsan alapuolella olevat ruumiinosat. Jos koulutusohjelmia muutetaan hyvin kapean sektorin ammattilaisten kouluttamisen suuntaan, voidaan kysyä, onko niitä enää aihetta kutsua korkeakoulututkinnoiksi.

En aio ryhtyä ennustamaan tietotekniikan kehityssuuntia, mutta luullakseni alan viime aikojen nopea kehitys ja siitä seurannut työvoimapula vääristävät käsityksiä siitä, mitä alan ammattilaisilta tulevaisuudessa odotetaan.

Pekka Alestalo



Toimitussihteerin palsta

Kuten Mika Koskenoja edellisellä toimitussihteerin palstalla lupasi, Solmun verkkosivut on uudistettu syksyn ja alkutalven aikana. Samalla sivut siirrettiin uudelle palvelinkoneelle – josta kiitos Wihurin rahastolle – ja niiden osoitteet muutettiin lyhyemmiksi ja loogisemmiksi. Solmun pääsivu on nykyään

`http://solmu.math.helsinki.fi`

ja kaikki vuonna 2001 ilmestyvä materiaali tulee osoitteeseen

`http://solmu.math.helsinki.fi/2001/`

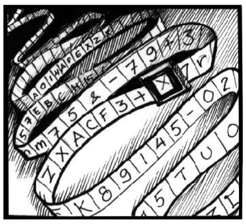
Tästä numerosta 1/2001 lähtien lehdet numeroidaan kalenterivuosien mukaan, ja vanhakin aineisto on järjestetty palvelimelle kalenterivuosien mukaisiin hakemistoihin. Tavoitteemme on, että nykyisiä osoitteita voi käyttää aina jatkossakin.

Myös kaikkien vanhojen osoitteiden pitäisi toimia, koska edelliseltä palvelimelta on järjestetty automaattinen ohjaus uudelle. Jos näin ei ole (eli jos jokin vanha linkki Solmun sivuille ei enää toimi), pyydämme ilmoittamaan osoitteeseen `toimitus@solmu.math.helsinki.fi`. Samoin toivomme meille kerrottavan muistakin ongelmista Solmun sivuilla.

Solmun verkkosivut eivät ole vielä valmiit. Suunnittelemme sivuille hakumahdollisuutta ja hienostuneempaa käyttöliittymää keskustelupalstalle.

Tätä Solmua tehdessämme sovelsimme uutta käytäntöä, jonka mukaan jutut näkyvät verkossa sitä mukaa kuin ne saadaan valmiiksi. Näin lukijat saavat jutut aikaisemmin nähtäväkseen ja toimituksen kiire monistuksen edellä vähenee.

Jouni Seppänen



Mitä tekemistä logaritmeilla on tietokoneiden kanssa?

Pekka Kilpeläinen
Kuopion yliopisto
Tietojenkäsittelytieteen ja sovelletun matematiikan laitos

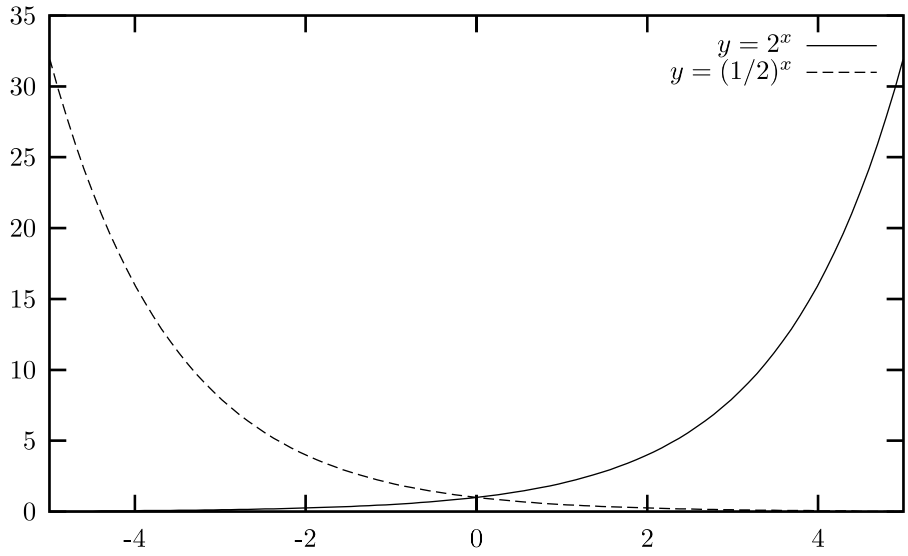
Eräs opiskelija kysyi pitämälläni Algoritmien suunnittelun ja analysoinnin luennolla: "Mitä tekemistä logaritmeilla on tietokoneiden kanssa?" Arvelen hänen kysymyksensä heijastavan sitä monien opiskelijoiden opintoja haittaavaa käsitystä, että matematiikka olisi tietojenkäsittelyn kannalta hyödytöntä. Asia on kuitenkin päinvastoin: matematiikka on tietojenkäsittelyilmiöiden kunnolliselle ymmärtämiselle hyödyllistä ja osin jopa välttämätöntä. Koska lisäksi juuri logaritmifunktio on tietojenkäsittelyn kannalta varsin keskeinen, pyrin valaisemaan kysyttyä asiaa muutamalla yksinkertaisella esimerkillä tiedon esittämiseen tarvittavasta tilasta ja tiedon käsittelemiseen tarvittavasta työmäärästä.

Mitäs ne logaritmit olivatkaan?

Eksponenttifunktio $f(x) = b^x$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla x ja jokaisella kantalukuna toimivalla positiivisella reaaliluvulla b. Tapaus $b = 1$ on melko mielenkiinnoton, koska $1^x = 1$, mutta muulloin b-kantainen eksponentti on injektiivinen ja kaikki positiiviset reaaliarvot saava funktio. (Katso kuva 1.) Positiivisille reaaliluvuille x määritelty logaritmifunktio $\log_b x$ on tällöin b-kantaisen eksponentin käänteisfunktio, eli $\log_b x$ on se yksikäsitteinen luku y, jolla $b^y = x$. Toisin sanoen $b^{\log_b x} = x$, eli $\log_b x$ on se potenssi, johon kantaluku b on korotettava tuloksen x saamiseksi.

Logaritmi on sikäli mukava operaattori, että se muuttaa argumenttinaan olevan lausekkeen laskutoimituksia helpommiksi: kertolaskusta tulee yhteenlasku ($\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$), jakolaskusta tulee vähennyslasku ($\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$), ja potenssiinkorotus muuttuu kertolaskuksi ($\log_b x^y = y \log_b x$).

Logaritmin kantaluku voi siis olla melkein mikä tahansa. Matematiikassa tarkastellaan useimmin *luonnollista logaritmia* $\ln x = \log_e x$, jonka kantaluku on ns. Neperin luku $e \approx 2{,}718$. Luonnontieteissä usein luonteva logaritmin kantaluku on 10, kun taas tietojenkäsittelyssä kaksikantainen logaritmi on usein kätevin. Logaritmin kantaluvulla ei itse asiassa ole kovin suurta väliä: Logaritmifunktiot ovat kasvavia kaikilla positiivisilla kantaluvuilla ja poikkeavat tällöin toisistaan vain vakiokertoimella, joka on toisen logaritmin arvo toisen kantaluvusta:



Kuva 1: Eksponenttifunktioiden kuvaajia.

$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x$. Tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että kaksikantaisen logaritmin $\log_2 x$ arvo on luonnollisen logaritmin $\ln x$ arvoon verrattuna $1/\ln 2$- eli likimain $1/0{,}693 = 1{,}44$-kertainen. (Katso kuva 2.)

Tietojenkäsittelyn kannalta tärkeä logaritmifunktion ominaisuus on sen hidas kasvuvauhti, jonka voi havaita kuvasta 2. Ominaisuutta voi perustella myös logaritmifunktion derivaatalla. Tunnetusti $D \ln x = \frac{1}{x}$. Derivaatan arvohan annetussa pisteessä vastaa funktion kuvaajalle kyseiseen pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerrointa. Suurilla muuttujan x arvoilla logaritmifunktion tangentin kulmakerroin $1/x$ lähestyy nollaa, eli kuten kuvasta 2 nähdään, logaritmifunktion kasvu alkaa muistuttaa vakiofunktion (olematonta) kasvua. Näemme jatkossa esimerkkejä siitä, että käytännössä esiintyvien lukujen logaritmit ovat usein varsin pieniä. Tästä huolimatta on syytä muistaa, että argumentin kasvaessa myös logaritmifunktion arvo kasvaa rajoittamattoman suureksi.

Konkretisoidaan vielä logaritmin kasvuvauhtia muutamalla esimerkillä kaksikantaisesta logaritmista. Eräs perustelu sen hitaalle kasvuvauhdille on edellä mainittu logaritmin kertolaskun yhteenlaskuksi muuttava käyttäytyminen: $\log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$. Argumentin kaksinkertaistaminen kasvattaa kaksikantaisen logaritmin arvoa siis vain ykkösellä. Konkreettisina esimerkkeinä todetaan vaikka, että luvun 1000 kaksikantainen logaritmi on hieman alle 10, sillä $2^{10} = 1024$.[1] Edelleen on helppo päätellä, että myös miljoonan ja miljardin logaritmit ovat vielä suhteellisen pieniä: $\log_2 1\,000\,000 = \log_2 1000^2 = 2 \log_2 1000 \approx 2 \cdot 10 = 20$, ja $\log_2 10^9 = \log_2(1000 \cdot 10^6) = \log_2 1000 + \log_2 1\,000\,000 \approx 10 + 20 = 30$.

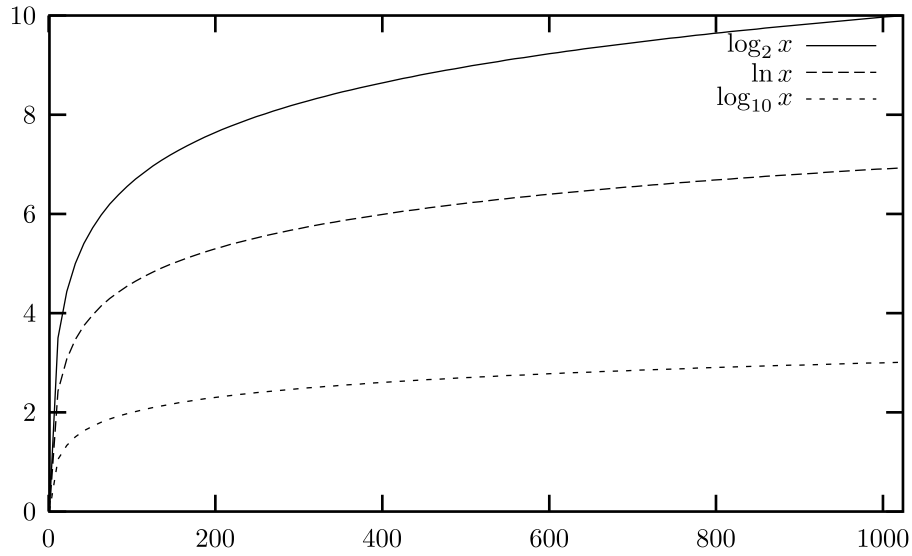
Logaritmi, algoritmi, biorytmi ...?

Algoritmi kuulostaa lähes samalta kuin ”logaritmi”: sanat saadaan toisistaan siirtämällä kaksi kirjainta uuteen paikkaan. Mitä sitten algoritmit ovat, ja onko niillä ja logaritmeilla jotain järkevääkin yhteyttä?

Algoritmeilla tarkoitetaan tietojenkäsittelyongelmien täsmällisiä ratkaisumenetelmiä. Jokaisen tietokoneohjelman ytimenä on jonkinlainen algoritmi. Algoritmitutkimus on tietojenkäsittelytieteen keskeinen ala, jonka käytännöllisenä tavoitteena on kehittää tietojenkäsittelyongelmille hyödyllisiä ratkaisualgoritmeja. Tyypillinen tarkastelun kohde on esimerkiksi se, miten tietoa järjestetään tai etsitään tehokkaalla tavalla eri tilanteissa.

Tietokoneohjelmissa tai -laitteissa käyttöön otettavien algoritmien pitäisi olla ”hyviä”. Algoritmin tulee tietenkin toimia oikein eli suorittaa virheettömästi sitä tehtävää, johon se on kehitetty. Mitä tämän lisäksi pidetään hyvänä voi vaihdella tilanteesta toiseen, mutta yleensä tavoitellaan jossain mielessä tehokkaita ratkaisuja. Tavallisimpia

[1] Kaksijärjestelmän keskeisyydestä tietokoneissa johtuu, että yleensä tuhatkertaisuutta tarkoittava etuliite ”kilo” tarkoittaa tietotekniikassa juuri arvoa $2^{10} = 1024$.



Kuva 2: Logaritmifunktioiden kuvaajia.

algoritmien tehokkuusmittareita ovat tiedon käsittelyyn tarvittu *aika* ja toisaalta tiedon esittämiseen tarvittu *muistitila*. Tehokkaimpia ovat algoritmit, jotka toimivat nopeimmin ja vaativat vähiten muistitilaa.

Yleensä algoritmit ovat ratkaisuja periaatteessa saman ongelman hieman erilaisille ja erikokoisille tapauksille. Ajatellaan esimerkkinä vaikka jonkin henkilön etsimistä puhelinluettelosta. Nimeä voi etsiä täsmälleen samalla tavalla vaikkapa Helsingin, Heinolan tai Hauhon puhelinluettelosta – yleinen menetelmä toimii kaikissa tapauksissa, vaikka luetteloiden sisällöt ovat aivan erilaiset. Toisaalta nimen etsiminen isommasta luettelosta voi arvatenkin olla työläämpää kuin sen paikantaminen pienemmästä joukosta nimiä. Tämän takia algoritmien tehokkuutta ei ilmoiteta kiinteinä absoluuttisina arvoina.

Algoritmianalyysissä pyritään matemaattisiin lausekkeisiin, jotka kuvaavat algoritmin tekemää työmäärää suhteessa käsiteltävän *tapauksen kokoon*. Puhelinluetteloesimerkissä luonteva ongelman tapauksen kokoa kuvaava parametri n voisi olla puhelinluettelossa mainittujen nimien lukumäärä. Yksinkertainen (mutta typerä) tapa etsiä annetun henkilön puhelinnumeroa olisi lukea luetteloa alusta alkaen nimi kerrallaan kunnes nimi löytyy tai luettelo loppuu. Pahimmillaan tällaisessa *peräkkäishaussa* tutkitaan kaikki luettelon n nimeä. Kyseisen algoritmin *aikavaativuuden* sanotaan olevan *lineaarinen* (suhteessa nimien lukumäärään n). Luettelon piteneminen kaksinkertaiseksi vaatii peräkkäishaussa pahimmillaan kaksinkertaisen etsintätyön.

Palataan puhelinluetteloetsintään ja sen tehokkaampaan suorittamiseen *logaritmisella* määrällä suoritusaskeleita hetken kuluttua. Tarkastellaan ensin kokonaislukujen esityksen pituutta, sillä kyseisestä tarkastelusta on hyötyä myös etsintäongelman työläyden arvioinnissa.

Kuinka pitkä on budjetin loppusumma?

Kokonaisluvut ovat keskeisimpiä informaation esittämisen välineitä. Niillä voi laskea lukumääriä tai nimetä mielivaltaisia asioita tyyliin ”ensimmäinen”, ”toinen”, jne. Tutustumme nyt kokonaislukujen pituuden ja niiden logaritmien läheiseen yhteyteen.

Tutulla kymmenjärjestelmällä voimme esittää mielivaltaisia kokonaislukuja, vaikka meillä on käytössämme ainoastaan merkit $0, 1, 2, \ldots, 9$. Tämä perustuu käyttämäämme positionaaliseen luvunesitykseen, jossa numerot edustavat sijaintinsa mukaan lukujärjestelmän kantaluvun eri potensseja: vähiten merkitsevät eli oikeanpuoleiset numerot ovat ykkösiä, seuraavat kymppejä, kolmannet satoja jne. Näin esimerkiksi valtion vuoden 2001 budjetin tulojen kokonaismäärä 209 172 310 000 mk tarkoittaa arvoa $0 + 0 \cdot 10 + \ldots + 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^5 + \ldots + 2 \cdot 10^{11}$ mk.

Kymmenjärjestelmän kantaluku lienee peräisin ihmislajin sormien lukumäärästä. Täsmälleen samaa ideaa voi kuitenkin käyttää myös muilla kantaluvuilla. Jokaisella ykköstä suuremmalla kokonaisluvulla b voidaan nimittäin määritellä *b-kantainen lukuesitys* $(d_{m-1}d_{m-2}\dots d_1 d_0)_b$, missä kukin d_0, d_1, ..., d_{m-1} on jokin numeroista $0, 1, \dots, b-1$. Tällainen luvunesitys tarkoittaa kokonaislukua $d_0 + d_1 \cdot b^1 + \dots + d_{m-2} \cdot b^{m-2} + d_{m-1} \cdot b^{m-1}$. Erityisesti tietokoneita on käytännöllistä rakentaa siten, että niiden elektroniikka operoi kymmenen sijasta vain kahdella toisistaan erottuvalla tilalla. Siksi tietokoneet käyttävät *binääristä* luvunesitystä, jonka kantaluku b on 2 ja jossa käytettävät numerot ovat *bittejä* 0 ja 1.

Paljonko tilaa kokonaisluvun n esittäminen vaatii? Tarkastellaan kokonaisluvun n esitystä b-järjestelmän lukuna $(d_{m-1}d_{m-2}\dots d_1 d_0)_b$. Mitä voidaan sanoa tämän esityksen pituudesta m? Käytetään apuna merkintätapaa, jossa osoitamme jokaisen numeron sijainnin alaindeksinä $0, \dots, m-1$. Esimerkiksi budjetin loppusumma on tällä esityksellä $(2_{11}0_{10}9_9 1_8 7_7 2_6 3_5 1_4 0_3 0_2 0_1 0_0)_{10}$, ja $(1_{m-1}0_{m-2}\dots 0_0)_2$ tarkoittaa m-numeroista binäärilukua, jonka merkitsevin numero on ykkönen ja muut nollia.

Jos luku $n = (d_{m-1}d_{m-2}\dots d_1 d_0)_b > 0$ on aidosti m-numeroinen, niin sen merkitsevin numero d_{m-1} on vähintään ykkönen. Siten

$$(1_{m-1}0_{m-2}\dots 0_0)_b \le n \ .$$

Ylläolevan epäyhtälön vasemman puolen arvo on b^{m-1}. Soveltamalla epäyhtälöön b-kantaista logaritmia näemme, että $m-1 \le \log_b n$, eli esityksen pituus m on enintään $\log_b n + 1$. Toisaalta jokainen luvun n numeroista $d_{m-1}, \dots, d_0$ on enintään $b-1$, joten näemme seuraavaa:

$$\begin{aligned}(d_{m-1}d_{m-2}\dots d_1 d_0)_b &\le ((b-1)_{m-1}(b-1)_{m-2}\dots(b-1)_1(b-1)_0)_b \\ &= (1_m 0_{m-1}\dots 0_1 0_0)_b - 1 \\ &= b^m - 1 < b^m \ .\end{aligned}$$

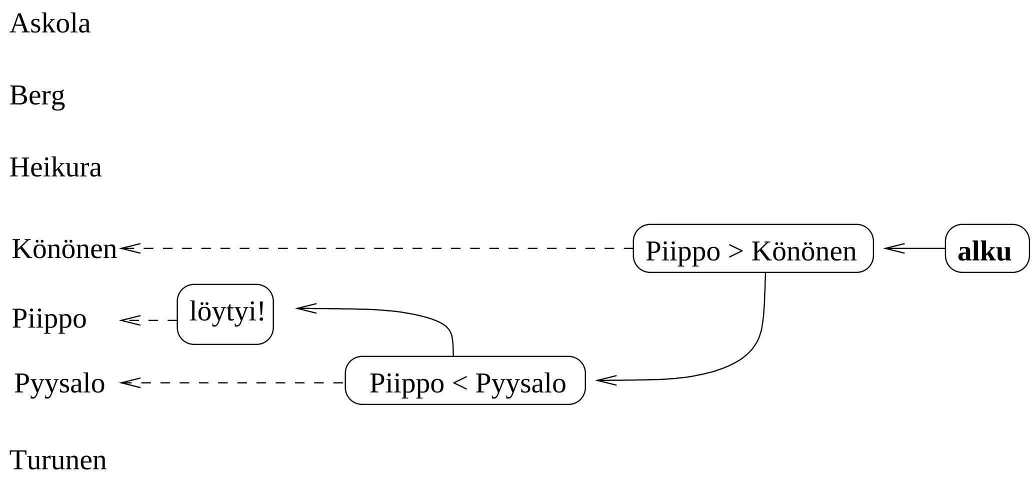
Soveltamalla logaritmia tämän epäyhtäloketjun ensimmäiseen ja viimeiseen jäseneen näemme että $\log_b n < m$. Näiden arvioiden mukaan kokonaisluku m on siis suurempi kuin $\log_b n$ ja enintään $\log_b n + 1$. Tämä luku voidaan ilmaista yksinkertaisessa muodossa käyttämällä desimaaliluvun x katkaisevalle alaspäinpyöristykselle merkintää $\lfloor x \rfloor$. (Esimerkiksi $\lfloor 2{,}0 \rfloor = \lfloor 2{,}5 \rfloor = \lfloor 2{,}99 \rfloor = 2$.) Koska desimaaliosan katkaiseminen pienentää lukua alle ykkösellä, on voimassa $\log_b n - 1 < \lfloor \log_b n \rfloor \le \log_b n$. Lisäämällä tämän epäyhtälön osapuoliin ykkönen nähdään edellisen nojalla, että $m = \lfloor \log_b n \rfloor + 1$. Olemme siis osoittaneet, että kokonaisluvun n esitys b-kantaisessa järjestelmässä on pituudeltaan ykkösen tarkkuudella $\log_b n$. Tarkistetaan vielä, että tulos pätee esimerkiksi budjetin loppusummaan $n = 209\ 172\ 310\ 000$. Nyt $10^{11} < n < 10^{12}$, joten $\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1 = 11 + 1 = 12$, mikä täsmää luvun pituuden kanssa.

Positionaalisen lukuesityksen voimasta ja logaritmisen kasvun hitaudesta saa käsityksen tarkastelemalla vaihtoehtoista *unaarista* esitystapaa. Unaarinen esitys tarkoittaa alkeellista "tukkimiehen kirjanpitoa", jossa yksinkertaisesti kirjoitetaan peräkkäin esitettävää lukua vastaava määrä ykkösiä.

Kuinka pitkä budjetin loppusumma olisi unaariesityksenä? Arvioidaan, että kirjoitamme noin yhden ykkösen millimetriä kohden. Tällöin budjetin tulojen kokonaismäärän unaariesityksen pituus on noin 209 172,31 km. Tällainen esitys ei mahdu millekään paperiarkille, joten aletaan kirjoittaa sitä vaikka pitkin maantienvartta. Helsingin ja Kilpisjärven välinen etäisyys on Tielaitoksen mukaan 1209 km. Jos aloitamme kyseisen unaariluvun kirjoittamisen tien varteen pääkaupungissa, täytyy Helsinki-Kilpisjärvi-väli kulkea edestakaisin 86 kertaa ja lopuksi matkata vielä kertaalleen Kilpisjärvelle ennenkuin koko luku on kirjoitettu. Valtion budjetin valmistelu unaariluvuin olisi siis ilmeisen hankalaa! Bensaa palaisi, ja tienvartta tallustavien hirvien jäljet sotkisivat laskelmia. Sen sijaan tutussa kymmenjärjestelmässä saman luvun logaritminen pituus on vain 12 numeroa, ja kyseinen summa on siten melko kätevästi hahmotettavissa ja käsiteltävissä.

Ohjelmointikielten toteutukset esittävät kokonaislukuja tyypillisesti yhteen tietokoneen muistisanaan mahtuvina binäärilukuina. Budjetin loppusumma on jo niin suuri luku, että sen binääriesitys ei mahdu tyypillisen modernin tietokoneen 32-bittiseen muistisanaan: edellisen tuloksemme mukaan kyseisen luvun binääriesitys vaatii bittejä $\lfloor \log_2 209172310000 \rfloor + 1 = 37 + 1 = 38$ kappaletta. Budjetin lukuja on siten tietokoneella käsiteltävä esimerkiksi tuhansina markkoina tai käyttäen pidempää, tyypillisesti 64-bittistä kokonaislukujen esitystä.

Tietokoneen muisti koostuu suuresta joukosta yksittäisiä muistitavuja. Jokaisella muistitavulla on osoitteenaan ei-negatiivinen kokonaisluku, jota prosessori käsittelee *osoiterekisterissään*. Suurin n-bittiseen osoiterekisteriin mahtuva binääriluku on $(1_{n-1}1_{n-2}\dots 1_0)_2$, jonka arvo on $2^n - 1$. Tällöin kone voi käyttää 2^n-tavuisen keskusmuistin muodostamaa *osoiteavaruutta* numeroimalla muistitavut $0, 1, \dots, 2^n - 1$. Osoiterekisterin pituuden on siis oltava vähintään kaksikantainen logaritmi koneen osoiteavaruuden koosta. Tyypillinen osoiterekisterin pituus on 32 bittiä, mikä riittää toistaiseksi hyvin nykyisten tietokoneiden osoiteavaruuksille aina neljään gigatavuun ($4 \cdot 2^{30} = 2^{32}$) saakka. Keskusmuistien jatkuvasti kasvaessa osoiterekisterien kuitenkin odotetaan jatkossa pitenevän esimerkiksi 40-bittisiksi.



Kuva 3: Binäärihaku listasta nimiä.

Miten etsiä puhelinnumeroita?

Mikä on tehokas menetelmä selvittää ihmisen puhelinnumero, kun tiedämme hänen nimensä? Nykyään moni varmaan selvittää asian soittamalla kännykällä numerotiedusteluun. Perinteisen puhelinluettelon käyttäminen on kuitenkin halvempaa ja mahdollisesti myös nopeampaa.

Ihminen etsii nimeä puhelinluettelosta jotakuinkin seuraavasti: Luettelo avataan niiltä paikkeilta missä nimen arvellaan esiintyvän. Korhonen löytyisi luultavasti luettelon keskivaiheilta, kun taas vaikkapa Ylppöä kannattaisi etsiä loppupuolelta. Jos haettu nimi edeltää aakkosjärjestyksessä avatun sivun sisältöä, etsintä kohdistetaan seuraavaksi luettelon avaamiskohtaa edeltävään osaan. Päinvastaisessa tapauksessa etsintää jatketaan vastaavasti avaamiskohtaa seuraavasta luettelon osasta. Haettu nimi löytyy parhaimmillaan jo ensimmäisiltä avatuilta sivuilta, mutta muussa tapauksessa samaa avauskohdan etu- tai takapuolelta hakemista jatketaan kunnes nimi löytyy tai selviää, että haettua numeroa ei ole luettelossa.

Samaan menetelmään perustuu yleinen *binäärihaun* nimellä tunnettu algoritmi. Haettavan arvon – edellä nimen – etsintä järjestyksessä olevien arvojen jonosta aloitetaan tutkimalla jonon keskimmäistä alkiota.[2] Jos arvo löytyy, etsintä päättyy onnistuneesti. Muuten täsmälleen samaa metodia sovelletaan jonon alku- tai loppupuoliskoon sen mukaan, havaittiinko etsittävä arvo pienemmäksi vai suuremmaksi kuin jonon keskeltä tutkittu alkio. Kuvassa 3 on esimerkki binäärihausta etsittäessä nimeä ”Piippo” aakkosjärjestyksessä olevien nimien listasta.

Binäärihaku on erittäin tehokas tapa etsiä tietoa, mikä nähdään seuraavasti: Tarkastellaan työläintä tilannetta, jossa alkio löytyy (tai sen puuttuminen havaitaan) vasta kun etsittävä jono on toistuvien puolitusten tuloksena kutistunut yhdeksi ainoaksi alkioksi. Jos ensimmäinen vertailu tutkii n-alkioisen jonon keskialkiota, seuraavalla kerralla jonon pituus on puolittunut arvoon $n/2$, sitten arvoon $n/4$, ja niin edelleen, kunnes jäljellä on vain yksi alkio. Montako tällaista vaihetta tarvitaan? Ajatellaanpa prosessia takaperin: montako kertaa ykkösen mittaisen jonon pituutta on kaksinkertaistettava, jotta saadaan vähintään alkuperäisen n pituinen jono? Kysymys on lähes sama kuin ”montako kertaa luku 2 on kerrottava itsellään, jotta saadaan luku n”, joten vastaus on likimain $\log_2 n + 1$.

Olisiko järjestetystä jonosta etsintää mahdollista suorittaa binäärihakua oleellisesti tehokkaammin? Vastaus on kielteinen, ainakin sellaisten algoritmien osalta, joiden toiminta perustuu etsittävän arvon ja jonon alkioiden välisiin vertailuihin.[3] Binäärihaun *optimaalisuus* voidaan perustella seuraavasti.

Tietokoneohjelmat käsittelevät järjestettyjä jonoja *taulukoina*, joitten alkioihin viitataan niiden järjestysnumerolla. Ajatellaan arvojen välisiin vertailuoperaatioihin ($<$, $\le$, $=$, $\ge$ ja $>$) perustuvaa proseduuria Search, joka saa syötteenään järjestetyn n-alkioisen taulukon sekä siitä etsittävän arvon x. Proseduuri palauttaa taulukon

[2] Jos jonon pituus on parillinen, täsmällisen algoritmin täytyy päättää, kumpaa keskimmäisistä alkioista tutkitaan.

[3] Vaihtoehtoisena strategiana voisi ajatella esimerkiksi yritystä laskea haettavan arvon mahdollinen sijaintipaikka hyödyntäen jonkinlaisia jonon arvojakaumaa kuvaavia tietoja.

alkion järjestysnumeron $k \in \{1, \ldots, n\}$, jos etsitty arvo x löytyy taulukossa paikasta k. Mikäli arvoa ei löydy, Search palauttaa arvon 0.

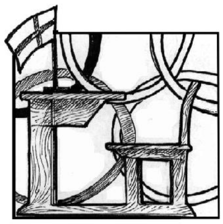
Montako vertailuoperaatiota proseduuri Search joutuu enimmillään suorittamaan? Jokainen hyödyllinen vertailu voi olla tosi tai epätosi eli tuottaa täsmälleen yhden bitin verran informaatiota haetun arvon sijainnista taulukossa. Erisuuruusvertailut $<$, $\leq$, $\geq$ ja $>$ kertovat täytyykö etsityn arvon löytyä vertailukohdan etu- vai takapuolelta, ja yhtäsuuruusvertailu viimeiseksi vaihtoehdoksi jääneen alkion kanssa ilmoittaa, löytyykö arvo tutkitusta paikasta vai puuttuuko se taulukosta kokonaan.

Proseduurin tulosarvoa k voi nyt ajatella arvojen $0, \ldots, n$ esittämiseen riittävän pituisena binäärilukuna, jonka kutakin bittiä vastaa yksi algoritmin suorittama vertailu. Kuten edellä näimme, tämän luvun pituus on $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, joten Search-proseduuri joutuu väistämättä joskus suorittamaan näin monta vertailuoperaatiota.

Vaikka binäärihaun tehokkuuden ja binääriluvun pituuden välinen yhteys on kiinnostava, algoritmin työmäärän analysointi näin tarkasti, yksittäisten suoritusvaiheitten tarkkuudella, on usein tarpeetonta. Oleellisempaa on algoritmin suoritustehon karkea riippuvuus käsiteltävien syötteiden koosta. Edellä tarkastellun logaritmien hitaan kasvuvauhdin ansiosta binäärihaun kaltaiset *logaritmisessa ajassa toimivat* algoritmit ovat erittäin tehokkaita. Niiden tietokonetoteutukset suoriutuvat käytännössä ratkottavista tapauksista silmänräpäyksessä eivätkä hidastu havaittavasti, vaikka käsiteltävät syötteet pitenisivät moninkertaisiksi.

Suositeltavaa kirjallisuutta

1. J.L. Bentley: *Programming Pearls*, 2nd ed. ACM Press, 1999.
2. D. Harel: *Algorithmics – The Spirit of Computing*, 2nd ed. Addison-Wesley, 1992.
3. G.M. Schneider, J.L. Gersting: *An Invitation to Computer Science*, 2nd ed. Brooks/Cole Publishing Company, 1999.



Mitä TIMSS-tutkimus kertookaan suomalaisten koululaisten matematiikan taidoista ja matematiikan opetuksesta?

dos. Marjatta Näätänen
matematiikan laitos, HY

TIMSS 1999 eli Third International Mathematics and Science Study saatiin hiljattain suoritettua loppuun. Suomessa matematiikan tulos uutisoitiin näyttävästi menestystarinana, mutta alkuperäisen englanninkielisen raportin lukeneet matemaatikot ovat aivan eri mieltä: Jos asiaan paneutuu vähän tarkemmin, TIMSS:in tulokset eivät olekaan ristiriidassa matematiikan opettajien kokemusten ja 1994-1996 toteutetun kansainvälisen vertailun, Kassel-testin huonojen tulosten kanssa, vaan päinvastoin vahvistavat Kasselin aikaisemman viestin suomalaisten puutteellisesta matematiikan osaamisesta: suomalaiset osasivat yksinkertaisia kuviosta pääteltäviä mittaustehtäviä ja luvuilla laskemista, kun taas geometria ja algebra olivat jälleen heikot kohdat.

Yli 300-sivuinen TIMSS-raportti löytyy verkosta[4] ja sisältää monenlaista tietoa. Kaikenkaikkiaan TIMSS:in taulukot antavat Suomen kohdalla mielestäni aihetta jopa erittäin huolestuttaviin tulevaisuudenvisioihin.

Hiukan kärjistäen – tuloksethan ovat prosenttimuodossa ja koskevat 7. luokkaa – sieltä löytää vahvistuksen julkisuudessakin esille tulleisiin käsityksiin siitä, että Suomessa on vähän matematiikan tunteja, koulurakennukset ovat ongelmallisessa kunnossa, opettajat ovat jäämässä eläkkeelle suurin joukoin, kaveripiiri ei arvosta opiskelumenestystä ja suomalainen tasa-arvo tukee paljon paremmin oppimishaitarin ala- kuin yläpäätä.

Koululaisillamme näyttää kuitenkin olevan katteettoman hyvä luottamus kykyihinsä matematiikassa. He ovat koko tutkimukseen osallistuneista myös kaikkein vähiten perillä omien vanhempiensa koulutustaustasta, eikä heillä ole mainittavia tulevaisuudensuunnitelmia ainakaan opiskelunsa suhteen – niinpä panostus koulutyöhön ja vapaa-ajankäyttö on sen mukaista.

TIMSS:in taulukot tukevat käsitystä, että ongelmanratkaisu tarkoittaa eri asioita eri maissa, erityisesti Suomessa ei varsinaisen matematiikan merkitystä näytetä oikein ymmärrettävän. Ja vaikka meillä on satsattu paljon rahaa Internet-yhteyksiin ja tietokoneisiin, niiden opetuskäyttö matematiikassa on vähäistä.

[4] `http://www.timss.org/timss1999i/math_achievement_report.html`

TIMSS:iin osallistuneet – ja siitä luopuneet maat

Jostain syystä Itävalta, ranskankielinen Belgia, Kolumbia, Ranska, Saksa, Kreikka, Irlanti, Kuwait, Norja, Portugali, Skotlanti, Espanja, Ruotsi ja Sveitsi, jotka osallistuivat TIMSS:iin vuonna 1995, eivät enää jatkaneet osallistumistaan. TIMSS:issä oli v. 1999 mukana useita ns. kehitysmaita, joissa aikuisväestöstä lukutaitoisia on alle 90 % tai joissa on vaikeita yhteiskunnallisia konflikteja. Itä-Euroopan maiden koulutus taas on romahtanut talousvaikeuksien takia, parhaiten pienistä maista on kaiketi pitänyt pintansa pitkien ja vankkojen perinteiden Unkari. Kasselin testissä verrattiin Suomea taloudellisilta mahdollisuuksiltaan samankaltaisiin maihin. Toisaalta on kieltämättä varsin mielenkiintoista miettiä, mistä koululaitoksemme piirteistä kertoo se, että Suomi sijoittuu tässä hyvin kirjavassa TIMSS-maiden kokoelmassa useissa vertailuissa ääriasemiin. Haluammeko, että asiat ovat tulevaisuudessakin juuri näin?

Kansainväliset vertailut TIMSS ja Kassel

TIMSS:issä pisteitä pystyi keräämään yksinkertaista päättelyä vaativilla monivalinta- ja luvuillalaskemistehtävillä (monivalintaa oli n. kolme neljäsosaa tehtävistä). Tämän tyyppistä osaamista vaativissa tehtävissä Suomi pärjäsi kohtuullisesti myös Kasselin testissä, luvuilla laskemista ja yksinkertaista päättelyosaamistahan meillä nyt painotetaan ja luullaan, että juuri se on sitä matematiikkaa – tällaisilla eväillä ei kuitenkaan mitään huipputeknologiaa eikä Nokiaa ole rakennettu, eikä rakenneta. TIMSS:issä oli pienemmällä osuudella mukana myös varsinaisen matematiikan alkua – algebran (22 %) ja geometrian (13 %) osiot. Näissä Suomi ei menestynyt, kuten ei Kasselin testissäkään.

Kassel-testeissä Soron ja Pehkosen raportin mukaan ”Suomalaiset peruskoululaiset ovat luvuilla laskemisessa ja niiden sovellutuksissa lähellä kansainvälistä keskitasoa” (osallistujamaat Suomi, Norja, Saksa, Englanti, Unkari, Kreikka) ”Algebran, geometrian ja funktioiden osaamisessa suomalaiset ovat pudonneet vertailumaiden viimeisiksi”. ”Suomalaiset koululaiset menestyvät pelkkää päättelyä ja ongelmanratkaisua edellyttävissä tehtävissä, mutta – – oppilailta puuttuvat ´työkalut´ matematiikassa”.

Käyn jatkossa läpi erinäisiä TIMSS -tutkimuksen yksityiskohtaisia tuloksia. Kiinnostuneita varten annan viittaukset kussakin kohdassa, koska TIMSS-raportti on yli 300-sivuinen ja osallistuneiden maiden erilaisuuden takia sisältää paljon alaviitteitä. Yksityiskohtien tulkinnat ovat omiani.

Matematiikan oppisisällöistä, erityisesti algebran asemasta

Taulukot R2.6 ja R2.7 kertovat Suomen oppisisältöjen vähyydestä geometriassa ja algebrassa. Kuvio 3.2 kertoo algebran ja geometrian heikosta asemasta Suomen matematiikan kouluosaamisessa; Suomi, Filippiinit ja Etelä-Afrikka erottuvat TIMSS:iin osallistuneista maista omaksi luokakseen (s. 99).

Meillä ei siis panosteta itse matematiikan perustan rakentamiseen; harjoitettava ongelmanratkaisutyyli ei riitä rakentamaan systemaattisesti matematiikan tiedon kertymistä ja abstraktin ajattelun kehittymistä. Menestyksellinen ja vähänkään vaativammalle ja teoreettisemmalle tasolle etenevä ongelmanratkaisu puolestaan perustuu syvällisempien rakenteiden, toisin sanoen itse matematiikan hallintaan ja abstraktin ajattelun kehittymiseen.

Vastoin yleistä uskomusta ei matematiikka todellakaan ole pelkästään luvuilla laskemista ja yksinkertaisia päättelyjä. Asiaa ehkä valaisevat seuraavan TIMSS:in algebran tehtävän (s. 76) tulokset:

Tehtävänä oli ratkaista yhtälö, siis löytää x:n arvo, jos

$$12x - 10 = 6x + 32.$$

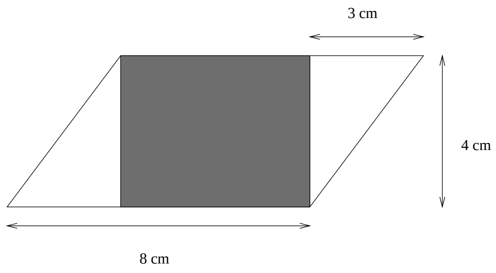
Suomalaisista vain 24 prosenttia osasi ratkaista tämän ensimmäisen asteen yhtälön, maa sijoittui huomattavasti TIMSS:iin osallistuneiden maiden keskiarvon (44 prosenttia osasi tehtävän) alapuolelle. Unkarin prosenttiluku oli 74.

Ellei oppilaille ole seitsemän kouluvuoden aikana kehittynyt abstraktion astetta, jolla pystyy käsittelemään symboleja – edes ensimmäisen asteen yhtälön ratkaisemisen vertaa – on aika toivoton yritys rakentaa matematiikan hallintaa näin olemattomalle pohjalle. Heikon pohjan ongelmat tulevat vastaan vääjäämättä peruskoulun jälkeisissä opinnoissa. Suurelta osalta oppilailta puuttuu matematiikan työkalut, he eivät pysty edes ymmärtämään (saati johtamaan itse!) kaavoja – taito, jota tarvitaan aivan alkuvaiheesta lähtien varsin monilla jatko-opintoaloilla.

Sama algebran osaamisen heikkous tuli esille myös MALU 2002 -ohjelman algebran kokeilussa, joka on raportoitu Solmussa 3/2000-2001.

Esimerkkinä tehtävästä, jonka yli puolet (57 prosenttia) suomalaisista osasi, on tämä mittaamisen alaan luokiteltu tehtävä (s. 74). TIMSS-maiden keskiarvo oli 43 prosenttia.

Kuvassa on varjostettu suorakulmio
suunnikkaan sisällä.



Mikä on varjostetun suorakulmion pinta-ala?

Keskihajonnan arvoitus

Kuten Kasselin testeissä, olivat TIMSS:issä (s. 355 D.2) jälleen suomalaisten keskihajonnat huomiotaherättävän pieniä, Tunisialla ja Suomella kaikkein pienimmät! Tuskinpa pelkästään suomalaiset ja tunisialaiset ovat samasta muotista tehtyjä. Olisikohan selitys se, että meillä koulu ei tasapäistämisinnossaan tarjoa kylliksi haasteita matematiikassa? Tällöinhän osaamishaitari ei pääse leviämään ainakaan ylöspäin.

Oppilaiden käsityksistä omista kyvyistään

Oppilaiden käsitykset omista matematiikan kyvyistään selviävät taulukosta 4.8. Korkea käsitys on Suomessa 32:lla prosentilla, jolla sijoitutaan kolmanneksi kärkeen Venäjän ja Kanadan jälkeen. TIMSS-maiden keskiarvo on tässä kohdassa 18. Sukupuolten mukaan eriteltynä tulee Suomessa tilastollisesti merkittävä ero tyttöjen ja poikien suhteen, korkean luottamuksen luokkaan sijoittuu 40 prosenttia suomalaisista pojista, 23 tytöistä. Poikien luku on toiseksi korkein Venäjän 42 prosentin jälkeen. Luottamuksessa omiin kykyihin matematiikassa siis pärjätään meillä huomattavasti paremmin kuin itse testeissä. USA:ssa tästä ilmiöstä käytetään sanontaa ”feeling good and doing bad”.

Tyttöjen ja poikien suhtautuminen matematiikkaan

Suhtautuminen matematiikkaan selviää taulukoista 4.10 ja 4.11. Positiivisimmin suhtautuvien luokkaan kuuluu Suomessa 21 prosenttia, TIMSS-keskiarvo on 37. Suomessa on tilastollisesti merkittävä ero sukupuolten välillä, poikien suhtautuessa positiivisemmin kuin tytöt. Tämä ero on TIMSS-maiden toiseksi korkein Japanin jälkeen (mitattuna positiivisimmin suhtautuvien poikien ja tyttöjen määrän suhteena). Näin ovat siis asiat TIMSS:in mukaan, esimerkiksi Unkarissa ja Iranissa ei ollut tätä tilastollisesti merkittävää eroa tyttöjen ja poikien välillä.

Riittääkö tasa-arvoa myös matematiikasta kiinnostuneille?

Taulukko R2.2 kertoo koulujen suhtautumisesta erilaisiin matematiikan oppijoihin. Singapore ja Belgia ovat tässä aivan eri linjoilla kuin Suomi. Matematiikassa parhaiten menestynyt Singapore on ratkaissut erilaisten oppijoiden ongelman niin, että siellä 82 prosenttia vastaajista ilmoittaa, että eri luokat opiskelevat eri sisältöjä. Belgiassa tätä tehdään vielä enemmän, prosenttiluku on 100, Hollannissa 60 prosenttia, TIMSS-keskiarvo on 17, Suomen prosenttiluku 7. Suomessa on kaikkein suurin prosenttimäärä oppilaita, jotka opiskelevat samaa sisältöä mutta eri vaikeusasteella, 94 prosenttia, maiden keskiarvo on 58.

Tukiopetusta tarjotaan Suomessa paljon, TIMSS:iin osallistuneista oppilaista 95 prosenttia oli kouluissa, jotka tarjoavat tukiopetusta. Yhtä paljon tarjoavat Indonesia, Makedonia 96, Singapore 99, Slovenia 98. Matematiikasta kiinnostuneita sen sijaan tuetaan lisämateriaalein tai -opetuksella Suomessa keskiarvoa vähemmän, vastaavat prosenttiluvut olivat 43, keskiarvo TIMSS-maille on 58, Singaporen prosenttiluku on 80. Singapore siis huolehtii erilaisten oppijoiden koko skaalasta.

Kolkutteleeko opettajapula ovella?

Lähitulevaisuuden matematiikanopettajapulakin kummittelee taulukossa 6.1, yli 50-vuotiaiden opettajien opettamien oppilaiden osuus oli Suomessa toiseksi korkein Makedonian jälkeen, 45 prosenttia, TIMSS-keskiarvo on 21. Jos tämän yhdistää tietoihin opiskelijoiden vähäisestä halukkuudesta hakeutua matematiikan opettajaksi, saadaan tulokseksi opettajapula ja epäpätevät sekä nopeasti kurssitetut opettajat.

Oppituntien määrä, luokkakoot ja kotityö

Taulukon 6.4 mukaan matematiikalle annettujen oppituntien määrässä päästään melkein pahnan pohjimmaisiksi, Suomen alapuolelle sijoittuvat tosin Makedonia ja Kypros. TIMSS:in tulokset voisi tulkita myös niin, ettei pienillä tuntimäärillämme opita kuin yksinkertaisimmat asiat – algebra ja geometria menevät jo

	Matematiikan tunteja vuodessa keskimäärin			Osuus (%)
Indonesia	r	222 (9,3)	r	17 (0,9)
Marokko	s	207 (3,8)		x (x)
Thaimaa	s	177 (12,1)	s	14 (1,2)
Chile	r	161 (2,9)	s	15 (0,3)
Kanada	r	150 (2,3)	r	15 (0,2)
Hongkong	r	149 (5,4)	s	15 (0,5)
Filippiinit	s	148 (4,8)		x (x)
USA	s	144 (4,5)		x (x)
Venäjä	r	142 (3,3)	s	17 (0,6)
Tšekinmaa		139 (2,4)		15 (0,2)
Australia	r	138 (3,3)	s	13 (0,3)
Slovakia	r	137 (3,3)	s	14 (0,4)
Latvia	r	137 (2,6)	s	16 (0,5)
Etelä-Afrikka	s	136 (5,7)		x (x)
Uusi-Seelanti	r	134 (1,9)	r	14 (0,2)
Tunisia	r	132 (2,8)	s	14 (0,3)
Italia		130 (3,2)		12 (0,3)
Malesia		127 (4,0)		12 (0,4)
Moldova	r	127 (2,8)	s	13 (0,6)
Japani		127 (1,8)		12 (0,2)
Taipei		126 (1,9)		9 (0,1)
Singapore		126 (3,8)		15 (0,5)
Jordania		120 (3,6)	r	12 (0,3)
Korea		118 (3,5)		11 (0,3)
Unkari		117 (1,9)		13 (0,3)
Belgia (flaami)		116 (3,5)		12 (0,4)
Englanti	s	115 (2,7)	s	12 (0,3)
Slovenia		114 (1,6)		15 (0,2)
Romania		107 (3,6)	r	11 (0,4)
Iran	s	105 (7,0)		x (x)
Bulgaria	r	99 (3,9)	s	10 (0,4)
Turkki	s	98 (4,6)		x (x)
Alankomaat	s	94 (1,6)	s	9 (0,1)
Suomi		93 (2,5)	r	10 (0,3)
Makedonia	r	75 (1,2)	s	10 (0,2)
Kypros	r	73 (1,0)	r	9 (0,1)
Israel		x (x)		x (x)
Liettua		- (-)		- (-)
Kansainv. ka		129 (0,7)		13 (0,1)

Oppilaiden keskimääräiset vuosittaiset matematiikan opetusmäärät tunteina ja näiden osuus prosentteina koko vuoden opetusmääristä. Tiedot saatu kouluilta ja opettajilta.

Sulkeissa virhemarginaalit. Viiva ”-” tarkoittaa, että tietoa ei saatu. Kirjain ”r” tarkoittaa, että tieto saatiin 70–84 % oppilaista. Kirjain ”s” tarkoittaa, että tieto saatiin 50–69 % oppilaista. Kirjain ”x” tarkoittaa, että tieto saatiin alle 50 % oppilaista.

Lähde: IEA Third International Mathematics and Science Study (TIMSS), 1998–1999, ”Exhibit 6.4: Mathematics Instructional Time at Grade 8” yli horisontin. Taulukko 6.8 kertoo, että TIMSS:issä tutkitulla tasolla luokkakoot Suomessa olivat Belgian kanssa pienimmät, keskimäärin 19 oppilasta, keskiarvo oli 31. Taulukko 6.21 kertoo, että Suomi on taas lähellä alarajaa, kun kysytään opettajilta kotityön tärkeyden painottamisesta. Vain 10 prosenttia oppilaista tekee tämän mukaan Suomessa yli puoli tuntia matematiikan kotitehtäviä vähintään kerran tai kaksi viikossa, TIMSS-maiden keskiarvo on 35 prosenttia.

Opiskelusta

Taulukko R3.15 kertoo, että yli puolen tunnin matematiikan kotitehtävien osuus on Suomessa selvästi TIMSS-maiden keskiarvon alapuolella, (vähintään kolme kertaa viikossa Suomessa 9 prosenttia, kun keskiarvo on 26, kerran tai kaksi viikossa Suomessa 1 prosentti, keskiarvo 10). Yleisimmin Suomessa käytetään alle puolen tunnin kestoa (vähintään kolme kertaa viikossa Suomessa 79 prosenttia, kun keskiarvo on 41). Taulukon R3.7 mukaan myös vuotuinen kouluaika on Suomessa jonkin verran pienempi kuin kansainvälinen keskiarvo. Taulukot 4.5 ja 4.7 kertovat opiskelusta koulun ulkopuolella. Suomi näkyy paljon aikaa opiskeluun käyttävien oppilaiden prosenttimäärän mukaan tehdyn kuvan alimpana, tulkintaa tähän löytyy varmaan monenlaista.

Koulurakennukset

Taulukko R4.1 kertoo, että koulurakennusten suhteen on Suomessa opiskelua haittaavia ongelmia noin puolella, joka on myös TIMSS-maiden keskiarvo. Olisikohan eräänä syynä Suomen ongelmiin paljon puhutut sisäilmaongelmat? Oppimateriaaliongelmia raportoi Suomessa noin kolmasosa, TIMSS-keskiarvo on 45 prosenttia.

Mitä tehdään tunnilla?

Taulukko 6.11. raportoi, että oppitunnin aikana kertoo 90 prosenttia suomalaisista oppilaista tekevänsä harjoitustehtäviä omatoimisesti melkein aina tai hyvin usein. Muita tällaisia maita ovat Australia, Kanada ja Hollanti, keskiarvo on 59 prosenttia. Kotitehtävien teon aloittaa tunnilla melkein aina tai hyvin usein 47 prosenttia suomalaisista oppilaista, tässä johtavat Kanada (82) ja Hollanti (89), keskiarvo on 42 prosenttia.

Tullaanko tunneille?

Taulukko 7.5 kertoo, että koulujen vastausten mukaan Suomessa 67 prosentilla on jonkinasteinen myöhästelyn, poissaolojen, tunnille tulon laiminlyönnin ongelma, ja 18 prosentilla tämä on vaikea ongelma. Siis 15 prosentilla kouluista ei tätä ongelmaa ole. Parhaiten sijoittuu Belgia (flaami), jossa yli puolella kouluista tällainen käytös ei ole ongelma. Suomi on suunnilleen TIMSS-maiden keskitasoa.

Ongelmanratkaisuakin on monenlaista

Matemaattisesta päättelystä ja ongelmanratkaisusta puhuvat kaikki, taulukko 6.13 tarkentaa nämä käsitteet tarkoittamaan seuraavaa: miten usein opettaja pyytää oppilasta perustelemaan idean, esittämään ja analysoimaan yhteyksiä käyttäen taulukoita, kuvioita, funktioiden kuvaajia; työskentelemään sellaisten ongelmien parissa, joihin ei ole välitöntä ilmeistä ratkaisumenetelmää; kirjoittamaan yhtälöitä esittääkseen yhteyksiä. Vain 5 prosenttia suomalaisista oppilaista ilmoitti tällaisia menetelmiä käytettävän paljon. Tutkimuksen keskiarvo tässä oli 15, Japanin johtaessa 49:llä prosentillaan.

Taulukko R3.9. tuo esiin unkarilaisen ja suomalaisen opetustyylin eroja tässä suhteessa. Prosenttiluvut sille, että opettaja pyytää usein oppilasta esittämään ja analysoimaan yhteyksiä käyttäen taulukoita, kuvioita, funktioiden kuvaajia, ovat Suomi 19, Unkari 31; työskentelemään sellaisten ongelmien parissa, joihin ei ole välitöntä ilmeistä ratkaisumenetelmää, Suomi 16, Unkari 22; kirjoittamaan yhtälöitä esittääkseen yhteyksiä, Suomi 15, Unkari 69 prosenttia.

Internetiä ja tietokoneita

Taulukko 6.20 kertoo Internetin saatavuudesta. Suomen kouluissa saatavuus oli jo toissa vuonna varsin hyvä, 75 prosenttia, keskiarvon ollessa 25. Yhteyksiä käytetään vähintään kerran kuussa matematiikan projekteihin kuitenkin vähemmän kuin TIMSS-maiden keskiarvo, sillä 4–5 prosenttia oppilaista vastaa myöntävästi, kun keskiarvo on 8–9 prosenttia. Prosenttiluvut eivät ole missään maassa korkeita, korkein on 18 (Marokko). Taulukon R4.3 mukaan Suomessa on kouluissa yleensä vähemmän kuin 15 oppilasta tietokonetta kohden (tällaisia oppilaita oli 98 prosenttia, TIMSS-maissa keskimäärin 60 prosenttia). Kuitenkin koulut ilmoittavat, että tietokoneiden puute tai sopimattomuus haittaa melkein puolta oppilaista, mikä on lähellä kansainvälistä keskiarvoa (Taulukko R4.2). Suomi on ainoa maa, missä kaikilla kouluilla on yhteys Internetiin, keskiarvo 41 prosenttia (Taulukko R4.4).

Miksi tietokoneet muodostavat ongelman Suomessa, vaikka niitä on ostettu paljon? Onko panostettu kylliksi ja jo alkuvaiheesta alkaen sisältöihin, opettajien kouluttamiseen koneiden käyttöön, koneiden huoltoon ja opettajien tukipalveluihin? Onko vain yksinkertaisesti ostettu koneet ja ajateltu, että muu hoituu myöhemmin itsestään?

Tietävätkö päättäjät, että tietokoneiden ja Internetin käyttö matematiikan opetuksessa on vielä kaikissa maissa lapsenkengissä, eikä koneiden mielekäs opetuskäyttö matematiikassa ole lainkaan helppoa. Suomen pienet tuntimäärät tuhraantuvat helposti erilaisten käyttöongelmien kanssa ilman tarpeellisen oppimistuloksen saavuttamista, perinteiset kustannuksiltaan edulliset keinot kannattaisi siis pitää edelleen kunniassa. Miten meillä aina löytyykin rahaa (jopa kovin moniin nopeasti vanheneviin) koneisiin, mutta säästötarve on huutava, jos on kyse ihmisistä?

Mikä on vanhempien koulutustaso?

Taulukko R1.5 kertoo, etteivät suomalaislapset tiedä, millainen koulutustaso heidän vanhemmillaan on. TIMSS-keskiarvo tietämättömille on 12 prosenttia, Suomi voittaa kirkkaasti kaikki muut prosenttimäärällä 51 – hämmästyttävä saavutus – seuraavaksi tulee Belgia, 29 prosenttia.

Kaveripiirin vaikutus

Taulukko R1.9 kertoo koululaisten huomioita siitä, mitä heidän kaverinsa pitävät tärkeänä: Hyvä suoritus matematiikassa 70 prosenttia, kaikkien osallistuneiden maiden keskiarvon ollessa 86, hyvä suoritus luonnontieteissä 53, keskiarvo 77, hyvä suoritus kielissä 65, keskiarvo 86, hyvä suoritus urheilussa 74, keskiarvo 85. Kaikissa näissä opiskelun ja harjoittelun merkitystä painottavissa suhteissa suomalaiset jäivät TIMSS-keskiarvon alapuolelle. Sensijaan huvitteluajan tärkeydestä kysyttäessä he ylittivät keskiarvon, prosenttiluvut 97 ja 92. Samantapainen suuntaus näkyy taulukossa R1.10 kyseltäessä matematiikassa menestymisen tärkeyttä eri syistä. TIMSS-maiden koululaiset pitävät matematiikassa menestymistä keskimäärin selvästi tärkeämpänä kuin suomalaiset koululaiset.

Vapaa-aika

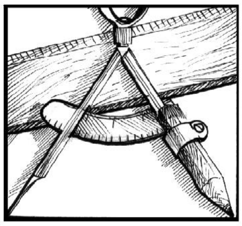
Suomalaisten koululaisten vapaa-ajan käytöstä kertoo taulukko R1.13. Televisiota ja videoita katsotaan vähän enemmän kuin kansainvälinen keskiarvo, tietokonepelejä pelataan enemmän, kavereiden kanssa jutellaan tai pelataan selvästi enemmän, kotitöitä tehdään vähemmän ja kirjoja luetaan vähemmän kuin TIMSS:iin osallistuneissa maissa keskimäärin.

Nuorten tulevaisuudensuunnitelmat

Useissa kohdissa TIMSS-taulukoita tulee siis esille Suomeen muutamassa vuosikymmenessä rantautunut ja 90-luvulla poikkeuksellisen rajuksi yltynyt vanhempien ja koulun vaikutuksen voimattomuus verrattuna nuorten omaan kaveripiiriin. Nuoret eivät omaksu juuri mitään edellisten sukupolvien kokemuksesta ja viisaudesta opastuksekseen, vaan melkein kokonaiset ikäluokat lähtevät samanikäisten kanssa lyhytjänteisen hauskanpidon linjalle kasvattajinaan kaupalliset voimat median ja viihdeteollisuuden välityksellä. Hyvin koulutetut vanhemmat pitävät kuitenkin vielä pintansa kaveriporukan vaikutusta vastaan ja saavat siirrettyä opiskelun ja työnteon arvot lapsilleen. Mielestäni tämä ilmiö näkyy myös peruskoulututkimuksissa. Sitä on tosin tulkittu niin, ettei peruskoulu ole vielä tasa-arvoinen – kotien arvot vaikuttavat edelleen. Ongelma on vakava, sillä kaveripiirin ohjailemat nuoret eivät tajua, mitä seuraamuksia tästä kaikesta on heidän tulevaisuudelleen. USA:ssa on tästä ongelmasta kirjoittanut Neil Postman: Huvitammeko itsemme hengiltä?

Erityistä kiinnostusta tulisi päättäjissä herättää taulukon 4.4, jossa Suomi on alimpana siinä, kuinka moni oppilas suunnittelee suorittavansa yliopistotutkinnon – 10 prosenttia! TIMSS-keskiarvo on 52. Jotain ammatillista tai teknistä jatkokoulutusta (some vocational/technical education or university only) suunnittelee 22 prosenttia, keskiarvo 17. Toisen asteen koulutukseen aikoo tyytyä 44 prosenttia, keskiarvo on 18. Tulevaisuudestaan ei tiedä neljännes (24 prosenttia) suomalaisista oppilaista. TIMSS-maiden keskiarvo on 14 prosenttia.

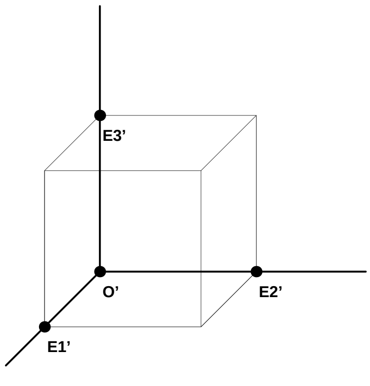
Mutta eivätkö koululaisemme ole vielä kovin nuoria, ei kai tällaisten asioiden tarvitse heitä vielä ainakaan Suomessa askarruttaa? Nämä nuoret tekevät koulussa jatko-opintojensa kannalta erittäin tärkeitä valintoja ja he ovat jo käyttäneet seitsemän vuotta elämästään koulun penkillä. Eikö tämä aika ole valmistavien tietojen ja taitojen sekä yleissivistyksen pohjan hankkimista heidän tulevaa elämäänsä ja ammattiaan varten? Jos tällainen näkökulma puuttuu, on koko koulunkäynniltä pohja ja mielekkyys pois. Mieleen tulee myös kysymys, tarjotaanko kyllin erilaisia vaihtoehtoja; ihmisethän eivät ole samanlaisia – vaikka ovatkin tasa-arvoisia.



Geometriakulma 12: Pohlken lause

Simo K. Kivelä

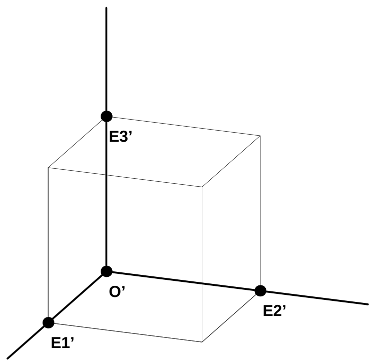
Olkoon kuutio asetettuna kolmiulotteisen avaruuden koordinaatistoon siten, että sen yksi kärki on origossa ja tästä kärjestä lähtevät särmät sijaitsevat koordinaattiakseleilla. Kuution yhdensuuntaisprojektiokuva saattaisi tällöin näyttää vaikka seuraavalta:

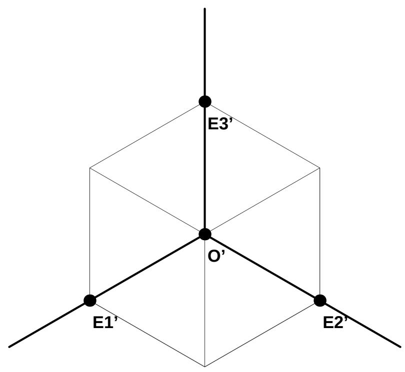


Kyseessä on kavaljeeriprojektio, ts. eräs yhdensuuntaisprojektio.

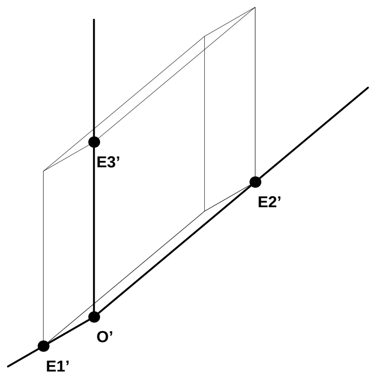
Koordinaatiakseleilla olevia kuution kärkiä on merkitty E_1, E_2 ja E_3; vastaavat pilkutetut symbolit ovat niiden kuvat. Lukija tehköön eron avaruudessa olevan kuution ja sen ruudulla – tai paperilla – olevan kaksiulotteisen kuvan välillä. Oheinen kuva on kuva, siksi pilkutetut symbolit. Vastaavasti O' on origon kuva.

Yhdensuuntaisprojektion kuvataso voidaan asettaa mihin tahansa asentoon kuutioon nähden ja projektiosäteiden suunta voidaan valita miten tahansa, kunhan se ei ole kuvatason suuntainen. Kavaljeeriprojektion ohella monia muitakin mahdollisuuksia kuution yhdensuuntaisprojektiokuvan eli aksonometrisen kuvan tekemiseen siis on. Esimerkkinä dimetrinen ortogonaaliprojektio ja isometrinen ortogonaaliprojektio, joissa molemmissa projektiosäteet ovat kohtisuorassa kuvatasoa vastaan:





Kuviot antanevat aiheen seuraavaan kysymykseen: Miten pisteet E_1', E_2' ja E_3' on valittava, jotta kyseessä olisi sopivan kokoisen kuution kuva jossakin yhdensuuntaisprojektiossa? Olisi siis selvitettävä, voidaanko löytää kuvataso ja projektiosäteiden suunta siten, että kuution kuvaksi tulee pisteiden O', E_1', E_2' ja E_3' määrittämä kuvio. Kelpaisiko esimerkiksi seuraava:



Vastaus kysymykseen tunnetaan *Pohlken lauseen* nimellä. Sen esitti Karl Pohlke (1810–1876) vuonna 1853 hypoteesina, ts. ilman todistusta. Lauseen todisti Hermann Amandus Schwarz 1864.

Pohlken lause antaa yksinkertaisen ja hieman yllättävänkin vastauksen: Mikä tahansa pisteistö $\{O', E_1', E_2', E_3'\}$ (ns. *Pohlken kuvio*) kelpaa, kunhan kaikki neljä pistettä eivät ole samalla suoralla (mutta mitkä tahansa kolme saavat aivan hyvin olla).

Yhdensuuntaisprojektiokuva näyttää luonnolliselta, kun sitä katsotaan projektiosäteiden suunnasta mahdollisimman kaukaa. Jos siis kyseessä on ortogonaaliprojektio, sitä on katsottava kohtisuoraan kuvaa vastaan. Vinossa projektiossa taas kuva on asetettava ehkä hyvinkin vinoon asentoon katselusuuntaan nähden. Asiaa voi kokeilla piirtämällä neljän pisteen konfiguraatioita ja niihin liittyviä kuution kuvia ja yrittämällä löytää ainakin suurinpiirtein oikea katselusuunta. Laskeakin katselusuunnan voi, vaikka ei aivan helposti.

Mielivaltaisesti muodostettu Pohlken kuvio liittyy useimmiten varsin vinoon projektioon. Jos sitä onnistuu katsomaan oikeasta suunnasta, kuva ei kuitenkaan näytä venähtäneeltä.

Pohlken lauseen voi todistaa paitsi geometrisesti myös (vektori- tai matriisi-) algebran avulla. Lukija voisi harjoittaa kirjallisuustutkimusta: Millaisia artikkeleita, kirjoja tai muita dokumentteja Pohlken lauseesta löytyy? Joitakin web-dokumenttejakin näyttää olevan, mutta iältään tulos on sellainen, että kirjallisia dokumentteja on helpompi löytää.

Tämäntapaisista asioista, ns. *deskriptiivisestä geometriasta* oltiin kiinnostuneita 1900-luvun alkupuoliskolla, mutta loppupuolella kiinnostus on hiipunut. Voisi ajatella, että tietokonegrafiikan kehitys olisi johtanut kiinnostuksen uudelleen viriämiseen, mutta näin ei ole käynyt.

Vihjeeksi tiedonhakuja tekevälle lukijalle: Geometrista kirjallisuutta on enemmän saksaksi kuin englanniksi. Hakusanoiksi kannattaa siis valita myös 'Pohlke' ja 'Satz' eikä yksinomaan 'Pohlke' ja 'theorem'.

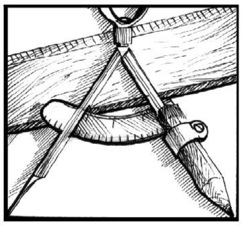
Ortogonaalinen yhdensuuntaisprojektio on kuvien muodostuksessa luontevampi kuin vino, koska kuvaa normaalisti katsotaan ainakin lähes kohtisuoraan paperin tasoa vastaan. Olisiko Pohlken kuviosta jotenkin helposti pääteltävissä, milloin kyseessä on ortogonaaliprojektio?

Vastaus on jälleen hieman yllättävä, sillä yksinkertainen ehto voidaan antaa kompleksilukujen avulla: Tulkitaan kuvataso kompleksitasoksi, jonka origo yhtyy Pohlken kuvion origoon, ja muodosteaan pisteitä E_1', E_2' ja E_3' vastaavat kompleksiluvut z_1, z_2 ja z_3. Jos siis pisteen E_1' koordinaatit kuvatasossa Pohlken kuvion origon O' suhteen ovat (x_1, y_1), niin vastaava kompleksiluku on $z_1 = x_1 + y_1 i$. Kyseessä on ortogonaaliprojektio, jos ja vain jos

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

Syvällinen kompleksilukuja koskeva asia tämä ei ole. Sattuupahan vain olemaan niin, että Pohlken lauseen algebrallisesta todistuksesta näkyvät täysin reaaliset ehdot voidaan yhdistää tällaiseksi kompleksiseksi yhtälöksi.

Tämä on ainakin toistaiseksi viimeinen geometriakulma. Lukijoiden aktiivisuuden testaamiseksi julistan lopuksi **palkintokilpailun**: Tavoitteena on etsiä Pohlken lausetta koskevia kirjallisuus- ja verkkoviitteitä ja tutustua mahdollisimman moneen lähteeseen. Solmu palkitsee parhaan kirjallisuustutkimuksen tekijän geometrisella kirjallisuudella. Vastauksena viiteluettelo ja tieto käsiin saaduista lähteistä sähköpostina minulle: `Simo.Kivela@hut.fi`. Odottelen vastauksia toukokuun loppuun saakka ja otan sitten voittajaan yhteyttä. Tulokset julkaistaan syksyn ensimmäisessä Solmussa.



Ellipsit, hyperbelit ja paraabelit vinossa

Matti Lehtinen

1 Ellipsi, hyperbeli ja paraabeli suorassa

Opimme lukion analyyttisen geometrian kurssilla – ainakin, jos kävimme lukiota vielä muutama vuosi sitten – että ellipsin, hyperbelin ja paraabelin yhtälöt ovat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

ja

$$y = ax^2. \tag{3}$$

Yhtälöt ovat yksinkertaisia ja kauniita. Käyrien monia ominaisuuksia voi melko suoraan lukea yhtälöistä. Jos esimerkiksi $a > b$, niin ellipsin pisteille (x, y) pätee

$$b^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 \le x^2 + y^2 \le x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2,$$

joten ellipsin lyhin etäisyys origosta on b ja pisin a, ja nämä saavutetaan pisteissä $(0, \pm b)$ ja $(\pm a, 0)$. Tai koska

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right),$$

niin aina kun x ja y ovat itseisarvoltaan suuria hyperbelin yhtälö (2) voi toteutua vain, jos jompikumpi tulon tekijä on lähes nolla. Hyperbelin pisteet ovat siis suurilla $|x|$:n ja $|y|$:n arvoilla lähellä suoria

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Sanomme, että nämä suorat ovat hyperbelin asymptootit.

2 Mutta riittääkö se?

Yhtälöissä (1) – (3) on kuitenkin heikkous, johon muuan Solmun lukija hiljattain kiinnitti huomionsa. Niissä oletetaan, että käyrät on pantu poseeraamaan yksinkertaisen asentoon: ellipsin keskipiste on origossa ja sen iso- ja pikkuakseli ovat koordinaattiakseleilla, hyperbelillä on samantapainen origon ja akselien suhteen symmetrinen asema ja paraabelin huippu on origossa ja akselina on tasan y-akseli. Mutta eiväthän oikeat ellipsit luonnossa ole näin. Satelliitin ellipsinmuotoisen radan iso- ja pikkuakselit eivät asetu minkään itsestään selvän maanpäällisen koordinaatiston mukaisesti.

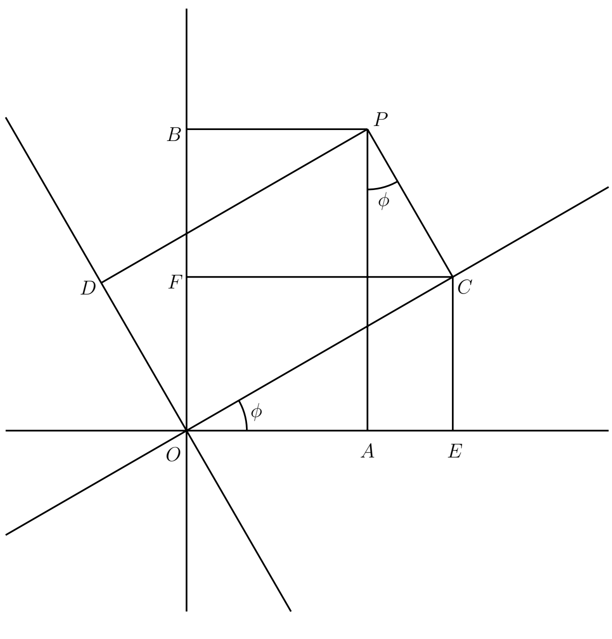
”Yliopistomatematiikassa” ellipsien, hyperbelien ja paraabelien eli yhdellä sanalla kartioleikkausten (nämä käyrät nimittäin voi synnyttää ympyräkartion ja sen suhteen eri asennoissa olevien tasojen leikkauksina, kuten jo antiikin ajoista on tiedetty) tutkimuksessa sovelletaan nykyisin tavallisesti symmetristen matriisien ominaisarvoteoriaa. Katsotaan tässä, mitä asiasta saattaisi saada irti hiukan kotikutoisemmilla keinoilla, niin sanotulla raa'alla laskemisella. Yritys saattaa vaikuttaa masokistiselta, mutta sen tehtyään ymmärtää tason geometriasta yhtä ja toista ja on saanut kohtuullisen hyvän lausekkeiden manipulointiharjoituksen. Matematiikan tekemistä helpottaa aina mukavasti se, että lausekkeiden käsittelyn perusalgebra ei takkua!

3 Kallistetaan!

Lähdetään liikkeelle ellipsistä tai hyperbelistä, jonka yhtälö on

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja muistetaan, että vaihtoehtoisista etumerkeistä ylempi liittyy ellipsiin, alempi hyperbeliin. Haluamme nyt asettaa kuvion muuhun kuin alkuperäiseen asentoon. Sen sijaan, että kääntäisimme kuviota, käännämmekin sen alla olevaa tasoa tai oikeastaan vain koordinaattiakseleita. Sehän käy näin:



Jos P on piste ja A sen kohtisuora projektio x-akselille ja B kohtisuora projektio y-akselille, niin P:n koordinaatit x ja y ovat janojen OA ja OB pituudet, asianmukaisin etumerkein varustettuina. Jos nyt koordinaattiakseleita kierretään vaikkapa niin, että vanhan x-akselin ja uuden x'-akselin välinen kulma on ϕ, niin pisteen P projektio uudella x'-akselilla on C ja uudella y'-akselilla D. P aseman määrittävät nyt luvut $x' = OC = DP$ ja $y' = OD = CP$. Olkoot vielä E ja F pisteen C kohtisuorat projektiot x-akselilla ja y-akselilla. Mutta $\angle CPA = \phi$, joten $x = OA = OE - AE = OC \cdot \cos\phi - CP \cdot \sin\phi = x' \cos\phi - y' \cdot \sin\phi$. Vastaavasti $y = AP = EC + FB = OC \cdot \sin\phi + CP \cdot \cos\phi = x' \cdot \sin\phi + y' \cdot \cos\phi$.

Piste $P = (x,\, y)$ kuuluu ellipsiin tai hyperbeliin, jonka yhtälön voimme kirjoittaa muotoon

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2, \tag{4}$$

silloin ja vain silloin, kun x ja y toteuttavat yhtälön (4). Jos pisteen P sijainti ilmoitetaan uuden koordinaatiston avulla luvuilla x', y', sen kuuluminen mainittuun käyrään riippuu edelleen siitä, toteuttavatko x ja y yhtälön (4) vai ei. Mutta tämä merkitsee, että käyrään kuulumisen ehto uusien koordinaattien avulla lausuttuna täytyy olla

$$b^2(x'\cos\phi - y'\sin\phi)^2 \pm a^2(x'\sin\phi + y'\cos\phi)^2 = a^2b^2.$$

Kun tässä yhtälössä tehdään potenssiin korotukset ja yhdistetään termit, saadaan

$$(b^2\cos^2\phi \pm a^2\sin^2\phi)x'^2 + (b^2\sin^2\phi \pm a^2\cos^2\phi)y'^2 + 2(\pm a^2 - b^2)\cos\phi\sin\phi x'y' = a^2b^2.$$

Käyrän yhtälö uusissa koordinaateissa on siis muotoa

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Cx'y' = G. \tag{5}$$

Selvin muutos lähtöyhtälöön on "sekatermin" $x'y'$ ilmaantuminen. A ja B eivät enää myöskään sisällä sillä tavoin suoraa informaatiota käyrän muodosta kuin yhtälöt (1) ja (2) tai (4).

Eräs mielenkiintoinen ominaisuus uudella muodolla on. Lasketaan suure $AB - C^2$. Se on

$$\begin{aligned}&(b^2\cos^2\phi \pm a^2\sin^2\phi)(b^2\sin^2\phi \pm a^2\cos^2\phi) - (\pm a^2 - b^2)^2\cos^2\phi\sin^2\phi \\ &\qquad = \pm a^2b^2(\sin^4\phi + \cos^4\phi) \pm 2a^2b^2\cos^2\phi\sin^2\phi = \pm a^2b^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)^2 = \pm a^2b^2.\end{aligned}$$

Kierron jälkeisessä yhtälössä suure on siis sama kuin alkuperäisessä yhtälössä (4) (jossa $C = 0$). Toisen asteen yhtälön diskriminanttia muistuttava suure $AB - C^2$ on invariantti koordinaatistojen kierron suhteen. Erityisesti suureen $AB - C^2$ etumerkki paljastaa heti, onko yhtälöön (5) päädytty soveltamalla kierron koordinaattimuutosta ellipsin vai hyperbelin yhtälöön.

Jos haluamme ellipsimme tai hyperbelimme ei ainoastaan tiettyyn asentoon vaan myös tiettyyn paikkaan, on tehtävä vielä origon siirto, sanokaamme pisteeseen $(x'_0,\, y'_0)$. Se merkitsee vielä uusia koordinaatteja $x'' = x' - x'_0$, $y'' = y' - y'_0$. Yhtälö (5) on uusissa koordinaateissa x'', y''

$$A(x'' + x'_0)^2 + B(y'' - y'_0)^2 + 2C(x'' + x'_0)(y'' + y'_0) = G,$$

joka puolestaan sievenee muotoon

$$Ax''^2 + By''^2 + 2Cx''y'' + 2Dx'' + 2Ey'' + F = 0. \tag{6}$$

Katsotaan vielä, mitä kierto ja siirto tekevät paraabelille (3). Kierron jälkeen nähdään, että paraabeliin kuuluvat pisteet $(x',\, y')$, joille pätee

$$x'\sin\phi + y'\cos\phi = a(x'\cos\phi - y'\sin\phi)^2$$

eli

$$x'^2 a\cos^2\phi + y'^2 a\sin^2\phi - x'y'2a\cos\phi\sin\phi - x'\sin\phi + y'\cos\phi = 0.$$

Tämä yhtälö on muotoa

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Cx'y' + D'x' + E'y' = 0.$$

Origon siirto $x'' = x' - x'_0$, $y'' = y' - y'_0$ johtaa lopulta tasan samanlaiseen muotoon kuin yhtälössä (6). Mutta mitä on nyt $AB - C^2$? Se on

$$a^2\cos^2\phi\sin^2\phi - a^2\cos^2\phi\sin^2\phi = 0.$$

Jokaisessa paraabelin kierrosta syntyneessä käyrän yhtälössä (6) on $AB - C^2 = 0$.

4 Mutta samaanhan olisi päästy määritelmästäkin

Ellipsi on yhden määritelmänsä mukaan käyrä, jonka pisteiden kahdesta kiinteästä pisteestä laskettujen etäisyyksien summa on vakio, hyperbeli vastaavasti käyrä, jonka pisteiden kahdesta kiinteästä pisteestä laskettujen etäisyyksien erotus on vakio. Nämä kaksi kiinteää pistettä ovat ellipsin tai hyperbelin *polttopisteet*. Vakiintuneen merkintätavan mukaan edellä mainittu summa tai erotus on $2a$ ja polttopisteet ovat etäisyydellä $2c$ toisistaan. Ellipsin tapauksessa on oltava $a > c$, hyperbelin tapauksessa $a < c$, tämän kertoo kolmioepäyhtälö. Toimitaan koordinaatistossa, jossa origo on polttopisteiden välisen janan keskipiste. Silloin polttopisteet ovat $(c\cos\alpha,\ c\sin\alpha)$ ja $(-c\cos\alpha,\ -c\sin\alpha)$, jollakin kulman α arvolla. Ellipsin määrittelyehto on

$$\sqrt{(x-c\cos\alpha)^2+(y-c\sin\alpha)^2}+\sqrt{(x+c\cos\alpha)^2+(y+c\sin\alpha)^2}=2a \tag{7}$$

ja hyperbelin

$$\sqrt{(x-c\cos\alpha)^2+(y-c\sin\alpha)^2}-\sqrt{(x+c\cos\alpha)^2+(y+c\sin\alpha)^2}=\pm 2a, \tag{8}$$

($\pm$-merkki tarvitaan, koska hyperbelin piste voi olla lähempänä toista tai toista polttopistettä.) Kun yhtälöitä (7) ja (8) lähdetään sieventämään, tullaan ensin yhtälöön

$$(x-c\cos\alpha)^2+(y-c\sin\alpha)^2=\left(2a\pm\sqrt{(x+c\cos\alpha)^2+(y+c\sin\alpha)^2}\right)^2$$

eli

$$\begin{aligned}&x^2-2cx\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha+y^2-2cy\sin\alpha+c^2\sin^2\alpha\\&\qquad=4a^2\pm 2a\sqrt{(x+c\cos\alpha)^2+(y+c\sin\alpha)^2}+x^2+2cx\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha+y^2+2cy\sin\alpha+c^2\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

Kun tästä pyyhitään pois samat termit yhtälön molemmilta puolilta ja vielä jaetaan neljällä, jää lupaavasti vain

$$a^2+cx\cos\alpha+cy\sin\alpha=\pm a\sqrt{(x+c\cos\alpha)^2+(y+c\sin\alpha)^2}.$$

Kun vielä korotetaan toiseen potenssiin, saadaan

$$\begin{aligned}&a^4+c^2x^2\cos^2\alpha+c^2y^2\sin^2\alpha+2c^2xy\cos\alpha\sin\alpha+2a^2cx\cos\alpha+2a^2cy\sin\alpha\\&\qquad=a^2(x^2+2cx\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha+y^2+2cy\sin\alpha+c^2\sin^2\alpha).\end{aligned}$$

Tässäkin on samoja termejä yhtälön molemmin puolin! Pyyhitään ne pois ja käytetään tietoa $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Jäljelle jää yhtälö

$$(a^2-c^2\cos^2\alpha)x^2+(a^2-c^2\sin^2\alpha)y^2-2c^2\cos\alpha\sin\alpha=a^2(a^2-c^2).$$

Jos otetaan käyttöön merkintä $b^2=a^2-c^2$, kun $a>c$ ja $b^2=c^2-a^2$, kun $a<c$, niin on päädytty ellipsin ja hyperbelin yhtälöihin

$$(a^2\sin^2\alpha\pm b^2\cos^2\alpha)x^2+(a^2\cos^2\alpha\pm b^2\sin^2\alpha)y^2-2(a^2\mp b^2)xy\cos\alpha\sin\alpha=\pm a^2b^2$$

tai yhtäpitävästi

$$(b^2\cos^2\alpha\pm a^2\sin^2\alpha)x^2+(b^2\sin^2\alpha\pm a^2\cos^2\alpha)y^2+(2(b^2\mp a^2)\cos\alpha\sin\alpha)xy=a^2b^2.$$

Tämähän näyttää aivan samalta kuin aikaisemmin perusasentoisesta yhtälöstä kiertämällä johdettu yhtälö. Tarkkaavainen lukija huomaa yhden eron, sillä xy-termit ovat erimerkkisiä. Sillekin on selityksensä. Aikaisempi yhtälö lähti siitä, että käyrä ensin oli perusasennossa ja xy-termin sisältävään yhtälöön päästiin, kun koordinaatistoa kierrettiin kulman ϕ verran. Tämä jälkimmäinen yhtälö johdettiin suoraan xy-koordinaateissa, polttopisteiden välinen jana vain oli kulmassa α x-akseliin nähden. Jos alkuperäinen akseli olisi kulkenut polttopisteitten kautta, olisi xy-koordinaatistoon päästäkseen pitänyt panna toimeen kierto kulman $\phi=-\alpha$ verran. Etumerkkieron selitys on nyt siinä, että $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, mutta $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

5 Yhtälö tunnetaan, mikä on käyrä?

Minkä kuvion muodostavat ne tason pisteet, jotka toteuttavat yhtälön

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0? \tag{9}$$

Pahimmassa tapauksessa ehdon toteuttavia pisteitä ei ole ollenkaan tai vain yksi, ja joskus yhtälön vasen puoli saattaa jakautua kahdeksi ensimmäisen asteen tekijäksi, jolloin yhtälön toteuttavat kahden eri suoran pisteet. Näitä erikoistapauksia lukuunottamatta (9) esittää kartioleikkausta. Minkälainen leikkaus on kyseessä, se nähdään kun koordinaatistoa kierretään niin, että xy-termi häviää. Kiertoyhtälöiden

$$\begin{cases} x = x' \cos\phi - y' \sin\phi \\ y = x' \sin\phi + y' \cos\phi \end{cases}$$

huomioon ottamisen jälkeen (9):n toisen asteen termit ovat

$$(A\cos^2\phi + B\sin^2\phi + 2C\sin\phi\cos\phi)x'^2 + (A\sin^2\phi + B\cos^2\phi - 2C\sin\phi\cos\phi)y'^2 \\ + (2(B-A)\sin\phi\cos\phi + 2C(\cos^2\phi - \sin^2\phi))x'y'.$$

Termin $2x'y'$ kerroin on

$$(B-A)\sin(2\phi) - 2C\cos(2\phi).$$

Jos $B = A$, niin $x'y'$:n kerroin on nolla, kun $\cos(2\phi) = 0$ eli kun $\phi = \pm 45°$. Jos $B \neq A$, kerroin on nolla, kun

$$\tan(2\phi) = \frac{2C}{A-B}. \tag{10}$$

Kun kiertokulma ϕ valitaan näin, yhtälön (9) toisen asteen termit ovat yksinkertaisesti

$$A'x'^2 + B'y'^2.$$

Käyrän olemus selviää tulosta $A'B'$. Jos A' ja B' ovat samanmerkkiset, käyrä on ellipsi, jos erimerkkiset, käyrä on hyperbeli. Jos toinen kertoimista A', B' on nolla, käyrä on paraabeli. Käyrän laji määrittyy siis tulosta $A'B'$. Lasketaan se, kun (10) on voimassa eli kun pätee

$$(A-B)\cos\phi\sin\phi = C(\cos^2\phi - \sin^2\phi). \tag{11}$$

Kun käytetään hyväksi yhtälöä (11) ja temppua

$$\cos^4\phi + \sin^4\phi = (\cos^2\phi + \sin^2\phi)^2 - 2\sin^2\phi\cos^2\phi = 1 - 2\sin^2\phi\cos^2\phi,$$

saadaan

$$\begin{aligned} A'B' &= (A\cos^2\phi + B\sin^2\phi + 2C\cos\phi\sin\phi)(A\sin^2\phi + B\cos^2\phi - 2C\cos\phi\sin\phi) \\ &= AB(\sin^4\phi + \cos^4\phi) + (A^2 + B^2)\cos^2\phi\sin^2\phi + \\ &\quad + 2C\cos\phi\sin\phi(B-A)(\cos^2\phi - \sin^2\phi) - 4C^2\cos^2\phi\sin^2\phi \\ &= AB - (A-B)^2\sin^2\phi\cos^2\phi + 2C\cos\phi\sin\phi(B-A)(\cos^2\phi - \sin^2\phi) - 4C^2\cos^2\phi\sin^2\phi \\ &= AB + C^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)^2 - 2C^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)^2 - 4C^2\cos^2\phi\sin^2\phi \\ &= AB - C^2(\cos^2(2\phi) + \sin^2(2\phi)) = AB - C^2. \end{aligned}$$

Yhtälön (9) esittämä käyrä on siis (mainittuja suoraviivaisia erikoistapauksia lukuun ottamatta) ellipsi, paraabeli tai hyperbeli sen mukaan, onko $AB - C^2 > 0$, $= 0$ tai < 0.

Luonnon uusi laskuoppi

Marjatta Näätänen
matematiikan laitos, HY

Ekologiseen rakennemuutokseen pyrittäessä tarvitaan päätöksentekoa ja seurantaa varten mittari. Mittarin tulee olla yksinkertainen ja luotettava, ja sen avulla on pystyttävä edes karkeasti arvioimaan toimintamme ympäristövaikutuksia, ottaen huomioon tuotteen tai palvelun koko elinkaari. Saksalaisen Wuppertal-instituutin professori Friedrich Schmidt-Bleek on kirjoittanut tästä aiheesta kirjan Luonnon uusi laskuoppi (Gaudeamus, 2000).

Perinteisen ympäristönsuojelun painopisteenä ovat olleet haitalliset aineet, päästöt ja jätteet. Nyt kierrätys etenee, mutta kulutuksen kasvaessa jätevuoret kasvavat. Jäteongelma onkin paljon laajempi kuin kysymys siitä, mitä tuotteille tehdään, kun niistä on tullut jätettä. Huomiotta on jäänyt, että ihmisen aiheuttamat valtavat ainevirrat muuttavat ekosysteemejä laajasti koko maapallolla. Useissa maapallon ja ekosysteemien kantokykyä arvioineissa tutkimuksissa on todettu, että ympäristön kuormitusta olisi maailmanlaajuisesti vähennettävä noin puoleen nykyisestä, sama pätee materiaalivirtoihin. Kun lisäksi on tavoitteena nostaa kehitysmaiden asukkaiden hyvinvointi edes siedettävälle tasolle, on teollisuusmaissa luonnonvarojen käyttöä tehostettava noin nelinkertaiseksi 20-30 vuodessa ja kymmenkertaiseksi noin 40-50 vuodessa. Tällaisen ekotehokkuuden lisääminen tunnetaan maailmalla iskusanoina ”Factor 4” ja ”Factor 10”. Nämä ajatukset ovat saaneet viime vuosina huomattavasti vastakaikua niin yritysmaailmassa kuin kansainvälisessä politiikassakin.

Kirjassaan Schmidt-Bleek esittelee ekotehokkuudelle mittarin MIPS (Material Input per Service-unit). MIPS kuvaa ”ekologisen selkärepun” eli luonnonvarojen kokonaiskulutuksen ja aikaansaadun hyödyn suhdetta. Määritelmä on

$$\begin{aligned}\text{MIPS} &= \text{MI/S}\\ &= \text{material input/service-unit}\\ &= \text{materiaalipanos/palvelusuorite.}\end{aligned}$$

Yritysmaailma onkin nyt heräämässä ekotehokkuuteen. Itävallassa järjestettiin 1998 ensimmäiset Factor 4 -messut ja suuri konferenssi. Messuilla oli esillä mm. Itävallan keskuskauppakamarin projekti, jossa sata pientä ja keskisuurta yritystä soveltaa MIPS-lähestymistapaa tuotesuunnittelussaan. Yrityksille ekotehokkuus ja MIPS-ajattelu ovat mielenkiintoisia. Talous ja ympäristönsuojelu eivät enää olekaan vastakkaisia, vaan säästämällä luonnonvaroja ja kehittämällä palveluja voidaan vaikuttaa yrityksen talouteen positiivisemmin kuin yrittämällä korjata aiheutettuja ympäristöongelmia jälkikäteen (esim. suodattimia rakentamalla).

Schmidt-Bleek kirjoittaa, että materiaalivirtojen pienentäminen ja ekotehokkuus on otettava kansantalouden ja EU:n kaltaisten liittoutumien tavoitteeksi. Tavoitteen toteutumisen seuraamiseen on kehitetty koko kansantalouden materiaalivirroista ja niiden ekologisista selkärepuista kertova mittari TMR, kokonaismateriaalinkulutus (Total Material Requirement). Jakamalla TMR aikaansaatua hyvinvointia kuvaavalla luvulla, esim. bruttokansantuotteella tai työllisyydellä, saadaan laskettua ”kansantalouden MIPS”. Länsimaiset kansantaloudet kuluttavat vuosittain 60-90 tonnia kiinteitä materiaaleja asukasta kohden. Tämä vastaa 300 kauppakassillista asukasta kohden viikossa. Kehitysmaiden TMR on huomattavasti alhaisempi, vain muutaman tonnin luokkaa asukasta kohden vuodessa. Factor 4 ja Factor 10 -tehostamiskertoimille on siis perustetta.

Teollisuusmaat, Suomi mukaanluettuna, ovat suuren ekologisen rakennemuutoksen tarpeessa. Muutos koskee koko yhteiskuntaa ja vaatii paljon aktiivisia valintoja. Verotuksen painopistettä on siirrettävä työn tekemisestä ja teettämisestä luonnonvarojen kuluttamiseen. Työllisyys ja ympäristönsuojelu eivät ole enää ristiriitaisia tavoitteita, vaan molempia voidaan edistää ekotehokkuuteen pyrkivillä keinoilla. Energiapolitiikan on muututtava ja keskityttävä energian tuottavuuden lisäämiseen sekä energian kokonaiskäytön vähentämiseen. Myös liikennepolitiikan pitäisi siirtyä tarjonnan lisäämisestä järjestelmän tehostamiseen. Ihmisten tulisi muuttaa tottumuksiaan, teknologialla saavutettu ekotehokkuus ei yksin riitä, vaan vaatii rinnalleen kohtuullisen kulutuksen.

Schmidt-Bleek kirjoittaa, että elinympäristön muutokset ovat saavuttaneet uudet, rajoihinsa törmäävät mittasuhteet kolmesta syystä: Ennen höyrykoneen keksimistä ihminen pystyi käyttämään vain omaa ja eläinten lihasvoimaa sekä tuulen ja veden energiaa muuttaakseen ympäristöä hyödykseen. Koneiden keksimisen jälkeen tilanne on muuttunut täysin. Esimerkiksi Saksassa ruskohiilen avolouhoksilla viiden ihmisen käyttämä kone louhii päivässä 240 000 tonnia hiiltä. Toiseksi ihmisten lukumäärä on kasvanut vähintään kolminkertaiseksi 1800-luvun alun jälkeen. Kolmanneksi tuotteiden valmistus on kemikalisoitunut, luonnolliset hajoamis- ja muunnosprosessit vaikuttavat enää hyvin heikosti ja hitaasti luontoon palautettuihin materiaaleihin.

Päästäessään liikkeelle ainevirtoja ihminen puuttuu ekosysteemien luonnollisiin kehityskulkuihin, jolloin ekosfääri pakotetaan suurimuotoisiin, nykyisin jo maailmanlaajuisiin reaktioihin mukautuakseen ihmisen aiheuttamaan kuormitukseen. Ihminen saattaa ympäristöön myös aineita, joita siellä ei ole ollut ennestään. Tällaisesta esimerkki on ns. freonit. Vuosikymmenten ajan oli vankkumaton tieteellinen käsitys, että nämä yhdisteet eivät juuri vaikuta biologisiin prosesseihin eli ovat myrkyttömiä. Yllättäen havaittiin kuitenkin ”aukot” yläilmakehän otsonikerroksessa, freonit pystyivätkin maailmanlaajuisesti vaikuttamaan yläilmakehän otsoniin. Vain yksi tutkija oli laboratoriohavaintojen perusteella raportoinut, että tällaiset seuraukset voisivat olla mahdollisia.

Metsäkuolemat, otsonikato, eroosio, ilman ja merien saastuminen, tulvat, maaperän suolaantuminen, aavikoituminen ja ilmastonmuutokset ovat merkkejä materiaalivirtojen tasapainon järkkymisestä. Muutosten aiheuttamat taloudelliset kustannukset alkavat myös jo näkyä. Ihminen luo uusia ekologisia olosuhteita tälle planeetalle, mutta se, sopiiko hän itse niihin, näyttää yhä epätodennäköisemmältä.

Ilmaston muutos on paljon julkisessa keskustelussa esiintynyt suuri ympäristöongelma. Schmidt-Bleek muistuttaa, että se on ekologisesta näkökulmasta kuitenkin ainoastaan osaongelma, eikä keskustelu hiilidioksidipäästöjen vähentämisestä saisi syrjäyttää keskustelua muista ympäristöongelmista. Ilmakehään vaikuttava hiilidioksidi on vain yksi niistä monista ainevirroista, joita syntyy energian tuotannossa ja käytössä. Hiilidioksidipäästöjen välttäminen ei saa käynnistää uusia valtavia energia- ja materiaalivirtoja, muuten ratkaisut kääntyvät ekologisesti itseään vastaan.

Energiaratkaisuista Schmidt-Bleek toteaa, että erityisesti tällä sektorilla hinnat eivät kerro ”ekologista totuutta”. Moderni maakaasukäyttöinen kaasu- ja höyryvoimala vaatii perinteisistä sähköntuotantojärjestelmistä pienimmän materiaalipanoksen. Ydinvoiman suhteen ovat käytettävissä olevat tiedot hyvin puutteellisia. Jotta jätehuoltopanokset tulisivat edes osittain huomioonotetuiksi, hän toivoo, että Euroopan ydinvoiman tuottajat luovuttaisivat riittävät tiedot laskelmia varten. Voimalan rakentaminen, käyttö, purkaminen ja loppuvaraston rakentaminen vaativat MIPS-mielessä erittäin suuria panoksia; Schmidt-Bleek on varma, että materiaalipanos olisi huomattavasti korkeampi kuin tähänastisissa laskelmissa.

Uusiutuvien energialähteiden käytön materiaalipanokset ovat selvästi perinteisiä järjestelmiä pienempiä. Puun hakkuutähteiden nykyistä laajempaa käyttöä energialähteenä voidaan erityisesti suositella, sillä materiaalipanos on erittäin pieni. Ympäristönäkökulmasta aurinkoenergian – toisin kuin ydinvoiman – hyödyntämiseen on paljon hyviä syitä. Se, että aurinkoenergiaa pidetään toistaiseksi kilpailukyvyttömänä, ei hänen mielestään merkitse mitään. ”Nykyinen hinta ei perustu ympäristökuormituksen vertailuun, joka sisältäisi kaikki teknisesti mahdolliset energiahuoltojärjestelmät elinkaarineen, mukaan lukien käytettyjen raaka-aineiden ekologiset selkäreput.”

Schmidt-Bleek kertoo esimerkein uudesta ajattelusta: USA:ssa sähköntuottajat näyttävät esimerkkiä siitä, miten perinteinen ajattelutapa voidaan kääntää suorastaan ylösalaisin. Ne ovat lahjoittaneet satojatuhansia uusia sähkölamppuja ja näin välttäneet uusien voimaloiden rakentamista. Tämä on ollut liiketaloudellisesti täysin kannattavaa. Varovaisesti arvioiden nyt käyttämättömille, sopivan kalteville etelänpuoleisille kattopinnoille asennetuilla vedenlämmityslaitteilla voitaisiin säästää 7-10 prosenttia läntisen Saksan sähköntuotannon käyttämästä primäärienergiasta (öljystä, kaasusta tai hiilestä).

Ekologinen rakennemuutos on aloitettava hyvin pian. Tällöin on tavaroiden ja palvelujen hinnoissa tärkeää huomioida ympäristön käytön hinta, hintojen on siis kerrottava ekologinen totuus. Näkökulmaksi on otettava ihmiskunnan, eikä vain meidän sukupolvemme hyvinvointi. Nykyinen talousjärjestelmämme maksimoi pääoman ja työvoiman tuottavuuden, raaka-aineilla on verrattain pieni vaikutus tuotteiden ja palvelujen hintaan. Luonnonvarojen tuottavuuden maksimointia ei harjoiteta. Tämä johtaa kansantaloudellisesti ja ekologisesti täysin vääriin tuloksiin. On esimerkiksi taloudellisesti kannattavaa myydä Uuden-Seelannin omenoita Keski-Euroopan omananviljelysseudulla. Kuljetusten nykyistä korkeammat hinnat tekisivät aineiden hankinnan lähiseudulta itsestään selväksi.

Kirjassaan Schmidt-Bleek antaa esimerkkejä teollisuuden väärin rajatuista laskelmista: Ruhrin alueella Saksassa romahtivat vanhat hiilikaivokset. Yli 70 000 hehtaaria maata laski niin paljon, että pintavesi tulvisi sen päälle, ellei vettä pumpattaisi jatkuvasti pois. Lapsemme ja lastenlapsemme joutuvat maksamaan laskut. Kaivostoiminnan tulos meneekin miinuksen puolelle, jos lasketaan mukaan kaikki kulut pitkällä aikavälillä (kuten pumppaamisen energiankulutus ja siirretyt vesimäärät), vaikkakin lyhyellä aikavälillä joku on sillä tienannut rahaa.

Toinen esimerkki on auton katalysaattori, joka sisältää 2-3 grammaa platinaa ja lisäksi mm. terästä sekä keramiikkaa. Platinagramman tuottamiseksi on siirrettävä ja työstettävä 350 000 grammaa kiviainesta. Katalysaattorin ekologinen selkäreppu eli sen tuottamiseksi siirretty materiaalimäärä vastaa noin yhtä tonnia ympäristöä.

Minkä verran ympäristöä maksaa päivittäinen paperitulvamme? Keskimääräinen sanoma- ja aikakauslehtikilon ekologinen reppu painaa lähes sata kiloa. (Paperin tuottamiseksi tarvitaan puuta, vettä, paljon kemikaaleja ja enenevässä määrin myös keräyspaperia.)

Kirjassaan Schmidt-Bleek antaa esimerkkejä selkäreppujen ja MIPS:in laskemisesta sekä lopuksi yksityiskohtaisia neuvoja muutoksen aikaansaamiseksi. Ylen muodikkaasta kansainvälistymisestä hän toteaa: ”Usein uskotaan, että talous toimii sitä paremmin, rationaalisemmin ja oikeudenmukaisemmin, mitä kansainvälisemmin se toimii. Mutta pitääkö tämä todella paikkansa?” Hän huomauttaa, etteivät WTO:n sopimukset tunne ekologisia selkäreppuja, että kuljetuksille on annettava oikeat hinnat, tuotteiden hintoihin on lisättävä myös materiaalin-, energian- ja maankäytön intensiteetit. Seurauksena on: ”Tietty keskittyminen alueelliseen ja paikalliseen toimintaan on väistämätöntä ekologisista syistä. Silloin vientituotteet eivät enää yhtä usein ole tavaroita, vaan pääomaa, osaamista ja tietoa.”

Wuppertal-instituutin tutkimustuloksia:
`http://www.wupperinst.org`

Suomessa tehtyjä selvityksiä:
`http://thule.oulu.fi/ecoef/`
`http://www.Factor10-institute.org/PROREGIS.pdf`