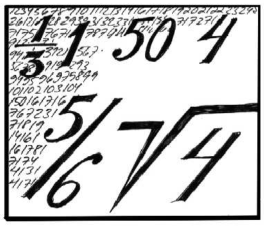

Kompleksiluvuista ja kvaternioista

Jorma Merikoski
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto

1 Johdanto

Nykyisessä koulumatematiikassa kompleksiluvut vain mainitaan ohimennen jos sitenkään. (Analyysin syventävällä kurssilla niitä saatetaan käsitellä enemmän, ks. [MVLS].) Niille *Solmun* lukijoille, jotka eivät ollenkaan tunne kompleksilukuja, riittää tämän kirjoituksen ymmärtämiseksi seuraava esitieto. Kuvitellaan, että on olemassa *imaginaariyksikkö* i (imaginaarinen = kuviteltu, näennäinen < lat. imaginarius < imago = kuva), jolla on kummallinen ominaisuus $i^2 = -1$, ja, mikä on ehkä vieläkin kummallisempaa, että luvun i ja reaalilukujen välillä voidaan suorittaa laskutoimituksia. Näin syntyy *kompleksiluku* $z = x + yi$, missä x ja y ovat reaalilukuja.

2 "Väärät" ja "mahdottomat" luvut

Matematiikan historiassa jokainen lukukäsitteen laajennus on vaatinut vuosisatoja aikaa ja aiheuttanut paljon hämmennystä ja kritiikkiä. Descartesin[1] mielestä [EHH, s. 19] negatiiviluvut olivat "vääriä lukuja", kun taas Stifelin[2] mielestä [EHH, s. 33] irrationaaliluku ei ollut "oikea luku". Kompleksilukuja kutsuttiin alunperin "mahdottomiksi luvuiksi" (quantitates impossibiles) [EHH, s. 55]. Cardano[3] käytti negatiiviluvun neliöjuurelle nimitystä "muodollinen luku" (quantitas sophistica) [EHH, s. 57].

Klinen [Kl, s. 253] mukaan Cardano piti kirjassaan *Ars Magna* kompleksiluvuilla laskemista jopa "henkisenä kidutuksena" kirjoittamalla: "Kiinnittämättä huomiota asian vaatimaan henkiseen kidutukseen, kerro keskenään $5+\sqrt{-15}$ ja $5-\sqrt{-15}$; tulos on $25-(-15)$ eli 40". Ebbinghaus ja kumppanit [EHH, s. 57] ovat kuitenkin eri mieltä Klinen käännöksestä. Heidän mukaansa alkuperäistekstin "dismissis incruciationibus" tarkoittaakin vain sitä, että imaginaariset termit kumoutuvat. He jatkavat (erittäin vapaasti suomennettuna ja lyhennettynä): "Olisi houkuttelevaa lukea nämä sanat sanaleikkinä, jolla olisi myös 'henkisen kidutuksen huomiotta jättämisen' merkitys, mutta tämä tulkinta ei todennäköisesti ole oikeutettu".

Cardano piti negatiivilukujen neliöjuuria koskevia tutkimuksiaan "yhtä hienostuneina kuin hyödyttöminä" [Bo, s. 405, Kl, s. 253], mutta jo Leibniz[4] oli jälkimmäisestä eri mieltä kirjoittamalla [EHH, s. 55]: "Ex irrationalibus oriuntur quantitates impossibiles seu imaginarie, quarum mira est natura, et tamen non contemnenda utilitas" (Irrationaaliluvuista ovat syntyneet mahdottomat eli kuvitellut luvut, joiden luonne on hyvin omituinen, mutta joiden hyödyllisyyttä ei pidä väheksyä).

(Cardano oli monessa mukana [Bo, EHH, Ev, Kl, Le1, Le2, Sa]. Hän mm. joutui vankilaan laadittuaan Jeesuksen horoskoopin [EHH, s. 57; Ev, s. 221]. Stifelkin oli monessa mukana ja hänkin kävi vankilassa. Hän oli nimittäin "laskenut", että maailmanloppu tulee 3. 10. 1533, ja kun se ei tullutkaan, hänen oli paettava vankilaan niitä talonpoikia, jotka hän oli saanut luopumaan omaisuudestaan taivaaseenpääsyn takia [Ev, s. 217].)

3 "Oikeat" luvut

Kompleksilukujen haltuunotto ei siis ehkä vaatinutkaan "henkistä kidutusta", mutta sitäkin enemmän työtä. Tämän työn tärkeän välivaiheen toteutti Hamilton[5], kun hän 1835 määritteli "oikeat" kompleksiluvut täsmällisesti *järjestettyinä reaalilukupareina*. Lukija voi nyt tehdä samoin. Ajattele sinulla olevan epämääräistä tietoa kompleksiluvuista sen verran kuin johdannossa on sanottu. Laske summa $(x+yi)+(z+ui)$ ja tulo $(x+yi)(z+ui)$ kuvittelemalla, että kaikki tavanomaiset laskusäännöt ovat voimassa. Samasta reaaliluku x "reaalisen kompleksiluvun" $(x, 0)$ kanssa ja "puhdas imaginaariluku" yi "puhtaasti imaginaarisen kompleksiluvun" $(0, y)$ kanssa. Näin voit Hamiltonin tapaan määritellä kompleksiluvut järjestettyinä reaalilukupareina, joille määritellään yhteenlasku

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

ja kertolasku

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Pääset kompleksiluvun tavanomaiseen esitysmuotoon huomaamalla, että

$$(x, y) = (x, 0)(1, 0) + (y, 0)(0, 1) = x1 + yi = x + yi,$$

missä $1 = (1, 0)$ ja $i = (0, 1)$.

Kompleksiluvut, tason pisteet ja tason vektorit vastaavat siis täysin toisiaan. On selvää, että kompleksilukujen yhteenlasku vastaa vektorien yhteenlaskua, ja on helppo osoittaa, että kompleksiluvun kertominen kompleksiluvulla $\cos\theta + i\sin\theta$ vastaa vektorin kiertämistä kulman θ verran.

Voidaan todistaa, että kaikki reaalilukujen yhteen- ja kertolaskun perusominaisuudet (vaihdantalait, liitäntälait, osittelulaki, nollan ominaisuus yhteenlaskussa, vastaluvun olemassaolo, ykkösen ominaisuus kertolaskussa, nollasta eroavan luvun käänteisluvun olemassaolo) ovat voimassa myös kompleksilukujen yhteen- ja kertolaskulle. Toisin sanoen kompleksiluvut (kuten myös rationaaliluvut ja reaaliluvut) muodostavat *kunnan*.

Mutta voidaanko järjestettyjen reaalilukuparien joukossa $\mathbb{R}^2$ määritellä kertolasku *jollakin muulla tavalla* niin, että saadaan kunta, kun yhteenlasku on määritelty vektorien yhteenlaskuna?

Ei voida millään olennaisesti erilaisella tavalla [EHH, s. 68; NP, s. 16]. Yksinkertainen tapa $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$ ei onnistu. Nimittäin tällöin ykkösalkio (siis se, jolla kerrottaessa luku ei muutu) on $(1, 1)$, joten esimerkiksi alkiolla $(1, 0)$ ei ole käänteisalkiota, sillä $(1, 0)(x, y) = (1, 1)$ ei ole koskaan voimassa.

4 Miten jatketaan

Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ laajennettiin kokonaislukujen joukoksi $\mathbb{Z}$, jotta yhtälöllä $a + x = b$ olisi aina ratkaisu. Joukko $\mathbb{Z}$ laajennettiin rationaalilukujen joukoksi $\mathbb{Q}$, jotta yhtälöllä $ax = b \quad (a \neq 0)$ olisi aina ratkaisu. Eräs syy laajentaa joukko $\mathbb{Q}$ reaalilukujen joukoksi $\mathbb{R}$ oli, että yhtälöllä $x^2 = a \quad (a \geq 0)$ olisi aina ratkaisu. Joukko $\mathbb{R}$ laajennettiin kompleksilukujen joukoksi $\mathbb{C}$, jotta yhtälöllä $x^2 = -1$ olisi ratkaisu.

Kaikkien laajennusten $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ motiivina on siis ollut tarve saada tietyt yhtälöt ratkeaviksi. Siksi on johdonmukaista kysyä, mitkä kompleksialueella ratkeamattomat yhtälöt kannattaa ottaa uuden laajennuksen lähtökohdiksi, mutta tällaisia yhtälöitä ei ole. Nimittäin laajennus $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ onnistui yli odotusten sikäli, että *jokaisella n. asteen kompleksikertoimisella polynomiyhtälöllä ($n \geq 1$) on ratkaisu.* Tämän tärkeän *algebran peruslauseen* [EHH, luku 4; NP, s. 39, 156] todisti Gauss[6] väitöskirjassaan 1799. Ratkaisuja on täsmälleen n, kun kukin ratkaisu otetaan mukaan niin monta kertaa kuin sen kertaluku osoittaa.

Monet muutkin yhtälöt käyttäytyvät kompleksialueella miellyttävästi. Nimittäin mielenkiintoisen ja syvällisen *Picardin lauseen* [NP, s. 167, 373] mukaan jokainen kaikkialla määritelty ja derivoituva kompleksimuuttujan kompleksifunktio, joka ei ole vakio, *saa kaikki arvot paitsi mahdollisesti yhtä.* Esimerkiksi kompleksinen eksponenttifunktio $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, missä $z = x + yi$, saa kaikki muut arvot paitsi arvon 0. Ei kuitenkaan ole järkevää marssittaa matemaattiselle näyttämölle jotakin kummallista uutta otusta, joka tekee tämän funktion nollaksi. Siksi laajennus $\mathbb{C} \to$ **?** täytyy tehdä muulla perusteella.

Koska kompleksiluvut määritellään järjestettyinä reaalilukupareina, niin tuntuu luonnolliselta tutkia seuraavaksi *järjestettyjä reaalilukukolmikkoja* eli geometrisesti ajatellen kolmiulotteisen avaruuden pisteitä tai sen vektoreita. Tarkastelemme siis kysymystä, voidaanko järjestettyjen reaalilukukolmikkojen joukossa $\mathbb{R}^3$ määritellä kertolasku niin, että saadaan kunta, kun yhteenlasku on määritelty vektorien yhteenlaskuna. (Yksinkertaisesti alkioittain kertomalla sitä ei voida tehdä, vrt. kohdan 3 loppu.)

5 Mitä Hamilton kaiversi siltaan 16. 10. 1843

Hamilton mietti viisitoista vuotta kysymystä siitä, miten kolmiulotteisille vektoreille voitaisiin määritellä kertolasku, jolla olisi yhteys vektorin kiertoon. Myöhemmin hän kirjoitti pojalleen [EHH, s. 189]: "Joka aamu, kun tulin aamiaiselle, sinulla oli tapana kysyä: 'Isä, joko sinä osaat kertoa kolmikoita?'. Minun oli aina pudistettava surullisesti päätäni ja sanottava: 'En osaa; minä osaan vain laskea niitä yhteen ja vähentää'".

Vihdoin Hamilton onnistui. Hän kuvaa ratkaisun löytämisen kokemusta [EHH, s. 191-192] (erittäin vapaasti suomennettuna ja lyhennettynä):

> Huomenna on kvaternioiden viisitoistavuotispäivä. Ne syntyivät täysikasvuisina 16. lokakuuta 1843, kun olin Lady Hamiltonin kanssa kävelemässä Dubliniin ja kun tulimme Broughamin sillalle. Silloin minusta tuntui ikäänkuin ajatuksen sähkövirta olisi kulkenut lävitseni ja sen kipinöissä olivat i:n, j:n ja k:n perusyhtälöt… En voinut vastustaa kiusausta – niin epäfilosofinen kuin se ehkä olikin – kaivertaa veitsellä sillan erääseen kiveen peruskaavaa
>
> $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Kiertäessään maailmaa juttu alkaa tavallisesti muuttua, ja niin kävi Hamiltonin kaiverrustenkin. Esimerkiksi Boyerin [Bo, s. 814] mukaan Hamilton piirsi kiveen vain $i^2 = j^2 = k^2 = ijk$, kun taas Evesin [Ev, s. 391] mukaan hän piirsi "peruskvaternioiden" 1, i, j ja k kertotaulun, joka seuraa helposti peruskaavasta.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Yhtäkaikki, Hamilton varmaan kaiversi jotakin. Hänellä on täytynyt olla mukanaan melkoinen lapinleuku, kun hän sai piirretyksi kiveen kaavoja. Vai oliko silta tehty hiekkakivestä, joka ei tunnu kovin luotettavalta materiaalilta.

6 Kvaterniot

Hamilton ei kylläkään ratkaissut ongelmaansa aivan alkuperäisessä muodossaan. Hän ei siis määritellyt avaruudessa $\mathbb{R}^3$ kertolaskua, joka vastaa vektorin kiertoa. Nimittäin nykyisin jokainen tutkijankoulutuksen saanut matematiikko pystyy parissa tunnissa tai ainakin parissa päivässä (tai ainakin hänen pitäisi pystyä) osoittamaan, että tuollaista kertolaskua ei voida määritellä. (Tällä en suinkaan vähättele Hamiltonin neroutta, vaan päinvastoin, sillä on paljon helpompaa työskennellä valmiissa systeemissä kuin keskeneräisessä.) Osoitamme tämän mahdottomuuden [EHH, s. 189-190].

Teemme vastaoletuksen, että avaruudessa $\mathbb{R}^3$, jossa alkiot $(x, y, 0)$ vastaavat kompleksilukuja (x, y), on määritelty kertolasku niin, että liitäntä- ja osittelulaki sekä vaihdantalaki reaalisen tekijän kanssa ovat voimassa. Merkitsemme $1 = (1, 0, 0), i = (0, 1, 0)$ ja $j = (0, 0, 1)$. Olkoon $ij = (x, y, z) = x1 + yi + zj$. Koska $i^2 = -1$, niin $i(ij) = i^2 j = -j$, joten

$$
\begin{aligned}
(-1)j = -j = i(ij) = i(x1 + yi + zj) = xi - y1 + zij = xi - y1 + z(x1 + yi + zj) = \\
(zx - y)1 + (zy + x)i + z^2 j.
\end{aligned}
$$

Vertaamalla j:n kertoimia saamme $z^2 = -1$, mikä sisältää ristiriidan, koska z on reaalinen.

Hamiltonin hieno oivallus oli, että *haluttaessa kertoa kolmiulotteisia vektoreita niin, että kertolasku vastaa kiertoa, täytyy siirtyä neliulotteiseen avaruuteen.* Siksi hän määritteli kvaterniot järjestettyinä *reaalilukunelikköinä* (t, x, y, z), joiden yhteenlaskun hän määritteli vektorien yhteenlaskuna. Kertolaskun hän määritteli merkitsemällä $(t, x, y, z) = t1 + xi + yj + zk$ ja vaatimalla, että edellä esitetty peruskvaternioiden $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ ja $k = (0, 0, 0, 1)$ kertotaulu sekä tavanomaiset laskusäännöt ovat kertolaskun vaihdantalakia lukuunottamatta voimassa.

7 "Algebran vapautuminen"

Kertolaskun vaihdantalakia Hamilton ei siis saanut laajennuksessaan toimimaan eikä sitä saa kukaan muukaan. Mutta taisi olla pikemminkin voitto kuin tappio huomata, että kannattaa tutkia myös sellaisia algebrallisia järjestelmiä, joissa kertolasku ei ole vaihdannainen. Monet historioitsijat, esimerkiksi Eves [Ev, luku 13.8] ja Lehtinen [Le1, luku 11.1; Le2, luku 13.1], kutsuvat tätä huomiota "algebran vapautumiseksi" ja vertaavat sitä epäeuklidisen geometrian aikaansaamaan "geometrian vapautumiseen".

8 Kvaterniot ja vektorialgebra

Samastamme nyt peruskvaternion 1 reaaliluvun 1 kanssa sekä peruskvaterniot i, j ja k kolmiulotteisen avaruuden perusvektorien i, j ja k kanssa. Tällöin voimme ajatella kvaterniota $u = (t, x, y, z)$ kummallisena summana

$$\mathbf{u} = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

jossa skalaari t ja kolmiulotteinen vektori $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ lasketaan yhteen. Jos $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, niin $\mathbf{u}$ on *skalaari(kvaternio)*, ja jos $t = 0$, niin $\mathbf{u}$ on *vektori(kvaternio)*. Voidaan melko helposti osoittaa, että vektorikvaternioiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ tulolla $\mathbf{uv}$ on näiden vektorien skalaaritulon $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ja vektoritulon $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ kanssa mielenkiintoinen yhteys

$$\mathbf{uv} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

joka on voimassa myös toisin päin,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{uv} - \mathbf{vu}), \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{2}(\mathbf{uv} + \mathbf{vu}).$$

Täten kvaternioalgebraa voidaan soveltaa kolmiulotteiseen vektorialgebraan [EHH, s. 198-199].

Hamiltonin tavoite määritellä kolmiulotteisessa avaruudessa tulo, joka vastaa vektorin kiertoa, toteutuu tavallaan vektorikvaternioiden tulona, sillä nehän muodostavat kolmiulotteisen avaruuden (mutta kertolasku on suoritettava neliulotteisessa avaruudessa). Tämä kiertotulkinta on pitkä ja ehkä vaikeakin [EHH, § 7.3], joten emme käsittele sitä tässä.

9 Pietari, Herodes ja kvaterniot

"Quaternion" tarkoittaa "neljän ryhmää". Hamilton oli (toisaalta melkoinen ryyppyveikko [Be, luku XIX], mutta toisaalta) syvästi uskonnollinen, joten hän on saattanut ottaa tuon termin Raamatusta. Nimittäin, kun Herodes vangitsi Pietarin (Ap. t. 12:4), niin (erään käännöksen mukaan [EHH, s. 194]) "he put him in prison, and delivered him to four quaternions of soldiers to keep him". (Toisaalta sanan "quaternion" sijasta on joissakin käännöksissä käytetty jotakin muuta sanaa, esimerkiksi "squad", enkä tiedä, mikä sana oli Hamiltonin raamatussa.) Suomenkielinen käännös on "Herodes pani Pietarin telkien taakse ja määräsi häntä vartioimaan neljä nelimiehistä sotilasvartiostoa".

10 $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{H} \to$?

Kvaternioiden joukkoa merkitään tavallisesti $\mathbb{H}$:lla Hamiltonin kunniaksi. Hamilton uskoi [Be, s. 357], että kvaternioalgebra tekisi "kuolemattomaksi sekä hänet itsensä että hänen rakkaan Irlantinsa ja tulisi säilymään ikuisesti suurimpana matemaattisena saavutuksena sitten Newtonin *Principian*". Hän oli väärässä, sillä se osoittautui vain yhdeksi kompleksialkioisten 2×2-matriisien algebraksi muiden joukossa vailla kovin suurta merkitystä [EHH, s. 193]. Hamilton kuuluu matematiikan historian suurmiehiin aivan muiden töidensä takia.

Myöskään lukukäsitettä ei kannata laajentaa $\mathbb{H}$:sta eteenpäin, sillä seuraavassa laajennuksessa, jolloin täytyy operoida $\mathbb{R}^8$:ssa, menetetään kertolaskun liitäntälakikin. On siis parasta lopettaa tähän ja todeta, että kompleksiluvut ovat sittenkin "se oikea lopullinen" lukualue.

Kvaternioalgebra pysyy kuitenkin edelleen kiinnostavana tutkimuskohteena. Näpyteltyäni 17. 10. 2001 – kvaternioiden 173-vuotispäivänä – *Zentralblatt für Mathematik* -lehden sähköiseen tietokantaan hakusanan "quaternion" sain 707 viitettä. Siis vuodesta 1931 alkaen on julkaistu noin monta matemaattista tutkimusta, joiden otsikossa esiintyy tämä sana. (Hakusana "complex" antoi peräti 15598 viitettä, joten matemaattista tietoa on maailmalla suorastaan hirvittävä määrä, ja lisää tulee koko ajan.) Minäkin olen ollut tekemisissä kvaternioiden kanssa sikäli, että olen joutunut miettimään kvaternioalkioisen matriisin determinantin määritelmää. Kun kertolasku ei ole vaihdannainen, niin determinantin tavanomainen määritelmä ei toimi kunnolla.

Kiitokset

Kiitän Tuomas Sorvalia, Ari Virtasta ja Keijo Väänästä heidän käsikirjoituksestani tekemistään huomautuksista.

Henkilöviittaukset

1. René Descartes (1596–1650), ranskalainen matemaatikko ja filosofi.
2. Michael Stifel (1486–1567), saksalainen matemaatikko ja teologi.
3. Girolamo Cardano (1501–1576), italialainen matemaatikko, astrologi, lääkäri ja keksijä.
4. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), saksalainen matemaatikko ja filosofi.
5. William Rowan Hamilton (1805–1865), irlantilainen matemaatikko.
6. Karl-Friedrich Gauss (1777–1855), saksalainen matemaatikko. "Matemaatikkojen kuningas".

Kirjallisuusviittaukset

[Be] E. T. Bell, *Matematiikan miehiä*. WSOY, 1963.

[Bo] C. Boyer, *Tieteiden kuningatar. Matematiikan historia, osat I–II*. Art House, 1994.

[EHH] H. D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel and R. Remmert, *Numbers*. Graduate Texts in Mathematics 123. Corrected third printing. Springer, 1995.

[Ev] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*. Fourth edition. Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[Kl] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Third printing. Oxford Univ. Pr., 1974.

[Le1] M.Lehtinen, *Matematiikan lyhyt historia*. Yliopistopaino Helsinki Univ. Pr., 1995.

[Le2] M.Lehtinen, *Matematiikan historia*. http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/

[MVLS] J. Merikoski, K. Väänänen, T. Laurinolli ja T. Sankilampi, *Matematiikan taito 13. Analyysi*. Weilin+Göös, 1996.

[NP] R. Nevanlinna ja V. Paatero, *Funktioteoria*. Otava, 1963.

[Sa] E. Saksman, *Kolmannen asteen yhtälöä ratkaisemassa*. http://solmu.math.helsinki.fi/2000/2/, 5–12.