

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \leq \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$
– epäyhtälön johto käänteisellä induktiolla ja sen käyttö ääriarvot tehtävissä

Irmeli Pietilä

1 Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välinen epäyhtälö

Ensiksi todistetaan, että $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$ on totta, kun $x_1, x_2 > 0$.

Todistus.

$$(1.1) \quad \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geq x_1x_2,$$

operaatio on sallittu, koska molemmat puolet ovat positiivisia.

$$(1.2) \quad \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} \geq x_1x_2,$$

$$(1.3) \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 4x_1x_2,$$

operaatio on sallittu, koska 4 on positiivinen.

$$(1.4) \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0,$$

$$(1.5) \quad (x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Edellisessä epäyhtälössä yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $x_1 = x_2$.

Seuraavaksi todistetaan epäyhtälö yleisessä tapauksessa:

$$(1.6) \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n > 0.$$

Askel 1 ($n = 2^k$)

Epäyhtälö todistettiin tapauksessa $n = 4$. Seuraavaksi voidaan todistaa matemaattisella induktiolla epäyhtälö todeksi, kun $n = 2^k$ ja $k > 1$.

$$(1.7) \quad \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4},$$

$$(1.8) \quad \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

Geometrinen keskiarvojen aritmeettinen keskiarvo!

$$(1.9) \quad \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x_1 x_2} \sqrt{x_3 x_4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

Yhtäsuuruus toteutuu, jos $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$.

Yhtäsuuruus toteutuu, jos $x_1 x_2 = x_3 x_4$.

Kummatkin ylläolevista ovat tosia, jos $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Askel 2

Käänteisellä induktiolla näytetään todeksi, että epäyhtälö on voimassa tapauksessa $n = 3$, kun se on voimassa tapauksessa $n = 4$.

$$(1.10) \quad \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}, \quad x_1, x_2, x_3 > 0.$$

Valitaan

$$(1.11) \quad x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \text{joten } x_1 + x_2 + x_3 = 3 \cdot x_4.$$

$$(1.12) \quad \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{3 \cdot x_4 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4},$$

$$(1.13) \quad x_4 \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4},$$

$$(1.14) \quad x_4^4 \geq x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$(1.15) \quad x_4^3 \geq x_1 x_2 x_3,$$

$$(1.16) \quad x_4 \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}.$$

Kuten muistamme, $x_4 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, joten

$$(1.17) \quad \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

Yhtäsuuruus pätee, kun $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Samalla tavalla voisimme todistaa epäyhtälön todeksi kaikilla n :n arvoilla.

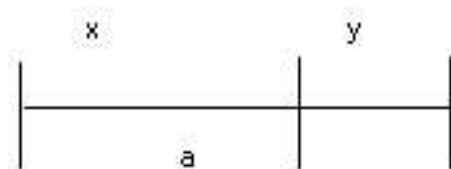
□

2 Maksimiarvo-ongelmat

Edellisen luvun epäyhtälöä voidaan käyttää maksimiarvotehtävissä, jos funktio voidaan kirjoittaa tekijöidensä tuloksi siten, että samojen tekijöiden summa on vakio.

Ongelma 1

Jana a on jaettu kahteen osaan kuvan osoittamalla tavalla. Mikä on pinta-alan suurin arvo, jos se on määritelty $A = x^2y$ maksimiarvo? Mikä on x :n arvo siinä tapauksessa?



Kuva 1: $a = 10$, $x, y > 0$

Muista!

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

$$A(x) = x \cdot x \cdot (10 - x),$$

$$2A(x) = x \cdot x \cdot 2(10 - x), \quad \text{voidaan kertoa 2:lla, koska } 2 > 0,$$

$$2A(x) \leq \left(\frac{x + x + 20 - 2x}{3} \right)^3,$$

$$2A(x) \leq \frac{20^3}{3^3},$$

$$A(x) \leq \frac{4000}{24} \approx 148.148 \dots$$

Edellisessä epäyhtälössä yhtäsuuruus toteutuu, jos $x_1 = x_2 = x_3$. Silloin

$$x = 20 - 2x,$$

$$x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}, \quad y = 3\frac{1}{3}.$$

Vastaus ongelmaan 1:

$$A(x) \leq \frac{4000}{24} \approx 148.148 \dots$$

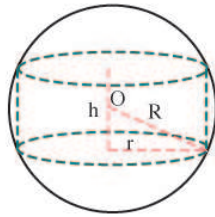
Yhtäsuuruus, kun

$$x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}, \quad y = 3\frac{1}{3}.$$

Ongelma 2

Ympyrän sisälle on piirretty sylinteri. Mikä on sylinterin maksimitilavuus, kun ympyrän säde on R ?

Sylinterin sädettä on merkitty r :llä ja korkeutta h :lla (kummatkin aidosti positiivisia ja pienempiä kuin R). Sylinterin tilavuus on siten



Kuva 2:

$$V = \pi r^2 h,$$

$$r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2. \quad \text{Katso kuvaa! Pythagoras.}$$

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}, \quad \text{tämä sijoitetaan } r^2\text{:n tilalle } V\text{:n kaavassa}$$

$$V = \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) \cdot \pi \cdot h,$$

$$\frac{V(h)}{\pi} = \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) \cdot h, \quad \text{yhtälö voidaan jakaa } \pi > 0.$$

Yhtälö on positiivinen ja siksi voidaan korottaa neliöön.

$$\begin{aligned} \left(\frac{V(h)}{\pi}\right)^2 &= \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h^2, \\ \frac{V(h)^2}{\pi^2 \cdot 2} &= \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \frac{h^2}{2} \leq \left(\frac{R^2 - \frac{h^2}{4} + R^2 - \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{2}}{3}\right)^3, \\ (V(h))^2 &\leq 2\pi^2 \left(\frac{2R^2}{3}\right)^3 \\ V(h) &\leq \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Koska $\frac{4\pi R^3}{3}$ on pallon tilavuus ($= V(R)$), on sylinterin maksimitilavuus $V(h) = \frac{V(R)}{\sqrt{3}}$. Edellisessä epäyhtälössä yhtäsuuruus toteutuu, jos

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = x_3, \\ R^2 - \frac{h^2}{4} &= \frac{h^2}{2}, \\ \frac{3h^2}{4} &= R^2, \quad h = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \\ r^2 &= R^2 - \frac{h^2}{4}, \\ r^2 &= R^2 - \frac{4R^2}{4 \cdot 3}, \quad r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Vastaus Ongelmaan 2:

$$V(h) = \frac{V(R)}{\sqrt[3]{3}}$$

Yhtäsuuruus, kun

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \quad r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}.$$

Ennen Hortobagyn kurssia en olisi ratkaissut tätä ongelmaa edellämaitulla tavalla, vaan olisin käyttänyt derivaattaa.

Ratkaisutapa 2

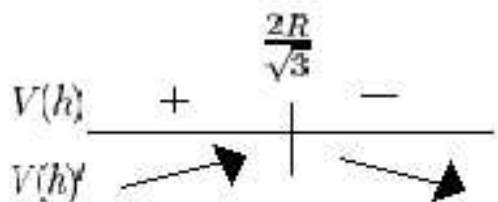
$$V(h) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h,$$

$$V(h) = \pi R^2 h - \pi \frac{h^3}{4},$$

$$V(h)' = \pi R^2 - \pi 3 \frac{h^2}{4},$$

$$V(h)' = 0, \quad \text{kun } \pi R^2 - \pi 3 \frac{h^2}{4} = 0,$$

$$h = \pm \frac{2R}{\sqrt{3}}, \quad \text{mutta vain } h > 0 \text{ on hyväksyttävä.}$$



Kuva 3:

Funktio saavuttaa maksimiarvonsa, kun $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, silloin $r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ ja tilavuus on $V(h) = \frac{V(R)}{\sqrt{3}}$.

3 Minimiarvo-ongelmat

Ensimmäisen luvun epäyhtälöä voidaan käyttää minimiarvotehtäviin, jos funktio voidaan kirjoittaa termien summaksi ja samojen termien tulo on vakio.

Ongelma 3

Mikä on funktion $f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$, $x > 0$, minimiarvo?

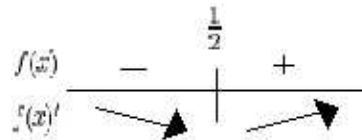
$$f(x) = 4x + \frac{1}{x},$$

$$\frac{f(x)}{2} = \frac{4x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} \geq 2,$$

$$f(x) \geq 4.$$

Yhtäsuuruus pätee, jos $4x = \frac{1}{x}$, $4x^2 = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

Vastaus ongelmaan 3:
 $f(x)$:n minimiarvo on 4.
Silloin $x = \frac{1}{2}$.



Kuva 4:

Ja derivaatalla:

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

$$f(x)' = 4 - \frac{1}{x^2},$$

$$f(x)' = 0,$$

$$4 - \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \quad \text{mutta } x > 0, \text{ silloin ainoastaan } x = \frac{1}{2} \text{ kelpaa.}$$