Keskiverto $\leq$ keskiarvo

Epäyhtälön suora todistus tapauksessa $n = 3$ ja yleisessä tapauksessa.

Maija Salmela

Suora todistus, tapaus $n = 3$.

On todistettava epäyhtälö

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \tag{1}$$

missä $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, tapauksessa $n = 3$ eli

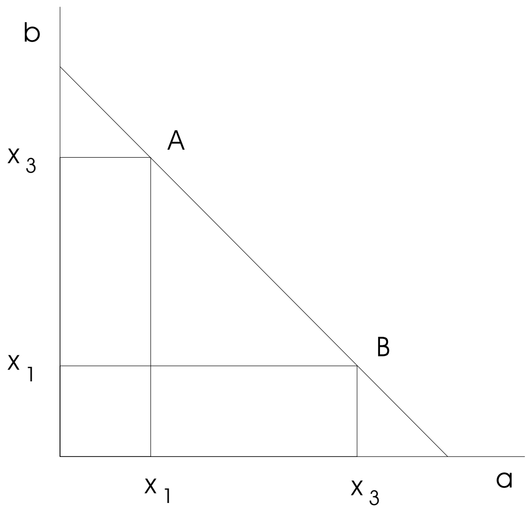
$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

kun $x_1, x_2, x_3 > 0$. Voidaan olettaa, että $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ sekä merkitä

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ ja } x_1 + x_3 = c.$$

Tällöin pätee, että $x_1 \leq \overline{x} \leq x_3$.

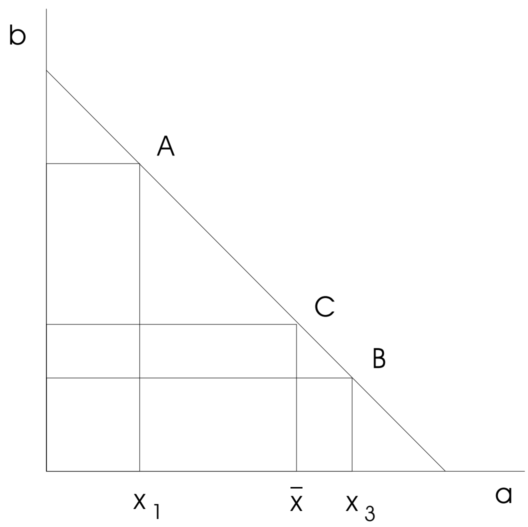
Yhtälö $a + b = c$, $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, esittää (a, b)-koordinaatiston I neljänneksessä sijaitsevaa janaa (kuva 1).



Kuva 1:

Pisteet $A = (x_1, x_3)$ ja $B = (x_3, x_1)$ ovat tämän janan pisteitä. Jos suorakulmion kaksi sivua sijaitsevat koordinaattiakseleilla a ja b sekä yksi kulma pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla, suorakulmion piirin pituus on $2c$. Jos valitaan suorakulmion kannaksi $\overline{x}$, niin suorakulmion korkeus on

$$c - \overline{x} = x_1 + x_3 - \overline{x}.$$



Kuva 2:

Tämän suorakulmion kärki C sijaitsee pisteiden A ja B välisellä janalla (katso kuva 2), ja suorakulmion pinta-ala on suurempi kuin x_1x_3. Sillä jos $C = A$ tai $C = B$, niin suorakulmion pinta-ala on täsmälleen x_1x_3. Lisäksi pidettäessä piirin pituus vakiona suorakulmion pinta-ala kasvaa, kun piste C lähestyy koordinaattiakselien väliin jäävän janan keskipistettä. Tämä tulos on epäyhtälö (1) tapauksessa $n = 2$, joka on todistettu kurssilla (Solmun lukijoille todistus on liitteessä 1). Pinta-aloja vertaamalla saadaan epäyhtälö

$$x_1x_3 \leq \overline{x}\,(x_1 + x_3 - \overline{x}) \tag{2}$$

ja yhtäsuuruus pätee, kun $x_1 = x_2 = x_3$.

Koska $x_2 > 0$, voidaan epäyhtälö (2) kertoa luvulla x_2. Tällöin saadaan

$$x_1x_2x_3 \leq \overline{x}x_2\,(x_1 + x_3 - \overline{x})\,. \tag{3}$$

Koska lisäksi

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

kaikilla $a, b > 0$, tai yhtäpitävästi $4ab \leq (a+b)^2$ kaikilla $a, b > 0$, niin merkitsemällä $a = x_2$ ja $b = x_1 + x_3 - \overline{x}$ saadaan epäyhtälö

$$4x_2\,(x_1 + x_3 - \overline{x}) \leq (x_2 + x_1 + x_3 - \overline{x})^2\,. \tag{4}$$

Koska

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

eli yhtäpitävästi $x_1 + x_2 + x_3 = 3\overline{x}$, niin epäyhtälöstä (4) seuraa, että

$$4x_2\left(x_1 + x_3 - \overline{x}\right) \leq \left(3\overline{x} - \overline{x}\right)^2$$

eli

$$4x_2\left(x_1 + x_3 - \overline{x}\right) \leq 4\overline{x}^2.$$

Jakamalla tämä epäyhtälö luvulla 4 saadaan

$$x_2\left(x_1 + x_3 - \overline{x}\right) \leq \overline{x}^2.$$

Siten epäyhtälön (3) perusteella pätee

$$x_1x_2x_3 \leq \overline{x}x_2\left(x_1 + x_3 - \overline{x}\right) \leq \overline{x} \ \cdot \ \overline{x}^2$$

eli

$$x_1x_2x_3 \leq \overline{x}^3.$$

Koska potenssifunktio on aidosti kasvava kun eksponentti on pariton, pätee epäyhtälö myös kantaluvuille:

$$\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

kun $x_1, x_2, x_3 > 0$, ja yhtäsuuruus pätee, kun $x_1 = x_2 = x_3$.
Tapaus $n = 3$ on nyt todistettu.

Suora todistus, yleinen tapaus $n = k$, matemaattinen induktio.

Tiedetään, että epäyhtälö (1) on voimassa arvoilla $n = 2$ ja $n = 3$. Oletetaan, että (1) on tosi, kun $n = k$, ja todistetaan, että (1) on tosi, kun $n = k + 1$.

Olkoon siis

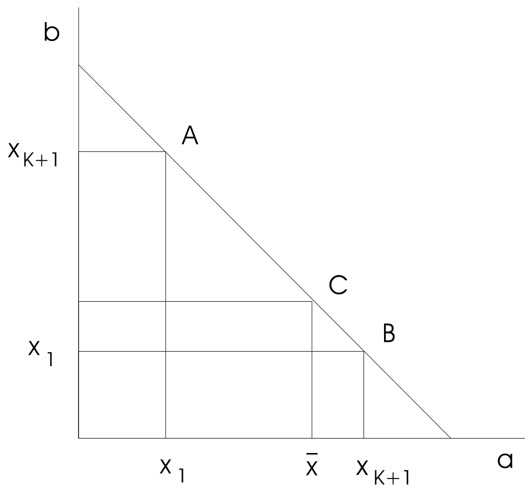
$$\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}, \tag{5}$$

missä $x_1, x_2, \ldots, x_k > 0$ sekä x_1 on pienin ja x_k suurin luku joukossa $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Jos joukkoon lisätään uusi luku, joukko voidaan aina järjestää niin, että joukon pienin luku on x_1 ja suurin luku x_{k+1}. Jos otetaan yksi luku pois joukosta, niin lukujen järjestys ei muutu. Sillä ei ole merkitystä, mikä luku joukosta poistetaan, joten poistetaan esimerkiksi luku x_k. Tällöin epäyhtälö

$$\sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_{k-1} x_{k+1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_{k+1}}{k}$$

on voimassa, sillä alussa oletettiin, että epäyhtälö (5) on tosi jokaisella joukolla, jossa on k positiivista lukua.

Tarkastellaan nyt lukujoukkoa $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$, joka on joukkojen $\{x_1, x_2, \ \ldots \ , x_k\}$ ja $\{x_1, x_2, \ \ldots \ , x_{k-1}, x_{k+1}\}$ yhdiste. Kuten tapauksessa $n = 3$ piirretään kaksi suorakulmiota, joiden piiri on $2\,(x_1 + x_{k+1})$ ja pinta-ala $x_1 x_{k+1}$ (kuva 3).



Kuva 3:

Lisäksi piirretään kolmas suorakulmio käyttämällä keskiarvoa

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}}{k+1}$$

suorakulmion kantana. Suorakulmion korkeus on tällöin

$$x_1 + x_{k+1} - \overline{x}.$$

Suorakulmion pinta-ala

$$\overline{x}\,(x_1 + x_{k+1} - \overline{x})\,,$$

on suurempi tai yhtäsuuri kuin kahden muun suorakulmion pinta-ala $x_1 x_{k+1}$. Käännetään epäyhtälö toisin päin:

(6) $$x_1 x_{k+1} \leq \overline{x}\,(x_1 + x_{k+1} - \overline{x})\,.$$

Kertomalla epäyhtälön (6) kumpikin puoli luvulla $x_2x_3\cdots x_k > 0$ saadaan

$$x_1x_2x_3\cdots x_kx_{k+1} \leq \overline{x}x_2x_3\cdots x_k\left(x_1+x_{k+1}-\overline{x}\right). \tag{7}$$

Epäyhtälö (5) pätee induktio-oletuksen mukaan jokaisella joukolla, jossa on k positiivista lukua, joten

$$x_2x_3\cdots x_k\left(x_1+x_{k+1}-\overline{x}\right) \leq \left(\frac{x_2+x_3+\cdots+x_k+x_1+x_{k+1}-\overline{x}}{k}\right)^k.$$

Koska

$$x_2+x_3+\cdots+x_k+x_1+x_{k+1} = (k+1)\overline{x},$$

niin

$$x_2x_3\cdots x_k\left(x_1+x_{k+1}-\overline{x}\right) \leq \left(\frac{(k+1)\overline{x}-\overline{x}}{k}\right)^k = \left(\frac{k\overline{x}}{k}\right)^k = \overline{x}^k.$$

Nyt epäyhtälö (7) voidaan kirjoittaa muotoon

$$x_1x_2x_3\cdots x_kx_{k+1} \leq \overline{x}\ \cdot\ \overline{x}^k = \overline{x}^{k+1}.$$

Kuten tapauksessa $n=3$ epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sqrt[k+1]{x_1x_2x_3\cdots x_kx_{k+1}} \leq \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}$$

ja yhtäsuuruus pätee, kun $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_k=x_{k+1}$.

Nyt on todistettu, että epäyhtälö (1) pätee tapauksessa $n=2$, tapauksessa $n=3$ (ei välttämätöntä todistaa) sekä jos (1) pätee tapauksessa $n=k$, niin se pätee myös tapauksessa $n=k+1$. Siten epäyhtälö (1) on voimassa kaikilla $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, ja yleinen tapaus on todistettu.

Liite 1: Tapaus $n = 2$.

Oletus:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Väitös:

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Todistus: Seuraavat epäyhtälöt ovat ekvivalentteja.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$$

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 x_2$$

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Koska alin epäyhtälö on aina tosi, ja yhtäsuuruus on voimassa vain kun $x_1 = x_2$, väite on tosi.