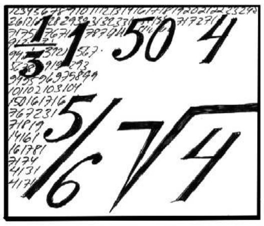

Eulerin kaavaa johtamassa

Timo Kiviluoto

Lukiossa kompleksilukuja käsitellään jonkin verran pitkän matematiikan syventävällä analyysin kurssilla, jolloin mainitaan myös *Eulerin kaavaksi* kutsuttu yhtälö $e^{yi} = \cos y + i \sin y$. Kaava perustellaan eksponenttifunktion, sinin ja kosinin sarjakehitelmien avulla, mikä on hyvä tapa, mutta sikäli epähavainnollinen, ettei näitä sarjakehitelmiä johdeta lukion kursseilla. Tässä artikkelissa esitänkin muutaman vaihtoehtoisen tavan perustella ensiksi Eulerin kaavan kaunis erityistapaus $e^{\pi i} = -1$ ja sen jälkeen itse yhtälö. Aivan perinpohjaiseen todistamiseen en pyri, vaan tarkoituksena on esittää muutama lähtöoletus kompleksisen eksponenttifunktion tai logaritmifunktion ominaisuuksista ja johtaa tulokset näistä. Differentiaali- ja integraalilaskennan kurssit sekä perustiedot kompleksiluvuista riittävät esitiedoiksi päättelyjen seuraamiseen.

Esimerkki 1: Integraalilaskentaa

Jo perustiedoilla funktion $f(x) = 4/(x^2 - 1)$ integroiminen onnistuu helposti. Haetaan funktiolle f osamurtokehitelmä, eli nimittäjä jaetaan tekijöihin ja f kirjoitetaan kahden helpommin integroitavan murtofunktion summana. Eräistä oppikirjoista voi löytyä tehtävänäkin (esim. [MSL, t. 70b]) johtaa tämänkaltaisille integroimispulmille yleinen sääntö

$$\text{(1)} \quad \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \ln k \left| \frac{x-a}{x-b} \right| \quad (k \in \mathbb{R}_+).$$

Seuraavaksi palautamme mieleen perusintegraalin

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c.$$

Herää kysymys, eikö nytkin voisi käyttää osamurtointegrointia. Ongelmana on vain se, ettei nimittäjä reaalialueella jakaannu tekijöihin. Kompleksialueella tilanne on kuitenkin toinen, sillä $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$. Pääsemme käyttämään kaavaa (1) esittämällä seuraavan oletuksen:

1.1. *Logaritmifunktiolla on kompleksinen vastine $f(z) = \ln z$, jolla on voimassa $Df(z) = 1/z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, jotka eivät ole negatiivisella reaaliakselilla.*

Lisäksi tietysti oletamme, että differentiaali- ja integraalilaskenta säilyttävät keskeiset ominaisuutensa myös kompleksifunktioita käsiteltäessä, kuten ne tekevätkin. Nyt kaava (1) säilyy voimassa, mutta k voi olla myös kompleksiluku. Myös itseisarvomerkintä häviää, sillä sen tarkoitus on pitää logaritmin parametri positiivisena reaalilukuna, mitä emme enää halua. Sijoitamme kaavaan (1) $a = -i$, $b = i$ ja saamme

$$\int \frac{dx}{(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2} i \ln k \left(\frac{x+i}{x-i} \right).$$

Vertaamalla tuloksen ja arkustangentin arvoja nollassa saamme k:n arvoksi -1, eli voimme kirjoittaa

$$\text{(2)} \qquad y = \arctan x = \frac{1}{2} i \ln \left(\frac{i+x}{i-x} \right),$$

jolloin x:n ollessa reaalinen y saa arvot välillä $]-\pi/2, \pi/2[$. Nyt huomaamme, että koska $\tan(\pi/4) = 1$, on $\pi = 4\arctan 1 = 2i\ln(-i)$. Tätä välivaihetta ei ole syytä sieventää potenssin logaritmisääntöön tukeutuen, sillä kyseinen sääntö ei yleisessä tapauksessa päde kompleksialueella. Sen avulla voisimme nimittäin päätellä virheellisesti, että $\ln(-1) = 0$, koska $2\ln(-1) = \ln 1 = 0$, kuten monet Euleria edeltäneet matematiikot luulivat [Bo, s. 630].

Sen sijaan teemme seuraavat lisäolettamukset:

1.2. *Eksponenttifunktiolla on yksikäsitteinen kompleksinen vastine $f(z) = e^z$, jolla on voimassa $f(\ln z) = z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joille $z \neq 0$.*

1.3. *Tämä funktio toteuttaa ehdon $f(x+y) = f(x)f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{C}$.*

Tällöin päädymme tulokseen $e^{-\pi i/2} = -i$, josta seuraa $e^{\pi i} = -1$. Näin olemme osoittaneet tämän mielenkiintoisen, matematiikan keskeiset luvut yhdistävän yhtälön. Seuraavaksi kysymme, voiko itse Eulerin kaavan johtaa yhtälöstä (2). Vastaus on kyllä, sillä käyttämällä oletusta 1.2 saamme muodon $e^{-2yi} = (i+x)/(i-x)$ ja edelleen oletuksen 1.3 avulla

$$e^{2yi} = \frac{(i-x)^2}{i^2 - x^2} = \frac{1 + 2ix - x^2}{1 + x^2}.$$

Koska $x = \tan(\arctan x) = \tan y$ ja $1 + \tan^2 y = 1/(\cos^2 y)$, saamme

$$\begin{aligned} e^{2yi} &= (\cos^2 y)\left(1 + 2i\frac{\sin y}{\cos y} - \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}\right) \\ &= \cos 2y + i\sin 2y, \end{aligned}$$

kun y on välillä $]-\pi/2, \pi/2[$, josta seuraa

$$e^{yi} = \cos y + i\sin y,$$

kun y on välillä $]-\pi, \pi[$. Jos y ei ole tällä välillä, voimme kirjoittaa $y = pq$, jossa p on kyseisellä välillä ja q on kokonaisluku. Tällöin saamme

$$e^{yi} = (e^{pi})^q = \cos pq + i\sin pq = \cos y + i\sin y.$$

Tässä käytimme de Moivren kaavaa $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, joka on helppo todistaa induktiolla. Näin olemme osoittaneet, että Eulerin kaava on voimassa kaikilla reaalisilla y:n arvoilla.

Esimerkki 2: Differentiaalilaskentaa

Tällä kertaa lähdemme seuraavista olettamuksista:

2.1. *Eksponenttifunktiolla on yksikäsitteinen kompleksinen vastine $f(z) = e^z$, jolla on voimassa $Df(z) = f(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.*

2.2. *Tämä funktio toteuttaa ehdon $f(x+y) = f(x)f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{C}$.*

Näin ollen voimme kirjoittaa

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} \ (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ratkaistaan e^{yi} kirjoittamalla se napakoordinaattimuotoon $e^{yi} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, missä $r = |e^{yi}|$. Tällöin r ja θ ovat y:n reaalisia funktioita. Derivoimme yhtälön puolittain y:n suhteen ja saamme

$$ie^{yi} = r'(\cos\theta + i\sin\theta) + ir\theta'(\cos\theta + i\sin\theta),$$

josta seuraa $r = -ir' + r\theta'$. Koska r:n on oltava ei-negatiivinen reaaliluku, r':n on oltava nolla kaikilla y:n arvoilla, joten r on vakio. Koska $|e^{0i}| = 1$, on $r = 1$ ja tällöin $\theta' = 1$, mistä seuraa $\theta = y + c$. Toisaalta $e^{0i} = 1 = \cos c + i\sin c$, mistä saamme $c = n2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$). Integroimisvakio osoittaa näin omalla tavallaan sen, että eksponenttifunktio on jaksollinen ja sen perusjakso on $2\pi i$. Päädymme tulokseen

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Näin olemme siis osoittaneet Eulerin kaavan sekä määritelleet kompleksisen eksponenttifunktion, jolla on sama derivoimissääntö kuin reaalisella vastineellaan. Lisäksi on tullut aimo joukko muita kiintoisia ominaisuuksia, kuten esimerkiksi se, että imaginaariosan y kulkiessa välillä $[0, 2\pi]$ funktio piirtää kompleksitasoon e^x-säteisen ympyrän. Ja aivan erikoisesti kun $x = 0$ ja $y = \pi$, funktio saa reaalisen arvon -1.

Esimerkki 3: Raja-arvotutkimusta

Tällä kertaa tutkimme tarkemmin logaritmifunktion raja-arvoesitystä. Differentiaalilaskennan kurssilta tiedämme, että

$$Da^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}.$$

Toisaalta, koska $Da^x = a^x \ln a$, tästä seuraa

$$\ln a = \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h},$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\ln z = \lim_{h\to\infty} h(\sqrt[h]{z} - 1). \tag{3}$$

Tämä muoto kiinnostaa meitä erityisesti, koska kompleksialueella juurenotto voidaan määritellä, kun h on kokonaisluku. Teemme oletuksen:

3.1. *Logaritmifunktiolla on kompleksinen vastine, jolla yhtälö (3) on voimassa kaikilla $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.*

Palautamme mieleen kompleksiluvun juurenoton (tarkemmin ks. esim. [Sa]). Olkoon $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, jolloin

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)\right), \tag{4}$$

missä k käy läpi arvot $0, 1, \ldots, n-1$ eli juuria on n eri kappaletta. Kuitenkin sinin ja kosinin jaksollisuuden vuoksi yhtälö (4) on voimassa myös millä tahansa muulla k:n kokonaislukuarvolla. Pidämme tämän mielessä ja kirjoitamme yhtälön (3) muotoon

$$\begin{aligned}\ln z = {} & \lim_{h\to\infty} h(\sqrt[h]{r} - 1) \\ & + \lim_{h\to\infty} \sqrt[h]{r} \lim_{h\to\infty} h\left(\cos\left(\frac{\theta}{h} + \frac{k2\pi}{h}\right)\right. \\ & \left. + i\sin\left(\frac{\theta}{h} + \frac{k2\pi}{h}\right) - 1\right).\end{aligned}$$

Laskemme raja-arvot erikseen. Ensinnäkin saamme

$$\lim_{h\to\infty} h(\sqrt[h]{r} - 1) = \ln r \text{ ja } \lim_{h\to\infty} \sqrt[h]{r} = 1.$$

Jäljelle jäävän raja-arvon käsittelemme kahdessa osassa. Jos $\theta + k2\pi \neq 0$, voimme sijoittaa $h = (\theta + k2\pi)/x$, jolloin löydämme yhtälöstä kaksi varsin tuttua raja-arvoa:

$$\lim_{x\to 0}(\theta + k2\pi)\left(\frac{\cos x - 1}{x} + i\frac{\sin x}{x}\right) = i(\theta + k2\pi).$$

Jos $\theta + k2\pi = 0$, emme voi tehdä sijoitusta, mutta huomaamme

$$\lim_{h\to\infty} h(\cos 0 + i\sin 0 - 1) = 0 = i(\theta + k2\pi).$$

Oletuksesta 3.1 seuraa siis suoraan

$$\ln z = \ln r + i(\theta + k2\pi),$$

missä k on kokonaisluku. Se, että saimme tulokseksi äärettömän monta eri logaritmin arvoa, johtuu tietysti eksponenttifunktion jaksollisuudesta. Jos haluamme toimituksesta yksiarvoisen, annamme k:lle arvoksi esimerkiksi nollan, jolloin saamme funktion, joka positiivisilla reaaliarvoilla vastaa reaalista logaritmia. Nyt kuitenkin pysyttelemme moniarvoisuudessa ja teemme jälleen oletukset 1.2 ja 1.3, jolloin saamme

$$z = re^{i(\theta + k2\pi)}.$$

Toisaalta $z = r(\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi))$, joten tästä seuraa suoraan

$$e^{yi} = \cos y + i\sin y,$$

eli jälleen kerran olemme johtaneet Eulerin kaavan oletuksistamme.

Lisätehtäviä:

1. Esimerkin 1 yhtälön (1) lisäksi myös eräitä muita integroimiskaavoja voi käyttää Eulerin kaavan perustelussa. Yksi näistä on yhtälö

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c, \tag{5}$$

jonka todistuskin on kelvollinen harjoitus (esim. [MSL, t. 70a]). Mihin syklometriseen funktioon liittyvä perusintegraali nyt tulee muistaa? Johda Eulerin kaava yhtälön (5) avulla käyttäen pohjana esimerkin 1 oletuksia.

2. Esimerkissä 1 johdettiin arkustangentin logaritmiesitys. Nyt kun tunnemme Eulerin kaavan, voidaanko myös tavalliset trigonometriset funktiot kuten sini, kosini ja tangentti esittää jossakin vastaavassa, ei-trigonometrisessä muodossa?

Kiitokset:

Kiitän professori *Jorma Merikoskea* ja lehtori *Markku Halmetojaa* kaikesta rakentavasta palautteesta, jota he antoivat käsikirjoitukseni.

Kirjallisuusviittaukset:

[Bo] C. Boyer, *Tieteiden kuningatar. Matematiikan historia, osat I–II.* Art House, 1994.

[MSL] J. Merikoski, T. Sankilampi ja T. Laurinolli: *Matematiikan Taito 8: Integraalilaskenta*, WSOY 2000.

[Sa] E. Saksman, *Kolmannen asteen yhtälöä ratkaisemassa. http://solmu.math.helsinki.fi/2000/2/*, 5–12.

Artikkelin kirjoittaja on Mäntän lukion toisen vuoden opiskelija. Hänelle voi lähettää sähköpostia osoitteeseen *sonor@phpoint.fi*.