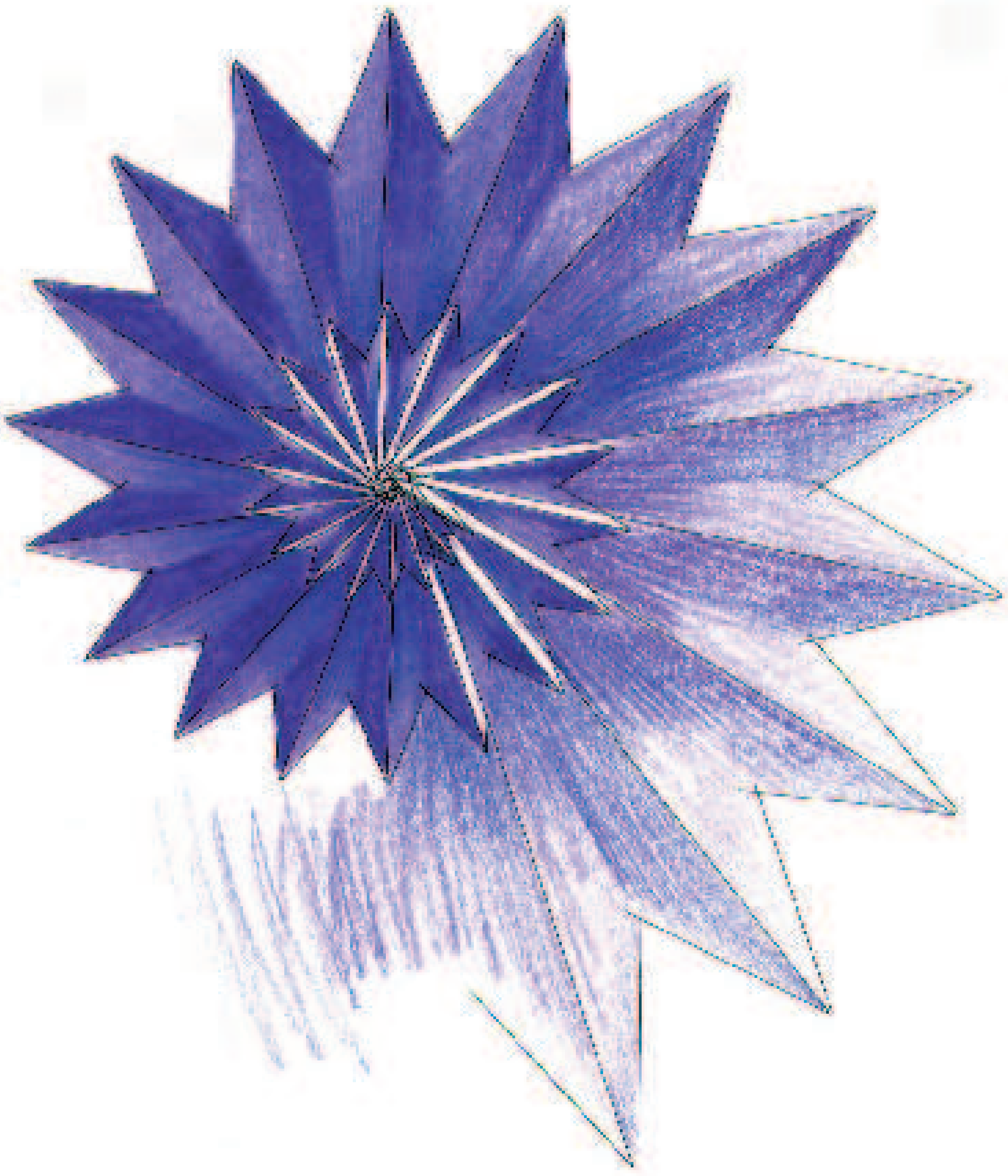
Solmu

Matematiikkalehti
1/2002

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 1/2002

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

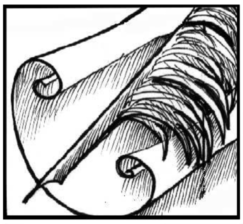
http://solmu.math.helsinki.fi/

Tämän vuoden numeroihin 2/2002 ja 3/2002 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään maaliskuun ja syyskuun loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan nykyisin vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys



Pääkirjoitus

”Deadline on kaikkien suoritusten äiti”, sanoi eräs tuttavani.

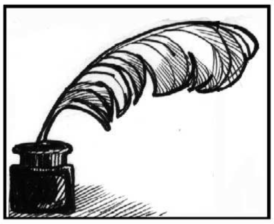
Koulumaailmassa yksi tällainen takaraja ovat ylioppilaskirjoitukset, joiden uudistamista pohditaan jälleen kerran. Nyt tarkoituksena näyttää olevan valinnaisuuden lisääminen niin, että ainoastaan äidinkieli jäisi pakolliseksi ja vähintään kolme kirjoitettavaa ainetta valittaisiin neljän aineen ryhmästä. Yhtenä osana tätä ryhmää olisi matematiikka.

Valinnaisuuden lisäämisellä on ainakin päältä katsoen tiettyjä hyviä puolia, ja ilmeisesti ehdotus saa kannatusta sekä lukiolaisten että opettajien taholta. Lehtitietojen mukaan matemaatikoillakaan ei pitäisi olla syytä huoleen, sillä niissä kouluissa, joissa ehdotusta on muutamien vuosien ajan kokeiltu käytännössä, on matematiikan suosio ylioppilaskokeessa jopa kasvanut. Lisäksi uudistus näyttäisi hieman kaventavan kielten ylivaltaa ylioppilaskirjoituksissa.

Matematiikan ylioppilaskokeen valinnaisuus on toki ollut mukana kuvioissa jo vuodesta 1996 lähtien. Vaikkei tällä ole ollut merkittävää vaikutusta kokeeseen osallistuneiden määrään, on kuitenkin pidettävä mielessä valinnaisesta matematiikan kokeesta saatujen arvosanojen alavireisyys. Tämän voi tietysti tulkita osoitukseksi kokelaiden strategisen ajattelun taidoista, mutta on selvää, että valmisteilla oleva aikaisempaa suurempi muutos on tehtävä harkitusti. Sekään ei vielä riitä, sillä tuloksia on seurattava tarkasti ja myös uskallettava tunnustaa niistä seuraavat, mahdollisesti ikävätkin johtopäätökset. Esimerkiksi valinnaisuuden lisäämisen v. 1996 odotettiin houkuttelevan lisää naisia matematiikan ylioppilaskokeeseen, mutta näin ei ole käynyt.

Kuten kaikissa aikaisemmissa ylioppilaskoetta koskevissa suunnitelmissa, näyttää suurimmaksi koetinkiveksi tälläkin kertaa muodostuvan toisen kotimaisen kielen koe. Uudistuksen läpimenon sitominen tähän ratkaisuun saattaa kaataa koko suunnitelman, mutta tässä vaiheessa on liian aikaista sanoa, olisiko tämä hyvä vai huono lopputulos.

Pekka Alestalo



Toimitussihteerin palsta

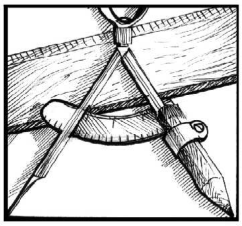
Solmuun on vuoden 2002 alusta kerätty yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöitä, jotka toimivat yhdyssiteenä lehden ja edustamiensa laitosten välillä. Tiedon on tarkoitus kulkea kumpaankin suuntaan. Yhteyshenkilöt informoivat laitostensa henkilökuntaa mahdollisuudesta kirjoittaa artikkeleita Solmuun tai ylipäätään Solmun olemassaolosta. Toisaalta yhteyshenkilöt voivat välittää terveisiä ja kirjoituksia Solmun toimitukseen, jolloin myös pääkaupunkiseudun ulkopuolelle sijoittuvat yliopistot ja korkeakoulut saavat äänensä kuuluviin Solmussa aikaisempaa paremmin.

Yhteyshenkilöjen yksi tehtävä on hankkia laitostensa vaikutuspiiriin kuuluvalta väeltä artikkeli Solmuun kerran vuodessa. Näin saadaan kirjoitusten näkökulmaa laajennettua ja monipuolistettua. Lisäksi Solmun lukijat voivat erinäisissä asioissaan ottaa oma-alotteisesti yhteyttä vaikkapa lähimmän yliopiston tai korkeakoulun yhteyshenkilöön. Käytännön on siis tarkoitus entisestään madaltaa kynnystä yhteydenpitoon Solmun ja lukijoiden välillä. Yhteyshenkilöiden sähköpostiosoitteet löytyvät sekä lehden infosivulta 2 että verkosta Toimituskunta-sivulta.

Uutuutena Solmun verkkoetusivulle *solmu.math.helsinki.fi* on lisätty haku, jonka avulla voi etsiä Solmusta artikkeleita ja muuta materiaalia hakusanojen perusteella. Aikaisemminhan verkkosivuilla on ollut vain aiheittain eritelty hakemisto, mutta ei mitään kehittyneempiä toimintoja hakea tietoa esimerkiksi jonkin käsitteen tai matemaatikon nimen perusteella. Nyt tämäkin on siis mahdollista.

Haku on varmasti kaikille hyvinkin tuttu toiminto, lähes kaikista verkkosivustoistahan se löytyy varsin samalla tavalla toimivana, mutta kertaan tässä perusperiaatteet. Hakusanat kirjoitetaan perusmuodossa niille varattuun kenttään ja sanojen väliin lisätään välilyönti. Kun kaikki yhteen hakuun tarkoitetut sanat on kirjoitettu, niin painetaan rivinvaihtonäppäintä. Tämän jälkeen haku etsii kyseisiä sanoja sisältäviä dokumentteja Solmusta ja listaa löydetyt sivut järjestyksessä hakusanojen ”osumistarkkuuden” perusteella – mitä enemmän annettuja hakusanoja sivu sisältää, sen parempi ”osuma”. Tämän jälkeen haun käyttäjän tulee enää valita listatuista dokumenteista ne, jotka parhaiten vastaavat etsinnän tarkoitusta.

Mika Koskenoja



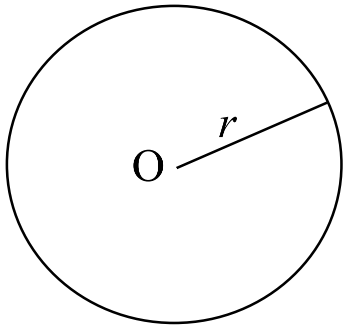
Onko ympyrä aina pyöreä?

Timo Tossavainen
Lehtori
Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

Varsin usein matemaattisen ongelman ratkaisun löytyminen on kiinni siitä, kykenemmekö mielemme silmin näkemään ongelmaan liittyvät käsitteet ja näiden väliset suhteet jonkinlaisena kuvana. Käytännössä pyrimme siis luomaan mielikuvituksemme avulla geometrisen mallin ongelmasta ja katselemalla tätä mallia yritämme löytää ratkaisun. Tällöin on ensisijaisen tärkeää kiinnittää huomiota siihen, miksi ja millä tavalla mallimme vastaa käsitteitä ja ennen kaikkea, voidaanko samoista käsitteistä laatia useita erinäköisiä malleja.

Jos meitä pyydetään ajattelemaan ympyrää tai piirtämään siitä paperille kuva, tuskinpa monellekaan tulee mieleen muuta kuin sellainen pyöreämuotoinen suljettu viiva, joka voidaan ainakin periaatteessa piirtää siten, että ensin kiinnitetään narunpätkän toiseen päähän kynä, pidetään narun toista päätä paikoillaan ja sitten pyöräytetään kireänä pidettyä narua kiinnitetyn pään ympäri. Tällaisessa tempussa oleellista on, että liikkuva kynänterä pysyy vakioetäisyyden päässä kiinnitetystä pisteestä eli piirtyvän ympyrän keskipisteestä.

Edellä kuvatussa tempussa narun rooli on toimia jonkinlaisena etäisyyden säätimenä, ja jos etäisyys todella pysyy vakiona pyöräytyksen ajan, syntyy kuvio, joka vastaa sitä, mitä sanalla ympyrä matematiikassa yleensä tarkoitetaan: O-keskinen ja r-säteinen ympyrä on tason niiden pisteiden ura, joiden etäisyys pisteestä O on tasan r.

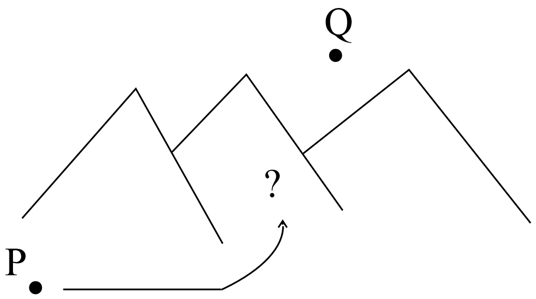


Tämä määritelmä tuntuu hyvin selkeältä ja yksikäsitteiseltä, mutta tarkka lukija voi huomata, että ainakin kahden asian kohdalla voidaan hieman spekuloida. Ensinnäkin, millainen pinta kelpaa piirtämistasoksi? Jos piirrämme narun ja kynän avulla ympyrän reikäiselle taivutetulle paperille tai vaikkapa puhalletun Mikki Hiiri -ilmapallon pinnalle, kuva ympyrästä voi olla erilainen kuin taivuttamattomalle ehjälle paperille piirretty kuva. Me emme kuitenkaan puutu tässä esityksessä kysymykseen piirtämistasosta, vaan ajattelemme tason olevan ehjän ja taivuttamattoman (hyvin ison) paperin kaltainen. Sen sijaan mietimme tarkemmin sitä, mitä pisteiden välisen etäisyyden mittaamisella oikein tarkoitetaan.

Pythagoraan lauseeseen perustuva laskukaava

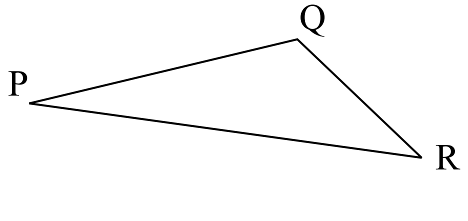
$$(1) \qquad d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

on luonnollinen valinta kahden koordinaattipisteen $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ välisen matkan mittaamiseen sellaisessa tasossa, jossa mikään liikkumisen suunta ei ole estetty tai hankampi kuin mikä tahansa muu suunta. Tätä mittaamistapaa vastaa luonnossa – ainakin lyhyehköillä matkoilla – ns. linnuntie. Kuitenkin meidän normaalisti maata pitkin liikkuvien olentojen yleinen kokemuksemme on, ettemme esimerkiksi suurkaupungin ruutukaava-alueella pysty liikkumaan kahden kohteen välillä mitä tahansa reittiä pitkin, vaan meidän on kuljettava toisiinsa nähden enemmän tai vähemmän samansuuntaisia tai kohtisuoria katuja pitkin. Tällöin herää kysymys mikä on oikea tai luonnollisin tapa mitata pisteiden välisiä etäisyyksiä tasoissa (tai yleisemmin avaruuksissa), joissa liikkumisen hankaluus on suuntariippuvaista.



Ennen kuin etsimme oikean laskukaavan ruutukaavatason pisteiden välisen etäisyyden laskemiseksi, on meidän parasta ensin pohtia mitä kunnolliselta etäisyyden mittaamiselta yleensä voi ja kannattaa vaatia. Eräs tällainen vaatimus on se, että käytetäänpä etäisyyden mittaamiseen mitä tahansa mittaria, matka mistään pisteestä itseensä ei saa olla muuta kuin nolla. Toisaalta on luontevaa odottaa, että kahden pisteen välinen etäisyys on aina positiivinen luku. Lisäksi kannattaa vaatia, että pisteiden välinen etäisyys on riippumaton siitä, mitataanko matka pisteestä P pisteeseen Q vai päinvastoin. Tietenkin myös se on toivottavaa, että tutkittavana olevan avaruuden jokaisen pisteparin välinen etäisyys saadaan yksikäsitteisellä tavalla mitatuksi.

Oikeastaan jokainen etäisyysmittari, joka toteuttaa edellä kuvatut vaatimukset, on käyttökelpoinen ainakin matematiikan maailmassa, mutta reaalimaailman kokemustemme pohjalta olemme kiinnostuneita erityisesti sellaisista etäisyysmittareista, jotka lisäksi toimivat siten, etteivät ne koskaan anna kahden pisteen väliseksi etäisyydeksi suoraan mitattuna suurempaa lukua kuin mutkan eli minkä tahansa kolmannen pisteen kautta mitattuna. Kutsumme tässä esityksessä tällaista etäisyysmittaria *kunnolliseksi*.



Voimme ilmaista myös matematiikan kielellä millainen objekti tason (tai yleisemmin avaruuden) kunnollinen etäisyysmittari on. Tason pisteparien joukolta positiivisille reaaliluvuille määritelty funktio δ on kunnollinen tason etäisyysmittari, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

(i) $\delta(P, Q) = 0$, jos ja vain jos $P = Q$,

(ii) $\delta(P, Q) \geq 0$ kaikilla P ja Q,

(iii) $\delta(P, Q) = \delta(Q, P)$ kaikilla P ja Q,

(iv) $\delta(P, R) \leq \delta(P, Q) + \delta(Q, R)$ kaikilla P, Q ja R.

Jokaista funktiota δ, joka toteuttaa ehdot (i)–(iv), sanotaan *metriikaksi*.

On helpohko laskutehtävä osoittaa, että kohdan (1) luonnollisen etäisyyden laskukaava toteuttaa metriikan vaatimukset. Mutta on olemassa myös muita funktioita, jotka toteuttavat samat vaatimukset. Esimerkiksi kaavan

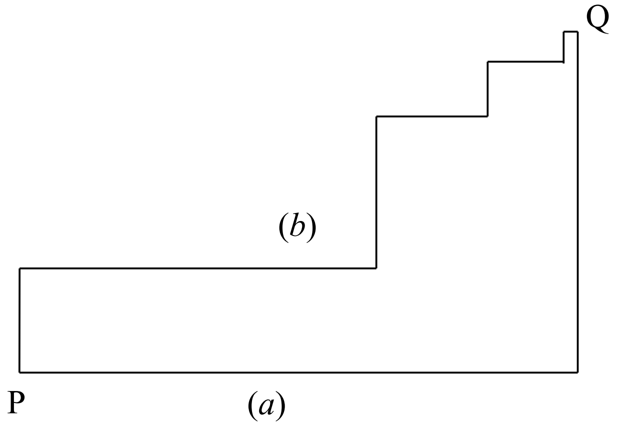
$$d_1(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \tag{2}$$

missä $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$, avulla tason pisteparien joukossa määritelty funktio d_1 toteuttaa nämä vaatimukset. Väite seuraa siitä, että reaalilukujen itseisarvolla on seuraavat ominaisuudet: $|a| = 0$, jos ja vain jos $a = 0$, ja muuten $|a| > 0$. Toisaalta, kaikilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ on $|a - b| = |b - a|$ ja

$$|a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|.$$

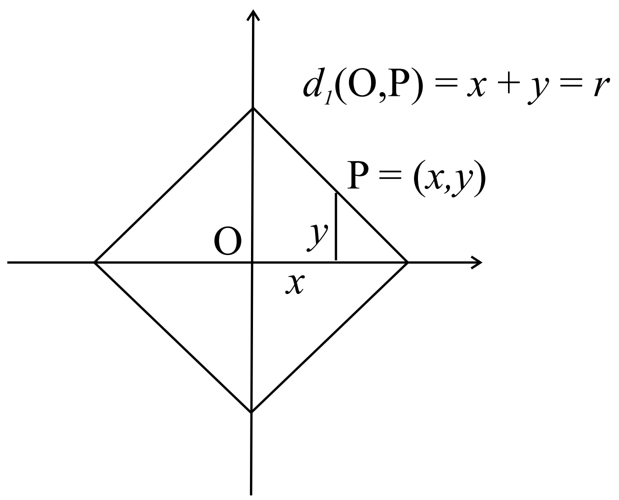
Jos katsomme tarkemmin kohdan (2) kaavaa, huomaamme, että d_1 ilmoittaa tason pisteiden välisen matkan pitkin koordinaattiakseleiden suuntaisia suoria. Tämä vastaa hyvin liikkumista ruutukaava-alueella, joten d_1 on luonnollinen etäisyysmittari ainakin Manhattanilla asuville. Itse asiassa tasoa varustettuna metriikalla d_1 sanotaankin usein *taksiautotasoksi*.

Taksiautotasolla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia, jotka erottavat sen tavallisesta koulugeometrian tasosta. Huomaamme, että jos pisteillä P ja Q molemmat koordinaatit eroavat toisistaan, lyhin reitti näiden kahden pisteen välillä ei olekaan enää yksikäsitteisellä tavalla määräytyvä. Seuraavaan kuvaan on piirretty kaksi mahdollista yhtä pitkää (lyhintä) reittiä (a) ja (b) taksiautotason pisteiden P ja Q välille.



Millaisia ovat ympyrät taksiautotasossa? Koska pisteiden välinen etäisyys mitataan pitkin koordinaattiakseleiden suuntaisia suoria, saadaan origokeskisen r-säteisen ympyrän kuvaksi salmiakkiruutu, jonka kärjet ovat pisteissä $(\pm r, 0)$ ja $(0, \pm r)$.

On siis mahdollista laatia kunnollisen etäisyysmittarin avulla myös sellaisia malleja, joissa ympyrät ovat kulmikkaita. Nokkela lukija keksii pian kuinka metriikkaa d_1 pitää muokata, jotta hän saisi toisen metriikan, jonka määräämät ympyrät näyttävät neliöiltä, joiden sivut ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset.



Tasoon voidaan määritellä myös epäjatkuva metriikka. Esimerkiksi tason pisteparien joukossa määritelty kuvaus d_0, jolle

$$d_0(P,Q) = \begin{cases} 0, & \text{jos ja vain jos } P = Q, \\ 1, & \text{jos } P \neq Q, \end{cases}$$

on metriikka. Nimittäin, d_0 selvästi toteuttaa metriikan ehdot (i)–(iii). Lisäksi ehto (iv) toteutuu, sillä jos $P = R$, niin

$$0 = d_0(P,R) \leq d_0(P,Q) + d_0(Q,R),$$

ja jos $P \neq R$, niin $Q \neq P$ tai $Q \neq R$ ja näin ollen

$$d_0(P,Q) + d_0(Q,R) \geq 1.$$

Jos käytämme metriikkaa d_0 etäisyysmittarina, niin mikä tahansa piste keskipisteenä piirretty 1-säteinen ympyrä peittää koko tason paitsi ei kyseisen ympyrän keskipistettä. Toisaalta, metriikalla d_0 varustetussa tasossa ei ole olemassa r-säteisiä ympyröitä, jos $r \neq 1$.

Tasoon voidaan määritellä äärettömän monta eri metriikkaa, sillä esimerkiksi kertomalla kaavan (1) juurilauseke jollakin vakiolla saadaan uusi funktio, joka on metriikka. Toisaalta tason kahden metriikan summafunktio on aina tason metriikka. Näin ollen on mahdollista laatia lukemattomia erilaisia malleja, joissa ympyrät voivat kuvioina poiketa toisistaan oleellisesti, vaikka jokaisessa mallissa ympyrän määritelmä sinänsä on sama.

Metriikkojen ja niiden avaruuksien, joissa voidaan määritellä erilaisia metriikkoja, tarkastelu kuuluu siihen matematiikan alaan, jota sanotaan topologiaksi. Matematiikan historiassa topologia on varsin uusi asia, sillä sen katsotaan saaneen alkunsa kuuluisasta Königsbergin siltaongelmasta, jonka Euler ratkaisi 1700-luvulla. Topologian alkeista on kirjoitettu joitakin hyviä oppikirjoja myös suomenkielellä.

Sivuhuomatus maailmankaikkeuden mittaamisesta

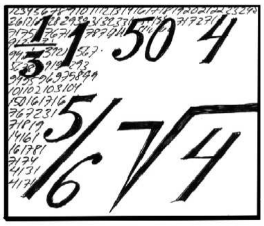
Jokaisen sukupolven edustajat lienevät pohtineet sitä, onko maailmankaikkeus ihan oikeasti äärellinen vai ääretön. Erilaisten metriikkojen tarkastelu voi johtaa meidät tässä kysymyksessä mielenkiintoisen (ainakin osittaisen) vastauksen äärelle.

Olkoon d tason luonnollisen metriikan vastine avaruudessa. Määritellään avaruuden pisteparien joukossa funktio d^* seuraavan kaavan avulla:

$$d^*(P,Q) = \frac{d(P,Q)}{1 + d(P,Q)}.$$

Välittömästi nähdään, että d^* toteuttaa metriikan vaatimuksista ainakin kohdat (i)–(iii). Pienehkön laskutehtävän jälkeen huomaamme, että d^* täyttää myös neljännen vaatimuksen. Erikoista tässä metriikassa kuitenkin on se, että sen arvot ovat aina nollan ja yhden väliltä.

On siis mahdollista mitata samaa avaruutta arvoiltaan sekä rajoittamattomilla että rajoitetuilla etäisyysmittareilla. Koska mittarit ovat ominaisuuksiltaan muuten samanlaisia, emme voi asettaa kumpaakaan mittaamistapaa sinänsä toista oikeammaksi. Näin ollen ei ole mielekästä ottaa ehdotonta kantaa siihen, onko maailmankaikkeutemme objektiivisesti pieni vai suuri ns. ulkopuolisen tarkkailijan silmin, sillä emme voi tietää, mittaako tämä hypoteettis-spekulatiivinen hahmo maailmaamme rajoitetulla vai rajoittamattomalla mittarilla.



Eulerin kaavaa johtamassa

Timo Kiviluoto

Lukiossa kompleksilukuja käsitellään jonkin verran pitkän matematiikan syventävällä analyysin kurssilla, jolloin mainitaan myös *Eulerin kaavaksi* kutsuttu yhtälö $e^{yi} = \cos y + i \sin y$. Kaava perustellaan eksponenttifunktion, sinin ja kosinin sarjakehitelmien avulla, mikä on hyvä tapa, mutta sikäli epähavainnollinen, ettei näitä sarjakehitelmiä johdeta lukion kursseilla. Tässä artikkelissa esitänkin muutaman vaihtoehtoisen tavan perustella ensiksi Eulerin kaavan kaunis erityistapaus $e^{\pi i} = -1$ ja sen jälkeen itse yhtälö. Aivan perinpohjaiseen todistamiseen en pyri, vaan tarkoituksena on esittää muutama lähtöoletus kompleksisen eksponenttifunktion tai logaritmifunktion ominaisuuksista ja johtaa tulokset näistä. Differentiaali- ja integraalilaskennan kurssit sekä perustiedot kompleksiluvuista riittävät esitiedoiksi päättelyjen seuraamiseen.

Esimerkki 1: Integraalilaskentaa

Jo perustiedoilla funktion $f(x) = 4/(x^2-1)$ integroiminen onnistuu helposti. Haetaan funktiolle f osamurtokehitelmä, eli nimittäjä jaetaan tekijöihin ja f kirjoitetaan kahden helpommin integroitavan murtofunktion summana. Eräistä oppikirjoista voi löytyä tehtävänäkin (esim. [MSL, t. 70b]) johtaa tämänkaltaisille integroimispulmille yleinen sääntö

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \ln k \left| \frac{x-a}{x-b} \right| \quad (k \in \mathbb{R}_+). \tag{1}$$

Seuraavaksi palautamme mieleen perusintegraalin

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c.$$

Herää kysymys, eikö nytkin voisi käyttää osamurtointegrointia. Ongelmana on vain se, ettei nimittäjä reaalialueella jakaannu tekijöihin. Kompleksialueella tilanne on kuitenkin toinen, sillä $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$. Pääsemme käyttämään kaavaa (1) esittämällä seuraavan oletuksen:

1.1. *Logaritmifunktiolla on kompleksinen vastine $f(z) = \ln z$, jolla on voimassa $Df(z) = 1/z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, jotka eivät ole negatiivisella reaaliakselilla.*

Lisäksi tietysti oletamme, että differentiaali- ja integraalilaskenta säilyttävät keskeiset ominaisuutensa myös kompleksifunktioita käsiteltäessä, kuten ne tekevätkin. Nyt kaava (1) säilyy voimassa, mutta k voi olla myös kompleksiluku. Myös itseisarvomerkintä häviää, sillä sen tarkoitus on pitää logaritmin parametri positiivisena reaalilukuna, mitä emme enää halua. Sijoitamme kaavaan (1) $a = -i$, $b = i$ ja saamme

$$\int \frac{dx}{(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2} i \ln k \left(\frac{x+i}{x-i} \right).$$

Vertaamalla tuloksen ja arkustangentin arvoja nollassa saamme k:n arvoksi -1, eli voimme kirjoittaa

$$y = \arctan x = \frac{1}{2} i \ln \left(\frac{i+x}{i-x} \right), \tag{2}$$

jolloin x:n ollessa reaalinen y saa arvot välillä $]-\pi/2,\pi/2[$. Nyt huomaamme, että koska $\tan(\pi/4)=1$, on $\pi = 4\arctan 1 = 2i\ln(-i)$. Tätä välivaihetta ei ole syytä sieventää potenssin logaritmisääntöön tukeutuen, sillä kyseinen sääntö ei yleisessä tapauksessa päde kompleksialueella. Sen avulla voisimme nimittäin päätellä virheellisesti, että $\ln(-1)=0$, koska $2\ln(-1)=\ln 1 = 0$, kuten monet Euleria edeltäneet matemaatikot luulivat [Bo, s. 630].

Sen sijaan teemme seuraavat lisäolettamukset:

1.2. *Eksponenttifunktiolla on yksikäsitteinen kompleksinen vastine $f(z)=e^z$, jolla on voimassa $f(\ln z)=z$ kaikilla $z\in\mathbb{C}$, joille $z\neq 0$.*

1.3. *Tämä funktio toteuttaa ehdon $f(x+y)=f(x)f(y)$ kaikilla $x,y\in\mathbb{C}$.*

Tällöin päädymme tulokseen $e^{-\pi i/2}=-i$, josta seuraa $e^{\pi i}=-1$. Näin olemme osoittaneet tämän mielenkiintoisen, matematiikan keskeiset luvut yhdistävän yhtälön. Seuraavaksi kysymme, voiko itse Eulerin kaavan johtaa yhtälöstä (2). Vastaus on kyllä, sillä käyttämällä oletusta 1.2 saamme muodon $e^{-2yi}=(i+x)/(i-x)$ ja edelleen oletuksen 1.3 avulla

$$e^{2yi}=\frac{(i-x)^2}{i^2-x^2}=\frac{1+2ix-x^2}{1+x^2}.$$

Koska $x=\tan(\arctan x)=\tan y$ ja $1+\tan^2 y = 1/(\cos^2 y)$, saamme

$$\begin{aligned} e^{2yi} &= (\cos^2 y)\left(1+2i\frac{\sin y}{\cos y}-\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}\right)\\ &= \cos 2y + i\sin 2y, \end{aligned}$$

kun y on välillä $]-\pi/2,\pi/2[$, josta seuraa

$$e^{yi}=\cos y + i\sin y,$$

kun y on välillä $]-\pi,\pi[$. Jos y ei ole tällä välillä, voimme kirjoittaa $y=pq$, jossa p on kyseisellä välillä ja q on kokonaisluku. Tällöin saamme

$$e^{yi}=(e^{pi})^q=\cos pq + i\sin pq = \cos y + i\sin y.$$

Tässä käytimme de Moivren kaavaa $(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, joka on helppo todistaa induktiolla. Näin olemme osoittaneet, että Eulerin kaava on voimassa kaikilla reaalisilla y:n arvoilla.

Esimerkki 2: Differentiaalilaskentaa

Tällä kertaa lähdemme seuraavista olettamuksista:

2.1. *Eksponenttifunktiolla on yksikäsitteinen kompleksinen vastine $f(z)=e^z$, jolla on voimassa $Df(z)=f(z)$ kaikilla $z\in\mathbb{C}$.*

2.2. *Tämä funktio toteuttaa ehdon $f(x+y)=f(x)f(y)$ kaikilla $x,y\in\mathbb{C}$.*

Näin ollen voimme kirjoittaa

$$e^z=e^{x+yi}=e^xe^{yi}\ (x,y\in\mathbb{R}).$$

Ratkaistaan e^{yi} kirjoittamalla se napakoordinaattimuotoon $e^{yi}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, missä $r=|e^{yi}|$. Tällöin r ja θ ovat y:n reaalisia funktioita. Derivoimme yhtälön puolittain y:n suhteen ja saamme

$$ie^{yi}=r'(\cos\theta+i\sin\theta)+ir\theta'(\cos\theta+i\sin\theta),$$

josta seuraa $r=-ir'+r\theta'$. Koska r:n on oltava ei-negatiivinen reaaliluku, r':n on oltava nolla kaikilla y:n arvoilla, joten r on vakio. Koska $|e^{0i}|=1$, on $r=1$ ja tällöin $\theta'=1$, mistä seuraa $\theta=y+c$. Toisaalta $e^{0i}=1=\cos c+i\sin c$, mistä saamme $c=n2\pi$ ($n\in\mathbb{Z}$). Integroimisvakio osoittaa näin omalla tavallaan sen, että eksponenttifunktio on jaksollinen ja sen perusjakso on $2\pi i$. Päädymme tulokseen

$$e^z=e^x(\cos y + i\sin y).$$

Näin olemme siis osoittaneet Eulerin kaavan sekä määritelleet kompleksisen eksponenttifunktion, jolla on sama derivoimissääntö kuin reaalisella vastineellaan. Lisäksi on tullut aimo joukko muita kiintoisia ominaisuuksia, kuten esimerkiksi se, että imaginaariosan y kulkiessa välillä $[0,2\pi]$ funktio piirtää kompleksitasoon e^x-säteisen ympyrän. Ja aivan erikoisesti kun $x=0$ ja $y=\pi$, funktio saa reaalisen arvon -1.

Esimerkki 3: Raja-arvotutkimusta

Tällä kertaa tutkimme tarkemmin logaritmifunktion raja-arvoesitystä. Differentiaalilaskennan kurssilta tiedämme, että

$$Da^x=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}.$$

Toisaalta, koska $Da^x=a^x\ln a$, tästä seuraa

$$\ln a=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h},$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\ln z=\lim_{h\to\infty}h(\sqrt[h]{z}-1). \tag{3}$$

Tämä muoto kiinnostaa meitä erityisesti, koska kompleksialueella juurenotto voidaan määritellä, kun h on kokonaisluku. Teemme oletuksen:

3.1. *Logaritmifunktiolla on kompleksinen vastine, jolla yhtälö (3) on voimassa kaikilla $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$.*

Palautamme mieleen kompleksiluvun juurenoton (tarkemmin ks. esim. [Sa]). Olkoon $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, jolloin

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)\right), \tag{4}$$

missä k käy läpi arvot $0, 1, \ldots, n-1$ eli juuria on n eri kappaletta. Kuitenkin sinin ja kosinin jaksollisuuden vuoksi yhtälö (4) on voimassa myös millä tahansa muulla k:n kokonaislukuarvolla. Pidämme tämän mielessä ja kirjoitamme yhtälön (3) muotoon

$$\begin{aligned}\ln z = &\lim_{h\to\infty} h(\sqrt[h]{r} - 1)\\ &+ \lim_{h\to\infty} \sqrt[h]{r} \lim_{h\to\infty} h\Bigg(\cos\left(\frac{\theta}{h} + \frac{k2\pi}{h}\right)\\ &+ i\sin\left(\frac{\theta}{h} + \frac{k2\pi}{h}\right) - 1\Bigg).\end{aligned}$$

Laskemme raja-arvot erikseen. Ensinnäkin saamme

$$\lim_{h\to\infty} h(\sqrt[h]{r} - 1) = \ln r \text{ ja } \lim_{h\to\infty} \sqrt[h]{r} = 1.$$

Jäljelle jäävän raja-arvon käsittelemme kahdessa osassa. Jos $\theta + k2\pi \neq 0$, voimme sijoittaa $h = (\theta + k2\pi)/x$, jolloin löydämme yhtälöstä kaksi varsin tuttua raja-arvoa:

$$\lim_{x\to 0}(\theta + k2\pi)\left(\frac{\cos x - 1}{x} + i\frac{\sin x}{x}\right) = i(\theta + k2\pi).$$

Jos $\theta + k2\pi = 0$, emme voi tehdä sijoitusta, mutta huomaamme

$$\lim_{h\to\infty} h(\cos 0 + i\sin 0 - 1) = 0 = i(\theta + k2\pi).$$

Oletuksesta 3.1 seuraa siis suoraan

$$\ln z = \ln r + i(\theta + k2\pi),$$

missä k on kokonaisluku. Se, että saimme tulokseksi äärettömän monta eri logaritmin arvoa, johtuu tietysti eksponenttifunktion jaksollisuudesta. Jos haluamme toimituksesta yksiarvoisen, annamme k:lle arvoksi esimerkiksi nollan, jolloin saamme funktion, joka positiivisilla reaaliarvoilla vastaa reaalista logaritmia. Nyt kuitenkin pysyttelemme moniarvoisuudessa ja teemme jälleen oletukset 1.2 ja 1.3, jolloin saamme

$$z = re^{i(\theta + k2\pi)}.$$

Toisaalta $z = r(\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi))$, joten tästä seuraa suoraan

$$e^{yi} = \cos y + i\sin y,$$

eli jälleen kerran olemme johtaneet Eulerin kaavan oletuksistamme.

Lisätehtäviä:

1. Esimerkin 1 yhtälön (1) lisäksi myös eräitä muita integroimiskaavoja voi käyttää Eulerin kaavan perustelussa. Yksi näistä on yhtälö

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c, \tag{5}$$

jonka todistuskin on kelvollinen harjoitus (esim. [MSL, t. 70a]). Mihin syklometriseen funktioon liittyvä perusintegraali nyt tulee muistaa? Johda Eulerin kaava yhtälön (5) avulla käyttäen pohjana esimerkin 1 oletuksia.

2. Esimerkissä 1 johdettiin arkustangentin logaritmiesitys. Nyt kun tunnemme Eulerin kaavan, voidaanko myös tavalliset trigonometriset funktiot kuten sini, kosini ja tangentti esittää jossakin vastaavassa, eitrigonometrisessä muodossa?

Kiitokset:

Kiitän professori *Jorma Merikoskea* ja lehtori *Markku Halmetojaa* kaikesta rakentavasta palautteesta, jota he antoivat käsikirjoituksestani.

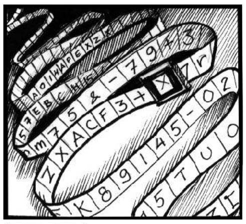
Kirjallisuusviittaukset:

[Bo] C. Boyer, *Tieteiden kuningatar. Matematiikan historia, osat I–II.* Art House, 1994.

[MSL] J. Merikoski, T. Sankilampi ja T. Laurinolli: *Matematiikan Taito 8: Integraalilaskenta*, WSOY 2000.

[Sa] E. Saksman, *Kolmannen asteen yhtälöä ratkaisemassa. http://solmu.math.helsinki.fi/2000/2/*, 5–12.

Artikkelin kirjoittaja on Mäntän lukion toisen vuoden opiskelija. Hänelle voi lähettää sähköpostia osoitteeseen *sonor@phpoint.fi*.



Matemaattisen tekstin kirjoittamisesta

Martti Nikunen
Laboratorioinsinööri
Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Aluksi

Matemaattisen tekstin saattaminen painokelpoiseen muotoon on aina ollut työlästä johtuen matemaattisissa kaavoissa käytetyistä erikoismerkeistä. Ennen tietokoneiden aikaa matemaattiset tekstit tehtiin painokuntoon käsinladonnalla tai erikoiskirjoituskoneilla. Henkilökohtaisten tietokoneiden mukana tulivat käyttöön tekstinkäsittelyohjelmat, joissa monissa on jonkinlainen kaavaeditori matematiikan kirjoittamiseen. Typografisesti korkeatasoisen matematiikan kirjoittamiseen eivät näiden editoreiden kyvyt kuitenkaan riitä.

Matemaattisen tekstinkäsittelyn standardiksi on muodostunut Donald Knuthin 1970-luvun loppupuolella luoma TeX. TeX ei ole tekstinkäsittelyohjelma, vaan ladontaohjelma, joka käsittelee tekstitiedostoja, joissa leipätekstin joukossa on tekstin muotoilua ohjaavia komentoja. TeX-ohjelmaa on myöhemmin laajennettu monilla ns. makropaketeilla, joista nykyään käytetyin on LaTeX.

Tyypillinen TeX-ohjelmisto, joita on saatavana erilaisille käyttöjärjestelmille, sisältää TeX- ja LaTeX-ohjelmat, esikatseluohjelman, tulostusohjelmia, makropaketteja, fontteja ja opastekstejä. Kaikki tässä jutussa lueteltavat ohjelmat ovat saatavissa Internetistä ilmaiseksi, ellei toisin mainita.

LaTeX soveltuu hyvin matematiikkaa sisältävien tekstien (artikkelit, esityskalvot ja kirjat) tuottamiseen. Siinä on mahdollista käyttää ristiviittauksia ja kaavojen, taulukoiden sekä otsikoiden automaattista numerointia. Myös kuvia on mahdollista liittää tekstin joukkoon ja tässä on EPS-muoto (Encapsulated PostScript) parhaiten tuettu. LaTeX-dokumentista voi myös tarvittaessa tuottaa verkkoversion HTML- tai PDF-muodossa (Portable Document Format).

Esimerkki

Seuraavassa on lyhyt LaTeX-esimerkkiteksti. Ensimmäisellä rivillä valitaan dokumentin tyyppi ja kirjasinkoko. Komennolla `\usepackage` voidaan ottaa käyttöön erilaisia makropaketteja, jotka tässä tapauksessa valitsevat käytettävän fontin sekä suomenkielen tavutuksen.

```
\documentclass[12pt]{article}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[finnish]{babel}
\begin{document}
\section{Muuan integraali}
Seuraavaa kaavaa ei ole aivan helppo
todistaa oikeaksi
\[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx
= \sqrt{\pi} \]
\end{document}
```

Jos edellä listattu teksti on tekstitiedostona `juttu.tex`, voidaan sen käsittelyyn käyttää komentoa (Unixin komentorivillä, Windowsin DOS-ikkunassa)

```
latex juttu
```

Tällöin syntyy tiedosto `juttu.dvi` (DVI = Device Independent), jota voi esikatsella ruudulla tai tulostaa paperille apuohjelmilla. Paperille tulostettuna tämä näyttäisi seuraavalta:

> **1 Muuan integraali**
>
> Seuraavaa kaavaa ei ole aivan helppo todistaa oikeaksi
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Unixin X-Window-ikkunointiympäristössä voi tulosta katsella ruudulla komennolla

```
xdvi juttu
```

Windowsin DOS-ikkunassa komentoa `xdvi` vastaava komento olisi `windvi` (fpTeX) tai `yap` (MikTeX).

Paperitulostuksessa parhaiten tuettuja ovat PostScript-kirjoittimet ja HP:n laserkirjoittimet. Em. esimerkkitiedosto voidaan tulostaa LaTeX-ajon jälkeen PostScript-muodossa tiedostoon `juttu.ps` komennolla

```
dvips -o juttu.ps juttu
```

Jos kirjoitin ei tue suoraan PostScript-muotoa, voidaan apuna käyttää GhostScript-ohjelmistoa *http://www.cs.wisc.edu/~ghost/*. Tätä voidaan käyttää myös muunnokseen PostScript-muodosta PDF-muotoon.

Toinen tapa tuottaa PDF-muotoisia LaTeX-dokumentteja on käyttää melko äskettäin kehitettyä TeXin laajennusta pdfTeX, joka tuottaa DVI-tiedostojen asemesta PDF-tiedostoja (komento `pdflatex`). Lähdetiedostoihin tarvitaan vain pieniä muutoksia tekstin alkuun. Tuettuja kuvaformaatteja ovat PNG, JPEG, TIFF ja PDF. Jos tekstiin halutaan liittää EPS-kuvia, ne tulee ensin muuntaa PDF-muotoon erillisellä apuohjelmalla epstopdf.

Mistä saa?

Internetissä TeX-materiaalia saa CTAN-arkistoista (CTAN = Comprehensive TeX Archive Network). Suomessa tällainen löytyy osoitteesta *ftp://ftp.funet.fi/pub/TeX/CTAN/*. TeXin käyttäjäyhdistyksen (TUG = TeX Users Group) kotisivulta *http://www.tug.org/* löytyy hyödyllisiä linkkejä.

Unix-ympäristössä parhaiten tuettu TeX-ohjelmisto on teTeX, joka tulee useimpien Linux-jakelupakettien mukana. Asennuspaketti tavallisimmille Unix-varianteille löytyy CTAN-alihakemistosta *systems/unix/teTeX/*.

Windows-maailmassa (95/98/ME/2000/XP) käytetyimmät ilmaisohjelmistot ovat MikTeX (*http://www.miktex.org/*) ja fpTeX (*http://www.fptex.org/*). Näistä fpTeX on yhteensopivampi teTeXin kanssa, mutta MikTeX on ensikertalaiselle helpompi asentaa. CTAN-alihakemistosta *systems/win32/* löytyy LaTeXin käyttöä helpottavia graafisia käyttöliittymiä, joista suosituin lienee WinEdt (shareware).

Macintoshille ei ole ilmaista TeX-ohjelmistoa, joka toimisi käyttöjärjestelmän vanhemmissa versiossa, mutta uudelle Mac OS X:lle löytyy teTeX ja siihen käyttöliittymä TeXShop. Macin TeX-linkkejä on osoitteessa *http://www.esm.psu.edu/mac-tex/default.html*. Muille käyttöjärjestelmille löytyy TeX-ohjelmistoja CTAN-alihakemistosta *systems/*.

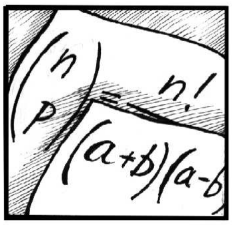
Kirjallisuutta

LaTeX ja AMS-LaTeX: opus asiatekstin ladonnasta (Käyttäjän opas n:o 43), Jyväskylän yliopiston atk-keskus. Antti-Juhani Kaijanahon kirjoittama kirja, www-sivu *http://www.cc.jyu.fi/latex-opas/*.

Suomenkielistä LaTeX-materiaalia Internetissä:
- Johdatus LaTeXiin, *http://www.hut.fi/atk/ohjelmistot/tex/latex.html*. Jukka Korpelan kirjoittama lyhyt ohje.
- Ohjeita LaTeXin käyttöön, *http://www.csc.fi/oppaat/latex/*. Juha Haatajan laatima artikkelikokoelma, jossa myös kirjallisuusviitteitä englanninkieliseen materiaaliin.
- Pitkänpuoleinen johdanto LaTeX2e:n käyttöön, CTAN-alihakemisto *info/lshort/finnish/*. Timo Hellgrenin suomentama ja muokkaama versio teoksesta The Not So Short Introduction to LaTeX2e (Tobias Oetiker).
- Lars Wirzeniuksen ja Antti-Juhani Kaijanahon LaTeXin käyttöä esittelevät tiedostot, CTAN-alihakemisto *info/finnish/texmalli/*.

TeX- ja LaTeX-kysymyksiä käsitellään suomenkielisessä uutisryhmässä `sfnet.atk.tex` ja kansainvälisessä ryhmässä `comp.text.tex`.

Tämä artikkeli on julkaistu lähes samassa muodossa Helsingin yliopiston atk-osaston *ATK – tietotekniikkaa yliopistolle* -tiedotuslehden numerossa 4/2001, ja se julkaistaan Solmussa ATK-lehden luvalla.



Solmun tehtäväpalsta on täällä taas!

Matti Lehtinen

Solmussa oli sen alkutaipaleella tapana julkaista matemaattisia ongelmia, sellaisia vähän vaativampia. Toimittaja toivoi saavansa lukijoiden ratkaisuja ja kannustimeksi lupasi julkaista näitä Solmussa, ratkaisijaa samalla kehuen. Toimittaja ei sortunut sisään virtaavan postin alle, sillä sitä tuli perin vähän. Tehtävien julkaiseminen lopetettiin. Mutta nyt ovat lukijat kertoneet, että tehtäviä pitäisi kuitenkin olla. Tässä niitä tulee. Mukavat lukijoiden ratkaisut pääsevät edelleen lehteen, ja ansiokkaita ratkaisijoita saatetaan muistaa pikku lahjuksinkin. Niin että töihin nyt, ja kun valmista tulee, niin paperille, kirjekuoreen ja osoitteeseen **Matti Lehtinen, Untuvaisentie 5 B 63, 00820 HELSINKI**. Sähköpostiakin voi yrittää käyttää, sehän on `matti.lehtinen@helsinki.fi`. Älä kuitenkaan panttaa ratkaisujasi loputtomiin, koska toimittajan ratkaisut julkaistaan seuraavassa Solmussa, ja silloinhan hommasta mielenkiinto vähenee.

Tehtävät

1. Luku $(\sqrt{50} + 7)^{2001}$ kehitetään desimaaliluvuksi. Määritä luvun 1. ja 2001. desimaali.

2. Kolmion sivujen pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja. Yksi kolmion keskijanoista on kohtisuorassa erästä kolmion kulmanpuolittajaa vastaan. Määritä kolmion sivujen pituudet.

3. Kuutio K on leikattu 99:ksi pienemmäksi kuutioksi. Näistä vain yhdellä särmän pituus ei ole 1. Määritä kuution K tilavuus.

4. Määritä suurin kokonaisluku d, joka on kaikkien lukujen $n(n+1)(2n+2002)$, missä n on positiivinen kokonaisluku, tekijä.

5. Montako alkiota on suurimmassa joukon $A = \{1, 2, \ldots, 547\}$ sellaisessa osajoukossa, jossa minkään kahden luvun summa ei ole jaollinen 42:lla?

6. Ympyrät, joiden säteet ovat h ja k, sivuavat suoraa ℓ pisteissä A ja B. Ympyrät leikkaavat toisensa pisteissä C ja D. Todista, että kolmioiden ABC ja ABD ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet ovat samat. Määritä tämä säde.

7. Olkoon positiivisten lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tulo 1. Osoita, että
$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

8. Seurueen jokaisen neljän jäsenen joukossa on yksi, joka on tuttu kyseisten kolmen muun jäsenen kanssa. Todista, että seurueessa on ainakin yksi jäsen, joka on tuttu seurueen kaikkien muiden jäsenten kanssa.

9. Varastossa on 2001 juustonpalaa. Todista, että on mahdollista leikata yksi paloista kahteen osaan niin, että palat voidaan kerätä kahteen säkkiin, joiden si-

sältö painaa yhtä paljon ja joissa on kummassakin yhtä monta palaa.

10. Kokonaislukukertoimisella n:nnen asteen ($n \geqslant 5$) polynomilla $P(x)$ on n eri kokonaislukunollakohtaa $0, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Määritä polynomin $P(P(x))$ kokonaislukunollakohdat.

11. Veljekset möivät n lammasta hintaan n euroa/lammas. Rahat jaettiin niin, että vanhempi veli otti ensin 10 euroa, sitten nuorempi otti 10 euroa jne., kunnes oli nuoremman veljen vuoro ottaa rahaa, jota ei kuitenkaan enää ollut kymmentä euroa. Tällöin sovittiin, että nuorempi veli saa loput rahat sekä vanhemman linkkuveitsen, ja jako menee tasan. Minkä arvoinen oli linkkuveitsi?

12. Reaaliluvut a ja b toteuttavat yhtälöt
$$a^3 - 3ab^2 = 20, \quad b^3 - 3a^2b = 40.$$
Määritä $a^2 + b^2$.

13. Olkoon
$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$
Osoita, että $a_n = 2 + a_{n-1}$ silloin ja vain silloin, kun n on alkuluku.

14. Todista, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n luku $2^n + n^2$ on jaollinen 5:llä silloin ja vain silloin, kuin luku $n^2 \cdot 2^n + 1$ on jaollinen 5:llä.

15. Määritä kaikki alkuluvut n, joiden kymmenjärjestelmäesitys on $n = 10101\ldots01$.

16. Määritä kymmenjärjestelmässä kirjoitetun luvun 2001^{2001} numeroiden summan numeroiden summan numeroiden summa.

17. Olkoon p kaikkien sellaisten funktioiden lukumäärä, jotka on määritelty joukossa $\{1, 2, \ldots, m\}$, m positiivinen kokonaisluku, ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, 35, 36\}$ ja olkoon q kaikkien sellaisten funktioiden lukumäärä, jotka on määritelty joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$, n positiivinen kokonaisluku, ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Määritä $|p - q|$:n pienin mahdollinen arvo.

18. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$ ei-positiivisia lukuja. Todista, että
$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{2001}} \leqslant 2000 + 2^{a_1+a_2+\cdots+a_{2001}}.$$

19. Neliön $ABCD$ sivun pituus on 1. Olkoon X mielivaltainen sivun AB ja Y mielivaltainen sivun CD piste ja olkoot M XD:n ja YA:n leikkauspiste ja N XC:n ja YB:n leikkauspiste. Määritä ne pisteet X ja Y, joille nelikulmion $XNYM$ ala on suurin mahdollinen.

20. Suunnikkaan $ABCD$ sivun AD keskipiste on E ja F on pisteen B kohtisuora projektio suoralla CE. Osoita, että ABF on tasakylkinen kolmio.

21. Pisteet A, B, C ja D ovat pallon pinnan eri pisteitä. Janat AB ja CD leikkaavat toisensa pisteessä F. Pisteet A, C ja F ovat yhtä etäällä pisteestä E. Osoita, että suorat BD ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

22. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä on Γ. Olkoon P piste Γ:n sisäpuolella. Olkoot X, Y ja Z ne pisteet, joissa suorat AP, BP ja CP myös leikkaavat Γ:n. Määritä ne pisteet P, joille XYZ on tasasivuinen kolmio.

23. n kiveä asetetaan yhdeksi tai useammaksi kasaksi. Mikä on eri kasoissa olevien kivien lukumäärien tulon suurin mahdollinen arvo?

24. Määritellään lukujonot (a_n) ja (b_n) seuraavasti: $a_1 = 9$, $b_1 = 3$, $a_{k+1} = 9^{a_k}$, $b_{k+1} = 3^{b_k}$, kun $k = 1, 2, \ldots$ Määritä pienin n, jolle $b_n > a_{2001}$.

25. Tasossa on annettuina 2000 pistettä. Osoita, että pisteet voidaan yhdistää pareittain 1000 janalla, jotka eivät leikkaa toisiaan.

26. Eräs tehdas tuottaa samankokoisia säännöllisiä tetraedreja. Tehdas maalaa tetraedrinsa neljällä värillä A, B, C ja D, kukin tahko omallaan. Montako erilaista tetraedria on mahdollista tuottaa?

27. Maalaiskoulussa on 20 lasta. Jokaisella kahdella lapsella on yhteinen isoisä. Todista, että eräällä isoisällä on ainakin 14 lastenlasta.

28. Toisessa koulussa oli 13 tyttöä ja 10 poikaa. Opettaja jakoi namusia. Kaikki tytöt saivat keskenään yhtä monta ja kaikki pojat keskenään yhtä monta. Kukaan ei jäänyt ilman. Osoittautui, että tapa, jolla opettaja jakoi namuset, oli ainoa tapa, joka täytti edellä kuvatut ehdot. Montako namusta opettajalla enintään oli?

29. Todista, että
$$\frac{1}{668} + \frac{1}{669} + \cdots + \frac{1}{2002} = 1 + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \\ + \frac{2}{5\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \frac{2}{2000\cdot 2001\cdot 2002}.$$

30. Olkoon $\mathbb{N}^*$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, joille $f(n+m) = f(n)f(m)$ kaikilla $m, n \in \mathbb{N}^*$ ja joille yhtälöllä $f(f(x)) = (f(x))^2$ on ainakin yksi ratkaisu $x \in \mathbb{N}^*$.

Matematiikasta ja sen menetelmistä

Euroopan matemaattisen seuran lehden kirjoituksesta *The Methodology of Mathematics*, Ronald Brown ja Timothy Porter (kesäkuu 2001 ja syyskuu 2001) lyhentäneet ja vapaasti kääntäneet

Marjatta Näätänen* ja *Matti Lehtinen
Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Kirjoitus perustuu esitelmään, jonka tarkoituksena on antaa opiskelijoille käsitys matematiikan pyrkimyksistä ja saavutuksista sekä näiden pohjalta herättää myös alan ansaitsemaa arvostusta ja ylpeyttäkin. Tarkoituksena on myös auttaa opiskelijoita selittämään näitä päämääriä ja saavutuksia ystävilleen ja sukulaisilleen.

Muutama peruskysymys matematiikoille

Toivomme matematiikkaa millä tahansa tasolla opettavia miettimään, missä määrin matemaatikon koulutukseen tulisi liittyä seuraavien kysymysten käsittelyä ja arviointia.

1. Onko matematiikka tärkeää? Jos se on, niin mille, missä yhteyksissä ja miksi.
2. Mikä on matematiikan luonne muihin oppialoihin verrattuna?
3. Mitkä ovat matematiikan tutkimuskohteet?
4. Mitkä ovat matematiikan menetelmät, miten se saa aikaan tuloksensa?
5. Tutkitaanko matematiikkaa? Jos, niin kuinka paljon? Mitkä ovat tutkimuksen yleiset tavoitteet? Mitkä ovat merkittävimmät saavutukset? Miten matematiikkaa tutkitaan?
6. Millaista on hyvä matematiikka?

Voidaan väittää, että jotkin näistä kysymyksistä eivät osu kohdalleen ja että matemaatikon ei ole tarpeen tällaisia pohtia. Näitä väitteitä vastaan puolustaudumme *Albert Einsteinin* sanoilla vuodelta 1916:

”Kun käännyn tieteen puoleen ilman jotain pinnallista syytä kuten rahan ansaitseminen tai kunnianhimo, ja myöskin ilman (tai ei ainakaan yksinomaan) pelin antaman mielihyvän, aivourheilun ilojen takia, silloin seuraavien kysymysten täytyy kiinnostaa minua tutkijana palavasti: Mihin päämäärään pyrkii tiede, jonka harjoittamiselle omistaudun? Kuinka ’oikeita’ ovat sen tulokset? Mikä on olennaista ja mikä vain satunnaisen kehityksen tulosta?

... Käsitteet, jotka ovat osoittautuneet hyödyllisiksi asioiden järjestämisessä saavat helposti niin suuren auktoriteetin, että unohdamme niiden maallisen alkuperän ja hyväksymme ne annettuina tosiasioina, ’a priori tilanteina’ jne. Tieteen edistyksen tie tulee usein pitkiksi ajanjaksoiksi tukittua sellaisten virheiden takia. Siksi ei ole turhaa touhua käyttää kykyämme tuttujen käsitteiden analysointiin ja tuoda esiin ehdot, joista näiden käsitteiden oikeutus ja hyödyllisyys riippuu, ja miten nämä vähä vähältä kehittyivät..."

Ihmisen erottaa eläimestä kyky miettiä omaa toimintaansa ja tämä kyky vaikuttaa positiivisesti suureen osaan ihmisen toimintaa. Tähän mietiskelyyn kuuluu arvojen arviointi, jälleen – tietämämme mukaan – vain ihmiselle ominainen kyky. Miettiminen lisää yleensä toiminnan tehokkuutta, voimme analysoida, mikä on oleellista, mikä tärkeää, ja miten toiminta voidaan suorittaa ilman tavallisimpia virheitä. Siispä meidän tulisi miettiä myös matemaattista toimintaa. Voimme myös pohtia näitä kysymyksiä ja käyttää vertilukohtana taidekasvatuksen näkökohtia. Olemme kuulleet väitettävän, että taidekasvatus on huomattavasti edellä tiedekasvatuksesta, koska se herättää oppilaiden kiinnostusta ja itsenäisyyttä. Vertaillaanpa siis taide- ja tiedekasvatusta.

Päämääriksi voidaan taiteen ja muotoilun kurssilla asettaa:

1. Opettaa hyvän suunnittelun periaatteet.
2. Rohkaista itsenäisyyttä ja luovuutta.
3. Antaa oppilaille valikoima käytännön taitoja, jotta he voivat käyttää hyvän suunnittelun periaatteita työssään.

Eikö matematiikan kurssin päämääriksi voisi ottaa näitä, vaihtamalla suunnittelu matematiikaksi?

Seuraava lainaus on *T. Dantzigin* kirjasta:

"Tämä on kirja matematiikasta: se käsittelee symboleja ja muotoja sekä ideoita, jotka ovat symbolien ja muotojen takana. Kirjoittajan mielestä nykyinen koulukurssi riisuu matematiikan sen kulttuuriyhteydestä ja jättää vain teknisten yksityiskohtien luurangon. Tämä on monille lahjakkaille mielille vastenmielistä. Kirjan tarkoitus on tuoda takaisin kulttuuriyhteys ja esittää matematiikan kehitys sinä perin inhimillisenä tarinana, mikä se on."

Mikä on matematiikan merkitys?

Yleensä ei huomata, miten suurta osaa matematiikka näyttelee jokapäiväisessä elämässämme. Osa tätä matematiikkaa on tietenkin varsin vanhaa: näemme joka päivä numeroita, graafeja, yhteen- ja kertolaskua. On helppoa unohtaa, että näiden keksiminen oli aikanaan suuri edistysaskel. Roomalaisten numeroiden korvaaminen arabialaisilla teki kunnon kirjanpidon mahdolliseksi ja tämän väitetään olleen syy Venetsian vaurauteen 14. vuosisadalla. On myös syytä huomata tarkkuuden merkitys matematiikassa. Ydinasia arabialaisessa systeemissä on luvun nolla käyttö. Ensi silmäyksellä tuntuu järjettömältä laskea tyhjässä laatikossa olevien esineiden lukumäärää. On yllättävää, kuinka tärkeää tämä on kunnolliselle laskusysteemille, jossa lukua 0 käytetään paikan merkkinä. Nollan käsitteen puuttuminen esti matematiikan edistyksen vuosisatojen ajan.

Korkeammalla tasolla taas emme olisi saaneet nähdä Voyager II:n kauniita kuvia planeetta Jupiterista ilman virheitä korjaavia koodeja. Tämä matematiikka on monin tavoin olennaista myös telekommunikaatiolle, tietokoneille ja erityisesti CD-soittimille. Ilman kryptografian matematiikkaa ei nykyinen miljardien dollareiden elektroninen finanssiliikenne olisi mahdollista kautta maapallon. Kategoriateoriaa, matemaattisten struktuurien teoriaa, käytetään nyt antamaan uutta näkemystä seuraavan sukupolven ohjelmistojen suunnitteluun käyttäen tulevaisuuden logiikkaa ja algebroita.

Matematiikan valtavat sovellukset insinööritieteisiin, tilastotieteeseen ja fysiikkaan tunnetaan yleisesti. Alkuräjähdyksen ja peruspartikkelien teoriat eivät olisi mahdollisia ilman matematiikkaa. Kuvitellaan, että matematiikan roolin ottavat tulevaisuudessa supertietokoneet. Tällöin ei useinkaan huomata, että nämä supertietokoneet ovat matemaattisen ja käsitteellisen formuloinnin palvelijoita: elektroniikka tekee laskut ihmeen nopeasti ja tarkasti. Esimerkiksi kehon skannerit ovat sovellus ja realisointi 19. vuosisadan matematiikasta. Tämä ilmaisee, kuinka rekonstruoida kiinteä, tiheydeltään vaihteleva objekti, kun sitä voidaan katsella röntgensäteillä; kun ainoa mittaustulos on intensiteetin muutos säteiden kulkiessa kehon läpi useista eri suunnista.

Mikä on matematiikan luonne?

Tämä on mysteeri. Nobelinpalkinnon saanut *E. Wigner* kirjoitti kuuluisan esseen *Matematiikan käsittämätön tehokkuus luonnontieteissä.* Meille avainsana on "käsittämätön". Hän puhuu siitä yllätyksestä, minkä matematiikan käyttö aiheuttaa pystymällä ennustamaan koetuloksiin sopien aina yhdeksän merkitsevän numeron tarkkuudella. Miten tällainen ällistyttävä tarkkuus on mahdollista? Tässä on joitain lainauksia artikkelista:

"... matematiikan ääretön hyödyllisyys fysikaalisissa tieteissä on jotain melkein mystistä, eikä sille ole rationaalista selitystä. Matematiikka on taidokkaiden operaatioiden tiede, missä käsitteet ja säännöt keksitään vain tätä tarkoitusta varten" (tarkoitus on taidokkuus...)

"Päätarkoitus on käsitteiden keksiminen. Ajatuksen syvyys, jolla matematiikan käsitteet muodostetaan, saa myöhemmin oikeutuksensa siitä taidosta, jolla näitä käsitteitä käytetään. Väite, että luonnon lait on kirjoitettu matematiikan kielellä esitettiin kunnolla kolmesataa vuotta sitten (se luetaan *Galileon* väitteeksi), nyt se on todempi kuin koskaan ennen.

... Einstein sanoi, että olemme valmiita hyväksymään ainoastaan kauniit fysiikan teoriat. Voidaan väittää, että matematiikan käsitteet, jotka perustuvat niin paljolle älylle, ovat laadultaan kauniita."

Jos matemaatikolta kysyy, miksi opiskella matematiikkaa, hän voisi vastata: Matematiikka on mallien ja rakenteiden tutkimista sekä niiden avulla loogista analysointia ja laskemista. Yrityksessämme ymmärtää maailmaa ja säilyäksemme elossa tarvitsemme abstraktin rakenteiden tieteen, metodin tietää, mikä on totta ja mikä on mielenkiintoista näille rakenteille. Matematiikka on siis loppujen lopuksi välttämätöntä ja perustaa kaikille muille luonnontieteille ja tekniikalle.

Toinen syy on näiden uusien mallien ja rakenteiden ihmettely ja mielenlumo, hämmästyttävät yhteydet, jotka tutkimuksemme on löytänyt. Matematiikka tuo myös nöyryyttä, me tiedämme, miten vaikeaa on todistaa edes yhtä pientä näennäisen helppoa väitettä. Tunnemme matemaattisen totuuden rajoitukset, ei voida todistaa kaikkea, mikä on totta, kuten *Gödel* osoitti. Matemaatikko ei väitä, että lopullinen ratkaisu, kaiken selvittävä yhtenäisteoria on tulossa. Paremminkin etsimme yllätyksiä, jotka esittävät maailman uudesta näkökulmasta. Kokemus antaa aihetta uskoa, että näitä tulee. Matemaatikolle maailma ei ole vain oudompi kuin kuvittelemmekaan, vaan oudompi kuin edes pystyt nyt kuvittelemaan. Tätä outoutta tutkimme.

Mitä matematiikka tutkii?

Tätä on jo vähän käsitelty. Matematiikkka ei tutki objekteja, vaan niiden välisiä suhteita. Matematiikalla on myös kielen luonne. Matematiikan ja sen sovellusten historia osoittaa, että juuri matematiikan kieli, menetelmät ja käsitteet tuovat sille kestävän arvon ja jokapäiväisen käytön. Joitain tärkeitä käsitteitä, joille matematiikka on antanut täsmällisyyden, ovat: luku, pituus, pinta-ala, tilavuus, muutosnopeus, satunnaisuus, laskennallisuus, symmetria, liike, voima, energia, kaarevuus, avaruus, jatkuvuus, äärettömyys, deduktiivinen päättely. *Alexander Grothendieckin* sanoin uuden matemaattisen teorian luomisessa on usein ongelmana "tuoda uusia käsitteitä pimeydestä". Nämä uudet käsitteet, jotka tekevät vaikeasta helpomman, osoittavat meille oikean tien edetä. Vielä tärkeämpi on matematiikan tapa käsitellä ja määritellä käsitteitä yhdistelemällä niitä matemaaattisiksi rakenteiksi. Nämä rakenteet, mallit, näyttävät käsitteiden välisiä suhteita ja niiden rakenteellista käyttäytymistä. Kuten sanottua, matematiikka tutkii abstrakteja malleja ja struktuureita.

Mitkä ovat matematiikan menetelmät?

Kysymystä käsitellään harvoin. Tunnetaan toki Paul Erdösin kommentti, jonka mukaan matematiikka on menetelmä, jolla kahvi muutetaan teoreemoiksi, mutta tämä ei varmaan juuri valaise asiaa ulkopuolisille. Katsotaan siis, mitä *P. David* ja *R. Hersh* sanovat asiasta kirjoissaan *The Mathematical Experience* ja *Descartes' Dream*. Edellisen kirjan luku *Inner Issues* ottaa esiin seuraavia teemoja:

Symbolit

Symbolien käyttö ja yhdistely on yksi matematiikan tunnuspiirteitä. Se on yksi niistä tekijöistä, jotka saavat suuren yleisön suhtautumaan matematiikkaan torjuvasti. Monet sanovat, että he ymmärsivät kyllä matematiikkaa, kunnes vastaan tulivat x ja y. Symbolien käsittely tiettyjen sääntöjen puitteissa on yhä tärkeä osa matematiikan käytännön taitoa. On ihmisiä, jotka tahtovat oppia (esimerkiksi) taloustiedettä, mutta jotka eivät osaa päätellä, että jos $x+2=4$, niin $x=2$. Tällaiset puutteet tekevät taloustieteen käsitteiden ymmärtämisen kovin vaikeaksi.

Sangen monimutkaisia relaatioita voi ilmaista symbolisesti tavalla, joka on hyvin vaikeaa muuttaa sanalliseksi. Tämä symbolien taloudellisuus lisääntyy jatkuvasti, kun symboleja ruvetaan käyttämään yhä mutkikkaampien käsitteiden merkkeinä ja samalla symbolien käsittelysääntöjä pidetään itse käsitteitä koskevien sääntöjen malleina.

Hiukan liioitellen on sanottu, että matematiikan historia on merkintöjen kehittymisen historiaa. Tämä heijastaa käsityskyvyn rajallisuutta. Tarvitsemme ajattelumme avuksi ja johdatukseksi tukipisteitä ja vertauskuvia.

Jotkin matemaattiset symbolit ovat jo itsessään vertauskuvia. Tällaisia ovat esimerkiksi $/$, $<$, $\rightarrow$ ja $\int$. Joihinkin toisiin on liittynyt voimakkaita assosiaatioita, joiden ansiosta nekin käyvät metaforista. Symbolien avulla voi ilmaista asioita taloudellisesti ja täsmällisesti, kuten *A.N. Whitehead* aikanaan huomautti. Jonkin tietyn symbolin käyttötapa saattaa kuitenkin muuttua ajan myötä, sitä mukaa kuin matemaatikot tottuvat uusiin merkintöihin ja omaksuvat ne käyttöönsä.

Joissain tapauksissa matemaatikkojen laiskuuden synnyttämä merkintä on voinut johtaa uusiin teorioihin. Esimerkiksi tyyppiä $(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n; \ldots; a_{m1}x_1 +$

$\cdots + a_{mn}x_n$) olevat merkinnät lyhentyivät aikojen kuluessa muotoon $\mathbf{A}x$, ja matriisilaskenta syntyi tarpeesta luoda tämän merkinnän korrektin käsittelyn säännöt.

Abstraktius

Tämä on matematiikan olennainen piirre. Myös se on omiaan tekemään matematiikasta suurelle yleisölle käsittämätöntä.

Matemaattiset rakenteet ovat abstrakteja. Niiden määrittely perustuu rakenteiden itsensä sisällä vallitseviin relaatioihin. Ne eivät ole aistein havaittavia. Abstraktisuuden edut ovat ainakin kolminaiset:

- Abstrakti teoria kokoaa yhteen monia yksittäistapauksia koskevan tietomme ja tekee siten helpommaksi ymmärtää tapauksien yhteiset piirteet. Usean teorian sijasta tarvitaan vain yksi. Kokoaminen hyödyntää analogioita, ei itse tapausten välillä vaan asioiden kesken vallitsevien relaatioiden ja vaikutussuhteiden välillä. Nämä analogiat tekevät monia yksittäistietoja korvaavasta abstraktista teoriasta matematiikan tärkeän metodin.

- Sen jälkeen kun teoria on saatu käyttöön, saatetaan havaita, että se sopii vielä uusiinkin yksittäistapauksiin. Tämä havainto johtaa huudahduksen "tuostahan tulee mieleeni, että..." ilmaisemaan jännitykseen ja iloon. Onhan siis niin, että uuden ongelman ratkaisun sisältävä valmis teoria on otettavissa käyttöön vain kirjan sivuja kääntämällä.

- Abstrakti teoria antaa mahdollisuuden yksinkertaisempiin todistuksiin. Tämä on hämmästyttävää, mutta yleensä totta. Abstrakti teoria tekee mahdolliseksi keskittyä olennaisuuksiin. On mielenkiintoista tietää, pitääkö jokin väittämä paikkaansa yleisessä tilanteessa vaiko vain tietyssä erikoistapauksessa. Abstraktissa teoriassa poistuvat merkityksettömät näkökohdat.

Yleistäminen ja laajentaminen

Tällä on yhtymäkohtia abstraktiuteen, mutta yleensä kyse on hiukan eri asiasta. Pythagoraan teoreema yleistää kolmikon (3, 4, 5) määrittämän suorakulmaisen kolmion. Fermat'n suuri lause, jonka mukaan yhtälöllä $x^n + y^n = z^n$ ei ole positiivisia kokonaislukuratkaisuja (x, y, z), jos $n > 2$, on saman kolmikon ominaisuuden laajennus. Tämän laajennuksen todisti *Andrew Wiles*.

Todistaminen

Ankara todistamisen vaatimus on matematiikalle tunnusomainen piirre. Siksi matematiikka on niin olennaista tekniikassa, turvallisuudessa, fysiikassa jne.

Todistuksen, kelpaavuuden käsite matematiikassa liittyy yleiseen kysymykseen siitä, mikä on kelvollista, validia, milläkin tutkimuksen alueella. Kaikilla tutkimusaloilla, niin yhteiskuntatieteillä, taloustieteellä, kemialla, biologialla, kasvatustieteellä, oikeustieteellä kuin kirjallisuustieteelläkin on oma kelvollisuuden käsityksensä. On mielenkiintoista tarkastella kelvollisuuden eroja ja käyttöä.

Siitä, mikä on hyväksyttävissä kelvolliseksi argumentoinniksi matematiikassa, keskustellaan ja väitellään yhä. Keskustelunaihetta ovat antaneet ylipitkät todistukset (esimerkiksi äärellisten ryhmien luokittelun 15 000 sivua) ja tietokoneiden käyttö visualisoinnissa, kokeilussa ja laskemisessa.

Matemaattisten käsitteiden olemassaolo

On sanottu, että matematiikan opettamisen päätehtävä on osoittaa matemaattisten käsitteiden todellisuus. Mitä tämä todellisuus on? Millä tavoin nämä käsitteet ovat olemassa? Esimerkiksi *John Robinsonin* veistos *Eternity* (katso *http://www.cpm.informatics.bangor.ac.uk/sculmath/wake.htm*) on symbolinen kuvanveistos, mutta samalla matemaattisen säiekimpun konstruktio.

Matematiikan todellisuutta ovat pohtineet monet matematiikan filosofian harrastajat, mutta kiinnostus heidän sanomaansa näyttää olevan laimenemassa. Kysymys jonkin matemaattisen struktuurin olemassaolosta on ehkä samanlainen kuin kysymys siitä, onko šakkipeli olemassa. Se ei selvästikään ole olemassa samalla tavoin kuin tuolit ja pöydät ovat olemassa, mutta kuitenkin sillä on vaikutusta monen elämään. Ja se läpäisee myös rahatestin. (Siis kysymyksen, voiko sillä ansaita rahaa. Voi, ainakin jos on maailmanmestari tai šakkivälineiden valmistaja.)

Se, että matemaattiset käsitteet ja menetelmät ovat prosessien kaltaisia, näkyy siitäkin, että lihastoiminnan ja rytmin muisti on tärkeä puoli matemaattista työtä. Suuri osa matematiikkaa käsittelee toistuvien prosessien vaikutuksen ymmärtämistä ja realisointia.

Matemaatikot ovat eteviä ymmärtämään ja kuvittelemaan asioiden liikkumista. Termit siirtyvät yhtälön puolelta toiselle, asetelmat ja kuviot muuntuvat avaruudessa. Matemaatikot elehtivät käsillään selvittääkseen, mitä on tapahtumassa. Käsitteet ja ideat, joista matemaatikot puhuvat, ovat toisinaan ikään kuin tällaisten muistettujen prosessien ketjuja. Toisaalta, kun nämä ideat ilmaistaan kirjoittaen, tyyli on usein karua ja lyhyttä, ja tämä tekee käsitteiden ja ideoiden käytön ja soveltamisen oppimisen vaikeaksi. Mutta jokaisen on myös mahdollista muodostaa itselleen sopivin tulkinta ja sisäistää asiat omalla tavallaan.

Äärettömyys

Äärettömyyden kesyttäminen, mielikuvituksen laajentaminen niin, että se sisältää myös äärettömät operaatiot, on yksi matematiikan riemuja ja myös yksi sen skandaaleja. Ovatko nämä äärettömät objektit todellisia? Hämmästyttävää on, että näiden äärettömien, ehkä olemassa olemattomien objektien avulla voidaan todistaa äärellisiä ja todellisia asioita. Tämä on jälleen yksi puoli matematiikan mystillisyyttä. Ajatellaanpa esimerkiksi, että näiden äärettömien prosessien avulla todistetaan ydinreaktorin tai lentokoneen laskeutumisjärjestelmän turvallisuus. Kuinka uskottava tällainen todistus on? Nämä ovat aitoja kysymyksiä.

Tutkitaanko matematiikkaa?

Asiasta voi käytännössä vakuuttua tarkastelemalla *Mathematical reviews* -julkaisun kehitystä vuodesta 1940, jolloin se alkoi ilmestyä. Tämä kuukausijulkaisu sisältää matemaattisten tutkimusartikkelien lyhennelmiä. Karkeasti ottaen viisisivuisesta artikkelista kirjoitetaan pari kappaletta. Julkaisun sivumäärä on sen ilmestymisaikana yksitoistakertaistunut. Joka kuukausi julkaistaan noin 400 suurta sivua matematiikan tutkimusten referaatteja. Elämme todella matematiikan kultakautta, niin määrän kuin laadunkin puolesta.

Matematiikan tutkimuksen tavoitteet ovat moninaiset. Yksi on saada lisää tietoa jo hyvin määritellyistä ja olemassa olevista struktuureista. Toinen on ottaa selvää uusista struktuureista, sitä mukaa kuin sellaisia tulee esiin ja ne todetaan tärkeiksi. Uusia struktuurien välisiä relaatioita löytyy. On tarve yksinkertaistaa, löytää struktuureja, jotka selittävät ja auttavat ymmärtämään, miksi tietyt struktuurit käyttäytyvät tietyllä tavalla verrattuna joihinkin toisiin.

Tulokkaan ja suuren yleisön on vaikea ymmärtää, miten matemaattista tutkimusta tehdään. Annamme muutamia osviittoja esittämällä neljä eri tapaa tutkia matematiikkaa. Tapoja on varmasti paljon enemmän, ja yksittäinen tutkija joutuu loppujen lopuksi itse luomaan menestymisensä strategian. On myös vaikea sanoa, paljonko matematiikasta olisi tiedettävä, ennen kuin voi alkaa sitä tutkia. Kuuluisa vastaus tähän on ”kaikki tai ei mitään”.

Menetelmä 1. Sovella tunnettua menetelmää tunnetun tyyppiseen ongelmaan

Tämä menetelmä muodostaa luultavasti ainakin osan jokaisesta onnistuneesta matematiikan tutkimushankkeesta. Sillä on kaikki mahdollisuudet onnistua, jos vain tutkija on kyllin taitava tunnetun menetelmän käyttäjä. Matematiikan tutkimuksen tärkeimpiä keinoja on todellakin ongelman palauttaminen joksikin jo ratkaistuksi ongelmaksi. Jos alkuperäinen ongelma on liian vaikea, niin käypä strategia on yksinkertaistaa sitä niin, että siitä tulee tunnetun ongelman kaltainen, ja käsitellä sitten ne erityisongelmat, joiden ansiosta alkuperäinen ongelma on tuore. Yleinen käsitys on, että vain helpot asiat ovat tehtävissä. On siis muunnettava ongelma helpoksi. Jos et tiedä, mitä tekisit, tee ilmeiset asiat ensin.

Jos kehittyy taitavaksi vakiomenetelmien käyttäjäksi, voi eräänä päivänä huomata, että taidot sopivat myös ongelmaan, jota kukaan ei vielä ole pohtinut. Näin saattaa johtua uusiin ja tärkeisiin tuloksiin. Matemaatikon koulutuksesta suuri osa on hänen valitsemallaan alalla tehtävän työn kannalta käyvän taidon ja tiedon hankkimista.

Menetelmä 2. Käy tiedon rajoilla olevan kuuluisan ongelman kimppuun

Tämä strategia tarkoittaa tiedon huippua edustavan kuuluisan ongelman ratkaisun yrittämistä. Hyvä puoli on, että onnistuminen tekee kuuluisaksi. Vaikeampaa on ennustaa onnistumista. Luultavasti aivan uudet ideat ovat tarpeen.

Tämä tuntuu menetelmältä, jonka kunnianhimoinen nuori valitsee. Mutta, niin kuin *Stanislaw Ulam* mainitsi toiselle kirjoittajista 1964, vaikka menetelmä vetoaa kunnianhimoiseen nuoreen, siihen pitäytyminen saattaa estää häntä kehittymästä juuri sellaiseksi matemaatikoksi, johon hänellä persoonallisten ominaisuuksiensa pohjalta olisi parhaat edellytykset. Ongelma on jonkun toisen ongelma.

Tavallisempaa on toki yrittää ratkaista vähäisempiä tietämyksen raja-alueen ongelmia, sellaisia, joita ei vielä ole kovin paljon yritetty ja joissa onnistumisen todennäköisyys näin ollen on suurempi. Melko varmaan on opiskeltava, jotta saisi selville, mitä on jo tehty, minkälaisia tekniikoita on käytettävissä ja mitkä niistä on hallittava.

Voi olla hyödyllistä tutkia ongelmia, joiden ratkeamisen kriteerit ovat selviä: on kysymys, johon voi vastata vain *kyllä* tai *ei*. Tällöin toisaalta epäonnistumisellakin on ilmeinen kriteerinsä samoin kuin sillä, onko ongelma liian helppo vai ei. Matemaatikolla on hyvä olla suunnitelmansa myös sen varalle, että hänen ongelmansa tuottaa liian vähän tai liian paljon menestystä.

Menetelmä 3. Sovita yhteen eri alojen tietoa

Tässä menetelmässä opiskellaan erilaisten matematiikan alojenperusteita ja löydetään niiden välisiä yhteyksiä. Näin ikään kuin täytetään huippujen välisiä aukkoja samaan aikaan, kun "huippututkijat" puuhailevat huippujen korottamisen parissa. Menetelmän etuja on se, että siinä saa oppia eri aloista, ja hyödyllisellä tavalla, kun pyrkimyksenä on kääntää toisen alan tietoa toisen kielelle. Menetelmä sopii väitöskirjatutkimuksiin. Työn ohjaaja saattaa nähdä yhteydet käymättä läpi yksityiskohtia. Tällainen työ on myös hyödyllistä matematiikan yhtenäisyyden kannalta. Etua on myös siitä, että tutkija tottuu todistamaan pieniä, mutta hyödyllisiä tuloksia, sellaisia, jotka täyttävät aukkoja ja luovat kuvaa siitä, miten asiat ovat.

Menetelmä 4. Retki pimeään

Tutkijalla on jonkinlainen aavistus siitä, millaista matematiikkaa pitäisi olla olemassa. On myös joitakin vihjeitä niistä aineksista, joista tämä matematiikka voitaisiin rakentaa. Ongelmana on, että kunnollinen matematiikka tarvitsee määritelmiä, esimerkkejä, apulauseita, lauseita, todistuksia, laskelmia eikä alussa ole näistä mitään, joten ne on koottava työn edetessä. Missä järjestyksessä tulisi edetä, ja onko tulos tärkeää matematiikkaa? Tätä ei voi juuri arvioida, ennen kuin teoria on luotu, eikä teoria koskaan synny täydellisenä niin kuin Afrodite-jumalatar meren vaahdosta. Teoria kasvaa vuosien matkassa, ja tarvitaan sisua ja uskoa tutkimuksen merkitykseen, jotta jaksaisi teoriansa kanssa tuon matkan kulkea.

On sanottu, että tutkimuksessa menestymisen salaisuus on kyky sopeutua epäonnistumisiin. Ellei koskaan epäonnistu, on luultavaa, että on tullut ryhtyneeksi liian helppoihin ongelmiin. Mielenkiintoiseen tutkimukseen kuuluu aina riskin aineksia. Tarvitaan strategioita tilanteisiin, joissa mennään pieleen. Ongelma on ollut liian vaikea tai liian helppo. Mitä seuraavaksi? Tulevien tutkimusten kannalta on opettavaa analysoida epäonnistumisen syitä ja verrata näitä syitä niihin syihin, joiden perusteella alun alkaen halusi käsitellä juuri kyseistä ongelmaa.

Mikä on hyvää matematiikkaa?

Emme yritä antaa tähän kysymykseen lopullista vastausta. Jokainen voi kuitenkin pyrkiä muodostaa käsityksen joistakin hyvältä matematiikalta odotettavista piirteistä. Matemaattisten julkaisujen toimittajina joudumme päivittäin tekemään päätöksiä, jotka koskevat matemaattisen työn laatua. Kun saamme uuden käsikirjoituksen, teemme seuraavia kysymyksiä: Ovatko tulokset uusia? Kuinka paljon ne tuovat uutta jo julkaistuihin tuloksiin verrattuina? Onko artikkeli hyvin ja selvästi kirjoitettu? Tuntevatko kirjoittajat alalla tehdyn työn ja suhteuttavatko he tuloksensa siihen? Miten yllättäviä tulokset ovat? Kuinka elegantteja ovat käytetyt menetelmät? Onko kehitetty uusia menetelmiä?

"Parhaaseen" matematiikkaan kuuluvat työt, jotka tuovat esiin uusia sellaisia uusia ideoita ja käsitteitä, jotka tekevät aikaisemmin vaikeina pidetyistä asioista helppoja. Tämä on ristiriidassa sen käsityksen kanssa, jonka mukaan matematiikka on tarkoitettu vaikeaksi, ja että juuri sen vaikeus on hyvää tekevää, kuten kylmä suihku. Päin vastoin, hyvä matematiikka voi olla (ja ehkä sen jopa pitäisi olla) helppoa. Juuri siksi emme osaa tehdä sitä. Yllättävään lopputulokseen johtava ilmeisen yksinkertaisten päätelmien yhdistäminen, ehkä lisättynä jollakin odottamattomalla käänteellä, miellyttää meitä eniten.

On huolestuttavaa, että moni nuori matemaatikko käy läpi opintonsa ilman että joutuu ollenkaan miettimään sitä, mikä on hyvää matematiikkaa. Mutta kaiken inhimillisen toiminnan kohdalla on aina kysyttävä sen niin yhteiskunnalle kuin yksilöllekin. On esitetty käsitys, että minkä hyvänsä aineen opettamisessa tulisi heijastua jotain kyseisen alan ammattilaisten arvoista. Ammattilaiselle ei riitä vain vastauksen tuottaminen, on myös tärkeää tuottaa, jos vain mahdollista tyydyttävä selitys sille, miksi vastaus on se mikä on.

Onko matematiikalla tulevaisuutta?

On väitetty, että ei enää löydy uutta perusmatematiikkaa. Tätä käsitystä voi verrata niiden mielipiteeseen, jotka sanovat, että fysiikka on valmis, että peruskysymykset on ratkaistu. Meidän käsityksemme on, että matematiikassa on tapahtumassa vallankumous – hiljainen vallankumous, mutta kuitenkin vallankumous. Tämä tapahtuu kahdella rintamalla.

On ensinnäkin *laskennan vallankumous*. Numeerisen laskemisen ja graafisen esityksen osalta tämä vallankumous on kaikkien tuntema. Vähemmän yleisesti tunnettua on, että on olemassa tietokoneohjelmia, jotka pystyvät käsittelemään symboleja ja aksioomia ja ohjelmia, jotka pystyvät suorittamaan automaattista päättelyä. Tämän tulisi periaatteessa antaa matemaatikoille kyky laskea ja päätellä miljoonakertaisesti sen mitä nykyään, ja käsitellä nykyisin toivottoman monimutkaisina pidettyjä rakenteita. Tämän kyvyn merkitystä matematiikan opetuksen kannalta ei ole vielä kylliksi ymmärretty ja arvioitu, vaikka paljoin työtä onkin tekeillä. Tehostuneen laskennan vaikutus tutkimukseen on ollut merkittävää, ja sen merkitys luultavasti kasvaa.

Hienovaraisempi vallankumous on *käsitteellinen vallankumous*. Matematiikan korostunut ymmärtäminen struktuurien tutkimuksena on saamassa oman matematisointinsa kategoriateoriassa, struktuurien matemaattisessa ja algebrallisessa tutkimisessa. Kategoriateoria on paljastanut uusia lähestymismahdollisuuksia matematiikan perusteisiin kuten logiikkaan ja joukkooppiin. Se on nostanut arvoon ajatuksen, jonka mukaan matematiikalle ei tarvitsekaan löytää yhtä perustusta, niin kuin aikaisemmin ajateltiin, vaan vaihtoehtoisia ympäristöjä ja kehyksen, jossa niitä voidaan verrata. Nämä ajatukset ovat tärkeitä myös tietojenkäsittelytieteessä, esimerkiksi osoittaessaan uusia lähestymistapoja tietorakenteiden analysointiin.

Vaaroja edessä

Yksi matematiikan miellyttäviä piirteitä on tapa , jolla se voi toimia eri tasoilla, jotka sitten ovat vuorovaikutuksessa keskenään. Näin esimerkiksi matemaattisten rakenteiden algebrallinen tutkimus on itsessään johtanut uusiin rakenteisiin. Joillakin näistä struktuureista on ollut merkittäviä sovelluksia matematiikassa ja fysiikassa.

Matematiikkaa uhkaavat yhä monet vaarat. Vallitsee yleinen matemaatikkojen aikaansaannosten ja matematiikan tärkeyden aliarvostus. Siihen ovat osaksi syypäitä matemaatikot itse, koska he eivät ole onnistuneet määrittelemään ja selittämään tieteensä kokonaisuutta opiskelijoilleen, yleisölle, valtiovallalle tai elinkeinoelämälle. On mahdollista, että opiskelija valmistuu matematiikasta hyvin arvosanoin ilman mitään tietoa matematiikan tutkimuksesta.

Toinen vaara on tietokonetta kohtaan tunnettava yhä kasvava luottamus. Tietokone koetaan mustaksi laatikoksi, joka kertoo vastauksen, ilman että kysyjällä on mitään käsitystä asiaan liittyvistä prosesseista tai edes niistä käsitteistä, joita on tarkoitus manipuloida. Sekä tietokoneen mahdollisuudet että sen rajoitteet jäävät ottamatta huomioon, tarvittava matematiikka laiminlyödään tai jätetään luomatta, ja tietokonetta käytetään tavoin, jotka ovat virheellisiä tai vain ohjelmiston rajoittamia. Kerrotaan, että teknillisestä suunnittelusta poistetaan matemaattinen asiantuntemus ja se korvataan ohjelmistopakettien käyttäjillä. Turvataanko näin tuotteen turvallisuus ja luotettavuus, ja kyetäänkö hyödyntämään parhaita matemaattisia menetelmiä?

Jotta tällaisilta vaaroilta vältyttäisiin, on olennaisen tärkeää, että alussa esittämiimme kysymyksille osoitetaan lisääntyvää huomiota ja ymmärrystä. On ehkä olemassa keinoja, joilla matemaatikon käsitteellinen ennakointi saataisiin nopeammin muuttumaan luonnontieteen tai tekniikan sovellukseksi. Jotta niitä löytyisi, yhteiskunnassa tarvitaan matemaatikon työn ja matematiikan yhteiskunnallisen merkityksen todellista ymmärtämistä. Meidän tämän rakastamamme tieteen piirissä toimivien vastuulla on löytää tie tämän ymmärryksen kehittymiseen.

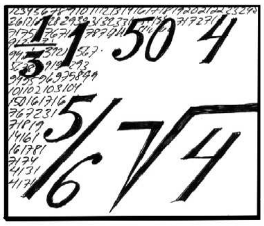
Kirjallisuus

T. Danzig, *Number: the Language of Science*, 1930, 2nd ed. 1954, Macmillan.

P. Davis ja R. Hersh: *The Mathematical Experience*. Penguin 1981.

P. Davis ja R. Hersh: *Descartes' Dream*. Penguin, 1988.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Wiegner.html



Yksi plus yksi on kaksi vai onko?

Suvi Karvonen
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto

Ala-asteella minulle kerrottiin, että $1 + 1 = 2$. Minulle kerrottiin myös, että $2 - 1 = 1$ ja että $4 + 4 = 8$ ja niin edelleen. Opin menestyksekkäästi soveltamaan näitä laskutoimituksia käytännön elämässä ja tiesin, että jos pikkuveljellä oli kaksi karkkia ja minulla yksi, niin jossain oli vikaa.

Lukio-opettajani kertoi minulle, että *mitä* on peruskoululaisten kysymys – lukiolainen kysyy *miksi*. Pikku hiljaa opinkin esittämään tuon kysymyksen, mutta valitettavasti siihen hyvin harvoin osattiin vastata tyydyttävästi. Niin vain on, siinä kaikki.

Tulin yliopistoon etsimään vastauksia. Kävin kiltisti luennoilla ja tein tunnollisesti harjoitustehtäviä. Ja sain hyviä arvosanoja. Kurssi toisensa perään vierähti ja lopulta valmistuin filosofian maisteriksi pääaineena matematiikka.

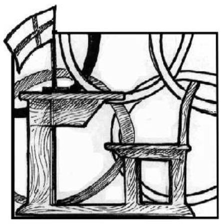
Olin oppinut, että matematiikka nojaa määritelmiin ja päättelysääntöihin. Ja vastaus kysymykseen *miksi* löytyy tätä kautta – siksi, että hyväksytyistä määritelmistä niin (päättelysääntöjen avulla) seuraa.

Vastauksen takana piili kuitenkin uusi kysymys, jota koulutuskaaren aikana hyvin harvoin tuli kysyneeksi: *Entä jos...?* Topologian kurssilla opin, ettei *pallon* tarvitse olla pyöreä. Algebrassa tuli selväksi, että $1 + 1$ voi ollakin 1. Epäeuklidinen geometria opetti, että ulkopuolisen pisteen kautta voi kulkea äärettömän monta alkuperäisen suoran kanssa yhdensuuntaista suoraa.

Monet ovat väittäneet, että yliopistotasoinen matematiikan koulutus matematiikan aineenopettajille on ylimitoitettua – kyllähän sitä vähemmälläkin koulutuksella osaa laskea, että $1 + 1 = 2$ ja $3 \cdot 5 = 15$. Edellä esitetyn valossa tämä tuntuu oudolta. Täytyyhän opettajan tietää enemmän kuin opetettava asia – opettajan pitäisi myös *ymmärtää*. Ja yksi ymmärtämisen edellytyksiä on vastaus kysymykseen *miksi*.

On myös sanottu, että hyvän opettajan on yhtä tärkeää opettaa kysymään kuin vastaamaan. Tältä kannalta katsottuna joutuu toteamaan, että vuosien koulutusketju on ollut valitettavan vastauspainotteinen. Tehtävä toisensa perään ratkaistaan samalla sapluunalla ja tarvittaessa toistetaan rutiini vielä muutaman kerran. Harjoituksissa on kyllä joskus saatettu esittää tehtävä muodossa *"Esitä kysymys ja vastaa siihen"*, mutta ymmärrettävistä syistä tälläiset tehtävät ovat tuntuneet joko vaikeilta tai naurettavilta.

Matematiikka *on* parhaimmillaan luovaa ajattelua. *Entä jos* -kysymys antaa rajattomat mahdollisuudet, sillä jos asioita ajatellaan, niin varmasti ne *olisivat voineet* olla toisin. Kysymys kuuluu: "Onko luovaa piirtää 'puu' vai viisi *erilaista* 'puuta'?". Matematiikka antaa mahdollisuudet jälkimmäiseen.



Pitkän matematiikan ylioppilaskoe

Luma-projekti tiedottaa 7, Opetushallitus Moniste 1/2002:

”Pitkässä matematiikassa pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittaneiden osaamistason välinen kuilu tuntuu jähmettyneen nykyiseen leveyteensä. Pakolliseksi kokeen valinneet olivat tällä kertaa (kevät 2001) keskimäärin 1,37 arvosanayksikköä parempia kuin ylimääräisenä kirjoittanet. Keskimääräisesti kokeen pakolliseksi valinnut sai kirkkaasti cum lauden, kun ylimääräiseksi valinnut tyytyi lubenteriin. Laudaturin saaneista noin 90 % ja reputtaneista noin 22 % oli pakollisena kirjoittavia. Pitkän matematiikan pakollisena kirjoittavien keskimääräinen pistemäärä vaikeissa tehtävissä oli jopa kaksinkertainen ylimääräisenä kirjoittavien keskimääräiseen pistemäärään verrattuna.

Naisten osuus pitkän matematiikan kirjoittajista pysyi oleellisesti ennallaan. Keväällä 2001 heitä oli 41 %. Heistä 32 % valitsi kokeen pakolliseksi, kun taas miehistä pakollisuuden valitsi 60 %. Molemmat osuudet ovat hieman viime kevättä suurempia. Ylimääräisen pitkän kirjoittajissa naiset ovat edelleen enemmistönä. Valinnaisuuden lisääntyminen ei ole houkutellut naisia mukaan odotusten mukaisesti.”

Samasta aiheesta on julkaistu tilastotietoja Solmussa 2/1996–1997, s. 22–24; *http://solmu.math.helsinki.fi/1997/1/lehdisto.html.*

Marjatta Näätänen