Solmu

Matematiikkalehti
2/2002

http://solmu.math.helsinki.fi/

Solmu 2/2002

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

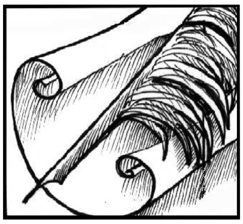
http://solmu.math.helsinki.fi/

Tämän vuoden numeroon 3/2002 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään syyskuun loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys



Pääkirjoitus

Lukion pitkän matematiikan oppimäärä pitää sisällään paljon materiaalia useilta matematiikan aloilta. Pakollisten kurssien lisäksi on nykyisin tarjolla myös aikaisempaa suurempi valikoima valinnaisia kursseja, joiden aiheina ovat esimerkiksi logiikka, differentiaaliyhtälöt tai eri aihepiireihin liittyvät numeeriset menetelmät. Yksittäisen lukion opetusohjelmassa näitä kursseja järjestetään lähinnä opettajien kiinnostuksesta riippuen, mutta kustakin erikoiskurssista on olemassa lukiota varten kirjoitettuja oppikirjoja, jotka soveltunevat myös itseopiskeluun.

Pieni joukko matematiikasta kiinnostuneita opiskelijoita haluaa oppia matematiikkaa vielä tätäkin enemmän jo lukiossa, jolloin ongelmaksi saattaa muodostua sopivan oppikirjan löytäminen. Solmun kotisivuilta löytyy kaikenlaista materiaalia, mutta toisaalta lehtemme artikkelit käsittelevät yleensä jotakin tiettyä yksittäistä kysymystä, eivätkä ne siten sovellu jonkin kokonaisen matematiikan alan johdonmukaiseen opiskelemiseen. Tähän liittyvä kysymys saapui myös Solmun keskustelupalstalle, ja yritän lyhyesti vastata siihen.

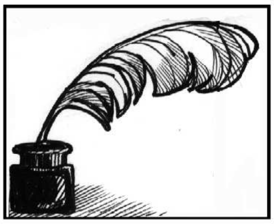
Ensimmäinen havaintoni on se, ettei kysymykseen löydy mitään yksiselitteistä vastausta, mutta mahdollisia vaihtoehtoja on muutamia. Ensimmäinen ja niistä helpompi on tutkia kotipaikkakunnan kirjaston hyllyjä ja etsiä sieltä sopivalta näyttäviä kirjoja. Tätä menetelmää käytin itsekin, ja aikoinaan Kokkolan kaupunginkirjastosta sattui silmiini teos Juve-Lyytikäinen: Tavalliset differentiaaliyhtälöt. Luin kirjaa kesäloman aikana ja muistaakseni sain ratkaistua kaikki harjoitustehtävätkin, yhtä lukuunottamatta. Näin jälkikäteen ajateltuna tämä oli varsin onnistunut valinta, mutta nykyisin on toki olemassa myös differentiaaliyhtälöitä käsitteleviä lukion kirjoja.

Toinen ja ehkä tällä hetkellä suositeltavampi mahdollisuus on etsiä yliopistojen matematiikan laitosten kotisivuilta ensimmäisen vuoden kursseja ja niillä käytettäviä oppikirjoja. Etsiminen kannattanee aloittaa sellaisesta yliopistosta, johon mahdollisesti aikoo joskus opiskelemaan, olipa suunniteltu tiedekunta mikä tahansa. Monilla kursseilla osa oppimateriaalista ja myös harjoitustehtävät löytyvät verkosta, mutta muussa tapauksessa kurssimateriaalin hankkiminen voi olla ulkopuoliselle hankalampaa.

Tässä yhteydessä en halua suositella mitään yksittäistä kirjaa, mihin ainakin yhtenä syynä on se, etten ole vielä löytänyt yliopistomatematiikan perusteista sellaista oppikirjaa, joka täyttäisi kaikki toiveeni. Monilla laitoksilla on käytössä hyviä opetusmonisteita, mutta ne on usein kirjoitettu luentojen tueksi ja niiden omatoiminen opiskelu saattaa olla raskasta. Sen sijaan suositeltavia aihepiirejä on helppo luetella, ja niistä ensimmäisenä tulevat mieleeni differentiaali- ja integraalilaskenta eli matemaattinen analyysi sekä algebran, lukuteorian tai differentiaaliyhtälöiden peruskurssit.

Toisaalta kannattaa muistaa, että paras apu kaikissa matematiikkaan liittyvissä kysymyksissä saattaa löytyä lähempää kuin tulee edes ajatelleeksi, eli omalta matematiikan opettajalta. Suomalaiset matematiikan aineopettajat ovat kaikki opiskelleet yliopistoissa ja tuntevat varmasti ainakin omassa opinahjossan käytössä olevat oppikirjat, myös niiden hyvät ja huonot puolet.

Pekka Alestalo



Toimitussihteerin palsta

Solmun verkkoetusivulla on toukokuun 2002 alusta lähtien ollut kävijälaskuri. Ensimmäisen kuukauden aikana kävijöitä on laskurin mukaan ollut lähes puolitoista tuhatta. Palvelinkoneiden logitiedostoihin tallentuu tieto mm. kaikista hakukoneiden yhteydenotoista, joten kävijälaskurin ja logitiedoston antamissa luvuissa on yleensä huomattavan suuri ero. Esimerkiksi syyskuussa 2001 Solmun etusivulle otettiin logitiedoston mukaan 189 493 onnistunutta verkkoyhteyttä, muille sivuille tai niiden osille yhteydenottoja oli 21 182.

Verkkomateriaalin käyttöä matematiikan opetuksessa on hiljattain tutkittu laajemminkin Helsingin yliopiston aineenopettajan linjan proseminaarityössä. *Ossi Hyyti* laati kyselylomakkeen omille verkkosivuilleen ja lähetti vastauspyynnön 300 matematiikan opettajalle eri puolille Suomea. Opettajista noin 15 % (47 opettajaa) vastasi kyselyyn. Vastauksista Hyyti kokosi yhteenvedon, joka sisältää tietoa Solmun sekä muun verkossa ilmestyneen materiaalin käytöstä matematiikan opetuksessa peruskouluissa ja lukioissa.

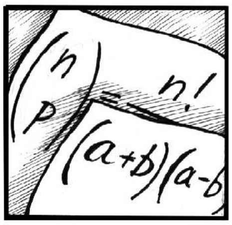
Kysely vahvisti monet ennakkoarviot oikeiksi. Kyselyyn vastanneista opettajista suurin osa käytti oheismateriaalia opetustyössään hyvinkin aktiivisesti, sen sijaan verkossa olevaa oppimateriaalia käytetään edelleen melko harvoin. Syynä voi olla sopivan materiaalin löytämisen vaikeus sekä sen käytön suunnittelulle liikenevän ajan niukkuus. Tähän viittaa se, että *Riitta Snellmanin* keräämään ja opettajia varten valmiiksi luokittelemaan yläasteen linkkikokoelmaan oltiin hyvin tyytyväisiä.

Solmun käytön motiivi on useimmiten oma ilo, uusien ideoiden etsintä ja omien matematiikan tietojen lisääminen. Eniten luettiin artikkeleita matematiikan opetuksesta ja matematiikasta yleisesti. *Matti Lehtisen* kirjoittaman matematiikan historian suosio on suuri etenkin lukion opettajien keskuudessa. Laajasta unkarilaiseen matematiikan opetukseen liittyvästä materiaalista käytettiin hyödyksi varsinkin unkarista suomeen käännettyjä tehtäviä.

Kyselyyn osaa ottaneista peruskoulun alaluokilla matematiikkaa opettavista kukaan ei ollut kuullut lehtemme olemassaolosta. Yksi mahdollinen syy tähän voi olla, että luokanopettajat eivät tule etsineeksi verkosta heidänkin opetukseensa, erityisesti matematiikkaan liittyvää oppimateriaalia. Kyselyyn vastanneista opettajista 19 kuuli lehdestämme ensimmäistä kertaa. Voidaankin tämän perusteella todeta, että Solmulla on vielä työtä tehtävänä tunnettavuuden suhteen.

Aktiivisten Solmun käyttäjien mielestä sivut ovat sekä selkeät että informatiiviset. Tämä varmasti kannustaa Solmun toimitusta jatkamaan samoilla linjoilla pyrkien entistä monipuolisempaan lehteen, jonka aineistoa voivat käyttää matematiikan opettajat ja harrastajat kaikilla tasoilla.

Mika Koskenoja



Sattuman matematiikkaa I – klassinen todennäköisyys

Mika Koskenoja
Assistentti
Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Johdanto

Aloitan todennäköisyyslaskennasta kertovan kirjoitussarjan, jonka toinen osa ilmestynee seuraavassa Solmussa syksyllä. Inspiraation aiheesta kirjoittamiseen olen saanut kahdeltakin taholta. Ensinnäkin, Ilta-Sanomien toimittaja soitti minulle muutama kuukausi sitten ja pyysi kommentoimaan *Veijo Wirénin* vasta ilmestynyttä kirjaa *Näin voitan lotossa?* (Gummerus, 2002). Kirjassa esitetyt menetelmät "todennäköisten" lottorivien löytämisestä on helppo osoittaa hölynpölyksi klassisen todennäköisyyslaskennan avulla (Ilta-Sanomat, 9.2.2002). Kirjan kirjoittaja intoutui kuitenkin vielä arvostelemaan toimittajaa – ja siinä samalla minuakin – kirjansa teilaamisesta Ilta-Sanomien yleisönosastolla 16.2.2002. Hänen mielestään "kaavamainen" matematiikka ei lainkaan sovi yhteen hänen luovan ajattelunsa kanssa; siitä on toki helppo olla samaa mieltä hänen kanssaan.

Toinen ja edellistä tärkeämpi syy todennäköisyyslaskennasta kirjoittamiseen on Solmun lukijoilta tullut toivomus. Erityisesti on toivottu Bertrandin paradoksin käsittelyä, johon palaankin myöhemmin. Se on esimerkki klassisen (geometrisen) todennäköisyyslaskennan tunnetusta ongelmasta.

Tässä kirjoitussarjan ensimmäisessä osassa käsittelen todennäköisyyslaskennan historiaa sekä klassista todennäköisyyttä ja tämän laajennuksena geometrista todennäköisyyttä. Näihin liittyen esitän jo mainitsemieni loton ja Bertrandin paradoksin lisäksi muutamia varsin yksinkertaisia esimerkkejä. Seuraavissa kirjoitussarjan osissa Solmun lukijat on aikomus tutustuttaa todennäköisyyden aksioomiin ja perusominaisuuksiin, satunnaismuuuttujiin sekä erilaisiin jakaumiin, jotka mahdollistavat satunnaisilmiöiden kuvaamisen klassisia menetelmiä huomattavasti tehokkaammin. Erityisen ilahduttavaa uskoisin lukijoille olevan, että lukiomatematiikka – suurelta osin jopa hyvin hallittu peruskoulumatematiikka – riittää vallan mainiosti esitedoiksi kirjoitussarjan seuraamiseen.

Historiaa

Todennäköisyyslaskennan katsotaan saaneen alkunsa 1600-luvun puolivälissä siitä, kun *Chevalier de Mérén* nimellä tunnettu ranskalainen aatelismies *Antoine Gombaud* (1607–1684) esitti maanmiehelleen *Blaise Pascalille* (1623–1662) uhkapeleihin liittyneet kaksi kysymystä. Näistä ensimmäinen koski peliä, joka koostuu pelieristä, joiden voittamiseen kummallakin pelaajalla on samat mahdollisuudet. Jos ensimmäisenä kuusi erää voittanut saa pelipanoksen, mutta peli keskeytetään tilanteessa, jossa toinen pelaaja on voittanut viisi ja toinen kolme erää, niin mikä on oikeudenmukainen tapa jakaa pelipanos? Pascal ja *Pierre de Fermat* (1601–1665, hänkin Pascalin tavoin ranskalainen matematiikan historian suuri nimi) käsittelivät ongelmaa kirjeenvaihdossaan ja päätyivät samaan ratkaisuun 7 : 1. Toinen de Mérén kysymys koski nopanheittoa, ja siihen palaan tarkemmin klassista todennäköisyyttä koskevassa luvussa.


Pascal


Fermat

Pascalin ja Fermat'n lisäksi klassisen todennäköisyyden käsitteen yksi ensimmäisiä kehittäjiä oli 1600-luvun puolivälissä hollantilainen *Christiaan Huygens* (1629–1695), joka vuonna 1657 ilmestyneessä kirjasessaan tarkasteli de Mérén nopanheittoon liittynyttä kysymystä. Koska todennäköisyyslaskennan ensimmäiset ongelmat versoivat juuri uhkapeleistä, niin teoreettinen tarkastelu perustuikin aluksi lähes yksinomaan aritmetiikkaan ja kombinatoriikkaan. Muutamaa vuosikymmentä myöhemmin saksalainen *Jakob Bernoulli* (1654–1705) toi *tilastollisen todennäköisyyden* käsitteen mukaan teorian piiriin. Bernoullin *Ars Conjectandi* (1713) laajensi todennäköisyyskäsitystä uhkapeleistä arkitodellisuuteen.


Huygens


Bernoulli

Vaikka analyysin ensiaskeleita jo otettiinkin 1600-luvulla, niin todennäköisyyslaskennan varhaisvaiheiden aikaan analyysi vielä odotteli todellista läpimurtoaan luonnontieteissä. Kuitenkin jo 1700-luvun puolivälissä analyysi muodostui luonnontieteiden ja samalla myös todennäköisyyslaskennan edistyksen perustaksi. Suurimman paineen analyysin kehitykselle loivat fysikaalisten tieteiden tarpeet. Todennäköisyyslaskennan puolella analyysin voimakas kehitys vauhditti erityisesti normaalijakauman käyttöönottoa, joka loi pohjan mm. havaintovirheiden analysoinnille ja väestötieteelle.


de Moivre

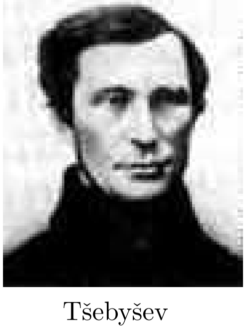

Laplace

Tärkeimmät tuon ajan matemaatikot, joiden nimet monen muun luonnontieteiden alan lisäksi liitetään myös todennäköisyyslaskentaan, olivat ranskalainen, jo nuorena Englantiin muuttanut *Abraham de Moivre* (1667–1745), ranskalaiset *Pierre Laplace* (1749–1827) ja *Siméon Poisson* (1781–1840) sekä saksalainen *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855).


Poisson


Gauss

Todennäköisyysteorian itsenäinen kehitys alkoi 1800-luvun puolivälissä. Venäläisen koulukunnan johdolla – etunenässä *Pafnuti Tšebyšev* (1821–1894) – se eli kulta-aikaansa aina 1930-luvulle asti. Satunnaismuuttujan ja odotusarvon käsitteiden katsotaan olevan peräisin juuri Tšebyševiltä.


Tšebyšev


Markov

Teorian kehitykseen 1900-luvun vaihteessa vaikuttaneista venäläisistä matemaatikoista mainittakoon *Andrej Markov* (1856–1922), jonka ansioksi luetaan *stokastisten prosessien* tutkimuksen aloittaminen ns. *Markovin ketjujen* muodossa. Todennäköisyyslaskennan yleisen teorian loivat vähän myöhemmin 1930-luvulla venäläiset *Andrej Kolmogorov* (1903–1987) ja *Aleksander Hintšin* (1894–1959). Koko teorian perustana pidetään Kolmogorovin vuonna 1933 julkaisemaa aksiomatiikkaa.

Kolmogorov

Hintšin

Täydellisempi esitys todennäköisyyslaskennan historiasta löytyy *Matti Lehtisen* kirjoittamasta *Matematiikan historiasta*, `http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/`. Seuraava klassisen todennäköisyyden esitys perustuu *Pekka Tuomisen* ja *Pekka Norlamon* 2-osaiseen kirjaan *Todennäköisyyslaskenta*, jossa käsitellään jonkin verran myös todennäköisyyslaskennan historiaa.

Klassinen todennäköisyys

Klassinen todennäköisyys voidaan määritellä käyttäen useaa toisistaan hieman poikkeavaa lähestymistapaa. Määritelmän on kuitenkin toteutettava muutamia perusperiaatteita lähestymistavasta riippumatta. Tärkein näistä on *yhtä todennäköisen periaate*, jota voidaan pitää klassisen todennäköisyyden tunnusmerkkinä.

Tilannetta tai ilmiötä, jossa esiintyy satunnaisuutta, kutsutaan *satunnaiskokeeksi*. Klassisessa todennäköisyydessä on voitava olettaa, että koe on mahdollista toistaa samoissa olosuhteissa rajattoman monta kertaa toistojen ollessa riippumattomia. Tämä ei aivan kirjaimellisesti ottaen ole tietenkään ikinä mahdollista muuten kuin periaatteena.

Satunnaiskokeen erilaisia tulosmahdollisuuksia kutsutaan *alkeistapauksiksi*. Klassisessa todennäköisyydessä alkeistapauksia on aina äärellinen määrä. Lisäksi oletetaan, että kaikki alkeistapaukset ovat *yhtä mahdollisia* eli *yhtä todennäköisiä*. Tämä olettamus lausutaan tavallisesti sanomalla, että alkeistapaukset ovat *symmetrisiä*. Esimerkiksi kolikonheitossa on kaksi symmetristä alkeistapausta, kruuna ja klaava, ja nopanheitossa on kuusi symmetristä alkeistapausta, pisteluvut $1, 2, \ldots, 6$.

Tapahtumalla tarkoitamme mielivaltaista alkeistapausten joukkoa, erityisesti se voi olla tyhjä tai kaikkien alkeistapausten joukko. Tapahtumia on tapana merkitä isoilla aakkosilla A, B, C, jne. Esimerkiksi nopanheitossa tapahtuma A voisi olla ”nopanheiton tulos on vähintään neljä”, siis $A = \{4, 5, 6\}$. Tapahtuman sanotaan olevan *varma*, jos se sattuu välttämättä jokaisessa satunnaiskokeessa, ja tapahtuma on *mahdoton*, jos se ei voi sattua yhdessäkään kokeessa. Nopanheitossa tapahtuma $B =$ ”pisteluku on vähintään yksi” on varma, kun sen sijaan tapahtuma $C = \emptyset$ eli ”pisteluvuksi ei tule mitään” on mahdoton.

Merkitsemme kaikkien alkeistapausten lukumäärää n:llä ja joukon A alkioiden lukumäärää $n(A)$:lla, jota on tässä yhteydessä tapana kutsua A:lle suotuisien alkeistapausten lukumääräksi. Tapahtuman A *klassinen todennäköisyys* määritellään nyt lukuna

$$P_k(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Merkinnässä P_k kirjain P tulee englannin kielen sanasta ”probability” eli ”todennäköisyys” ja alaindeksi k osoittaa, että kyseessä on ”klassinen” todennäköisyys. Tämän määritelmän perusteella edellä esitetyn tapahtuman $A =$ ”nopanheiton tulos on vähintään neljä” todennäköisyys on

$$P_k(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Vastaus on tapana antaa desimaalilukuna kahden tai kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella, mutta myös murtolukuna erityisesti silloin, kun desimaalilukuarvo on likiarvo tarkalle murtolukuarvolle.

Alkeistapausten symmetrisyyttä ei voi perustella pelkästään matemaattisesti, vaan sen tueksi tarvitaan havainnollinen käsite ”umpimähkäinen valinta”. Mistä yleensä ottaen edes tiedämme, mitkä tarkasteltavana olevassa ilmiössä ovat symmetrisiä alkeistapauksia? Pulman voisi yrittää ratkaista johtamalla alkeistapausten symmetrisyys fysikaalisesta symmetriasta. Esimerkiksi kolikonheitossa kruuna ja klaava ovat symmetrisiä alkeistapauksia edellyttäen, että kolikkoa ei ole mitenkään painotettu. Symmetriaa ei tässä voi kuitenkaan perustella sillä, että kolikko olisi fysikaalisesti täysin symmetrinen; silloinhan kruunaa ja klaavaa ei voisi erottaa toisistaan. Fysikaalisesta symmetriasta voi siis olla hyötyä intuitiivisessa tarkastelussa, mutta on selvää, että sitä ei voi sisällyttää klassisen todennäköisyyden määritelmään.

Frekvenssitulkinta

Klassisen todennäköisyyden merkitystä voidaan havainnollistaa *frekvenssitulkinnan* avulla. Itse asiassa *tilastollisen todennäköisyyden* käsite perustuu juuri frekvenssitulkintaan. Tarkastelemme satunnaiskoetta, jota voidaan toistaa samanlaisissa olosuhteissa rajattomasti. Olkoon A tähän kokeeseen liittyvä tapahtuma ja $F_n(A)$ tapahtuman A esiintymiskertojen lukumäärä n:ssä toistossa. Määrittelemme A:n *suhteellisen frekvenssin* lukuna

$$f_n(A) = \frac{F_n(A)}{n}.$$

Kokeellisesti on havaittu, että toistojen lukumäärän n kasvaessa suhteellinen frekvenssi $f_n(A)$ näyttää yhä varmemmin keskittyvän tietyn luvun läheisyyteen. Frekvenssitulkinnan mukaan tapahtuman A todennäköisyys on juuri kyseinen luku, jota A:n suhteellinen frekvenssi näyttää lähestyvän toistojen lukumäärän kasvaessa. Toteamme kuitenkin, että frekvenssitulkinta ei voi olla todennäköisyyden määritelmä matemaattisessa mielessä. Ensinnäkin, kyseinen "raja-arvo" ei ole raja-arvo matemaattisen analyysin mielessä, ja toiseksi, äärettömiä toistosarjoja on mahdoton realisoida.

de Mérén ongelma

Chevalier de Méré oli havainnut kokeellisesti seuraavaa:

Havainto 1. Kannattaa lyödä vetoa siitä, että heitettäessä neljä kertaa noppaa saadaan ainakin yksi kuutonen.

Havainto 2. Ei kannata lyödä vetoa siitä, että heitettäessä kahta noppaa 24 kertaa saadaan ainakin yksi kuutospari.

Hän ei kuitenkaan kyennyt osoittamaan havaintojaan teoreettisesti, joten hän kääntyi Pascalin puoleen noin vuonna 1650.

Ratkaisu. de Mérén ensimmäisen havainnon selittävän satunnaiskokeen symmetrisiksi alkeistapauksiksi voidaan valita 4-jonot

$$(x_1, x_2, x_2, x_4), \quad x_i \in \{1, 2, \ldots, 6\}.$$

Jokainen x_i ilmoittaa siis i:nnen heiton pisteluvun, yksi mahdollinen tulos on esimerkiksi 4-jono $(5, 1, 3, 5)$. Kaikkien mahdollisten alkeistapausten lukumäärä on

$$n = 6^4 = 1\,296.$$

Jos A on tapahtuma "saadaan ainakin yksi kuutonen", niin A:lle suotuisien tapahtumien lukumäärä on

$$n(A) = 6^4 - 5^4 = 1\,296 - 625 = 671,$$

sillä A:lle epäsuotuisia tapauksia on 5^4. Näin ollen

$$P_k(A) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}518.$$

Kahden nopan heiton symmetrisiksi alkeistapauksiksi valitsemme järjestetyt parit

$$(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3), \ldots, (6, 6),$$

joiden lukumäärä on $6^2 = 36$. Koska tarkastelemme järjestettyjä pareja, niin esimerkiksi tapahtuma $(1, 2)$ on eri tapahtuma kuin $(2, 1)$. Tämä merkitsee, että on eri asia saada ensin ykkönen ja sitten kakkonen kuin saada ensin kakkonen ja sitten ykkönen. Näin ollen de Mérén toisen havainnon selittävässä satunnaiskokeessa on yhteensä $n = 36^{24}$ erilaista alkeistapausta. Näistä tapauksia, joissa ei ole yhtään kuutosparia, on 35^{24}. Jos B on tapahtuma "saadaan ainakin yksi kuutospari", niin

$$P_k(B) = \frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}491.$$

Havaitsemme, että $P_k(A) > 0{,}5$, joten A:n puolesta kannattaa lyödä vetoa. Sen sijaan $P_k(B) < 0{,}5$, joten B:n puolesta ei kannata lyödä vetoa. Toki kysymystä siitä, milloin jonkin asian puolesta kannattaa lyödä vetoa, voi pohtia syvällisemminkin, mutta puhtaasti klassisen todennäköisyyden kannalta kysymys ei ole tämän monimutkaisempi.

Lotto

Meidän suomalaisten parhaiten tuntema ja eniten pelaama rahapeli on epäilemättä lotto. Luultavasti jokainen meistä on ainakin itse mielessään pohtinut loton täysosuman todennäköisyyttä. Laskemmekin tämän seuraavaksi klassisen todennäköisyyden keinoin.

Tarkastelemme ensin hieman *kombinatoriikkaa* tarvitsemassamme laajuudessa. Jos E on n-alkioinen joukko ja k on kokonaisluku, jolle pätee $1 \leq k \leq n$, niin E:n *k-kombinaatio* on E:n k-alkioinen osajoukko. Alkioiden järjestyksellä kombinaatioissa ei siis ole merkityssä. On varsin helposti osoitettavissa, että n-alkioisella joukolla E on

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

k-kombinaatiota. Edellä merkintä $n!$ tarkoittaa n:n *kertomaa*, joka määritellään positiiviselle kokonaisluvulle

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Lukuja $\binom{n}{k}$ kutsutaan *binomikertoimiksi*, ja merkintä luetaan "n alle k" (tai "n yli k").

Lotossa joukon E muodostavat kaikki arvottavat numerot, siis

$$E = \{1, 2, 3, \ldots, 39\}.$$

Koska (varsinaisia) numeroita arvotaan 7 kappaletta, niin tutkimme E:n 7-kombinaatioita, jotka voimme valita loton symmetrisiksi alkeistapauksiksi. Näiden lukumäärä on edellä olevan perusteella

$$n = \binom{39}{7} = \frac{39!}{7!\,32!} = 15\,380\,937.$$

Kaikista mahdollisista riveistä vain yksi on kulloisenkin kierroksen täysosumarivi, joten tämän klassinen todennäköisyys on

$$P_k(\text{"7 oikein"}) = \frac{1}{15\,380\,937} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-8}.$$

On syytä huomauttaa, että loton muiden – erityisesti lisänumeroja sisältävien – voittoluokkien todennäköisyyksien määrääminen on jonkin verran edellä esitettyä hankalampaa. Näiden laskeminen jää tässä yhteydessä kuitenkin lukijoiden oman mielenkiinnon varaan. Voitte miettiä mahdollisia ratkaisumalleja ja lähettää ne Solmun toimitukseen; parhaat ehdotukset julkaistaan kirjoitussarjan seuraavissa osissa.

Geometrinen todennäköisyys

Heti todennäköisyyslaskennan varhaiskehitysvaiheessa huomattiin, että symmetrisiin yhtä todennäköisiin tapahtumiin perustuva todennäköisyyden klassinen määritelmä oli riittämätön. Yksi ensimmäisistä yrityksistä laajentaa määritelmää oli geometrisen todennäköisyyden idea. Tässäkin lähestymistavassa yhtä todennäköisen käsite oli vielä keskeisessä roolissa, mutta geometrista todennäköisyyttä voidaan kuitenkin hyvällä syyllä pitää klassisen todennäköisyyden yleistyksenä; esimerkiksi alkeistapauksia geometrisessa todennäköisyydessä on rajaton määrä.

Geometrista todennäköisyyttä on mahdollista soveltaa tilanteissa, joissa satunnaiskokeen tulos voidaan havainnollistaa geometrisella kuviolla ja kiinnostuksen kohteena oleva tapahtuma A tämän osakuviona. Tällaisia kuvioita ja niiden osakuvioita voivat olla esimerkiksi yksiulotteinen jana, kaksiulotteinen tasoalue tai kolmiulotteinen kappale. Tilanteen on oltava siinä mielessä symmetrinen, että A:n mahdollisuus esiintyä riippuu vain A:n geometrisesta mitasta (janalla pituus, tasoalueella pinta-ala ja kappaleella tilavuus), eikä lainkaan A:n muodosta ja sijainnista. Tällöin voimme määritellä A:n *geometrisen todennäköisyyden* lukuna

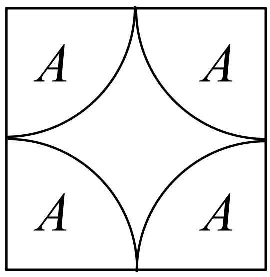
$$P_g(A) = \frac{m(A)}{m},$$

missä $m(A)$ edustaa osakuvion A ja m koko kuvion geometrista mittaa; lisäksi oletetaan, että koko kuvion mitalle pätee $0 < m < \infty$. Kyseisen määritelmän täsmentäminen vaatisi tiettyjä rajoituksia koko kuviolle ja sen osakuviolle A, mutta se johtaisi euklidisen avaruuden mitan määrittelyyn, ja tyydymmekin tässä yhteydessä pelkästään havainnolliseen käsittelyyn.

Esimerkki. Huoneen lattialla on neliöruudukko, jossa neliön sivu = kolikon halkaisija = $2r$. Millä todennäköisyydellä lattialle heitetty kolikko peittää neliön kärjen?

Ratkaisu. Tutkimme kysytyn geometrisen todennäköisyyden selvittämiseksi kolikon keskipisteen sijaintia neliöruudukossa. Koska eri neliöt ovat toisiinsa nähden samassa asemassa, voimme tarkastella yhtä neliötä. Sen pinta-ala on $m = (2r)^2 = 4r^2$. Tarkastelemme tapahtumaa A = "lattialle heitetty kolikko peittää neliön kärjen", jota mallissamme edustaa kolikon keskipisteen sijainti neliössä. Suotuisissa tapauksissa kolikon keskipisteen etäisyys neliön kärjestä on pienempi kuin r (katso kuva). Näin ollen A:n pinta-ala on $m(A) = 4 \cdot \frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2$, ja kysytty geometrinen todennäköisyys on siten

$$P_g(A) = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$



On selvää, että geometrisen todennäköisyyden määrittelyyn liittyy aivan samoja periaatteellisia ongelmia kuin klassisenkin todennäköisyyden määrittelyyn. Vakavin puute kummassakin määritelmässä on, että ne kattavat vain hyvin suppean osan niistä satunnaiskokeista, joista olemme kiinnostuneet. Kummankaan määritelmän pohjalta on mahdotonta konstruoida alkeistapauksia, joiden avulla voisimme johtaa todennäköisyyden, että syntyvä lapsi on tyttö tai että tietyn radioaktiivisen atomin elinikä on suurempi kuin 1 000 vuotta.

Bertrandin paradoksi

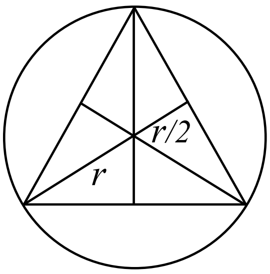
Ranskalainen matematiikko *Joseph Bertrand* (1822–1900) esitti todennäköisyyslaskennan kursseillaan useita geometriseen todennäköisyyteen liittyviä ongelmia, joissa tulos riippui ongelman ratkaisutavasta. Bertrandin esittämistä ongelmista tunnetuin lienee seuraava paradoksi, jonka käsittely perustuu venäläisen *Boris Gnedenkon* (1912–1995) todennäköisyysteorian klassisen teoksen *The Theory of Probability* esitykseen.


Bertrand


Gnedenko

Bertrandin paradoksi. *Annettuun ympyrään piirretään umpimähkään jänne. Mikä on todennäköisyys, että jänne on pidempi kuin ympyrän sisään piirretyn tasasivuisen kolmion sivu?*

Merkitään totuttuun tapaan kysyttyä tapahtumaa A:lla. Ympyrän sisään piirretyn tasasivuisen kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä suhteessa $1 : 2$. Näin ollen ympyrän keskipisteen etäisyys kolmion sivuista on $\frac{r}{2}$ (katso kuva).



Ratkaisu 1. Oletetaan, että jänteen keskipisteen ja ympyrän keskipisteen etäisyys valitaan umpimähkään väliltä $]0, r[$, missä r on ympyrän säde. Tällöin geometrinen mitta $m = r$. Tapahtumalle A suotuisissa tapauksissa jänteen ja ympyrän keskipisteiden välinen etäisyys kuuluu välille $]0, \frac{r}{2}[$, joten $m(A) = \frac{r}{2}$. Näin ollen kysytty geometrinen todennäköisyys on

$$P_g(A) = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ratkaisu 2. Oletetaan, että jänteen toinen päätepiste ajatellaan kiinteäksi ja toinen valitaan umpimähkään ympyrän kehältä. Kehän pituus on $m = 2\pi r$. Tapahtumalle A suotuisissa tapauksissa jänteen toinen päätepiste kuuluu ympyrän kaareen, jonka pituus on $m(A) = \frac{2\pi r}{3}$. Näin ollen kysytty geometrinen todennäköisyys on

$$P_g(A) = \frac{\frac{2\pi r}{3}}{2\pi r} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333.$$

Ratkaisu 3. Oletetaan, että jänteen keskipiste valitaan umpimähkään ympyrän sisältä eli kiekosta

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}.$$

Tämän r-säteisen kiekon pinta-ala on tunnetusti πr^2, siis tämä on m. Tapahtumalle A suotuisissa tapauksissa jänteen keskipiste kuuluu kiekkoon

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \left(\frac{r}{2}\right)^2\},$$

jonka pinta-ala on

$$m(A) = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} r^2.$$

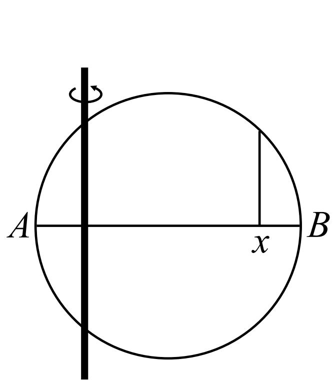
Näin ollen kysytty geometrinen todennäköisyys on

$$P_g(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{\frac{\pi}{4} r^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Saimme esitettyyn ongelmaan kolme erilaista vastausta, ja seuraava tehtävämme onkin yrittää selvittää, miksei ongelman ratkaisu ole yksikäsitteinen. Onko syy mahdollisesti jokin perustavaa laatua oleva mahdottomuus määrittää todennäköisyys yksikäsitteisesti tilanteissa, joissa on ääretön määrä mahdollisia tuloksia (jännehän voidaan piirtää ympyrän sisään äärettömän monella eri tavalla)? Vai johtuuko havaintomme kenties joistakin vääristä alkuoletuksista ongelman kolmessa eri ratkaisussa?

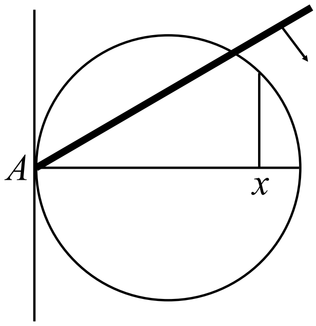
On selvää, että edellä esitetyt ratkaisut ovat yhden ja saman ongelman kolme erilaista ratkaisua, sillä ongelman asettelu ei määrittele tapaa, jolla jänne tulee satunnaisesti piirtää ympyrän sisälle.

Ensimmäisessä ratkaisussa voidaan ajatella, että vähintään lävistäjän pituinen tanko (ympyrän sisään jäävä osa vastaa jännettä) "vierii" kohtisuorasti yhtä lävistäjää (siis kahta peräkkäin asetettua samansuuntaista sädettä) pitkin. Kaikki mahdolliset tangon keskipisteen pysähtymiskohdat muodostavat janan AB (katso kuva), jonka pituus on sama kuin lävistäjänkin. Yhtä todennäköisiä ovat tällöin ne tapahtumat, jotka koostuvat tangon pysähtymiskohdista h:n pituisella janalla riippumatta siitä, missä kyseinen jana sijaitsee lävistäjällä.



Ratkaisun 1 kuva.

Toisessa ratkaisussa voidaan ajatella, että vastaava tanko on kiinnitetty yhteen pisteeseen ympyrän kehällä, ja tankoa on mahdollista käännellä korkeintaan 180° siten, että se leikkaa aina ympyrän kehää (katso kuva). Tangon liikkumista rajoittaa siis kiinnityspisteeseen ympyrälle piirretty tangentti. Nyt oletetaan, että tangon pysähtymiskohta h:n pituisella ympyrän kaarella riippuu kaaren pituudesta mutta ei riipu kaaren paikasta ympyrän kehällä. Näin ollen yhtä todennäköisiä tapahtumia ovat tangon pysähtymiskohdat kaarilla, joiden pituudet ovat samat.

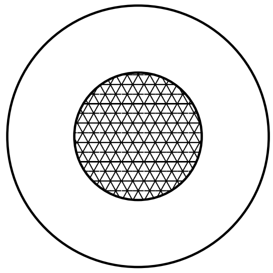


Ratkaisun 2 kuva.

Näiden tarkastelujen jälkeen on varsin selvää, että geometrisen todennäköisyyden määritelmät ensimmäisessä ja toisessa ratkaisussa ovat ristiriidassa keskenään. Ensimmäisen ratkaisun mukaan todennäköisyys, että jana pysähtyy välille $]A, x[$, on $\frac{x}{2r}$. Todennäköisyys sille, että janan ja ympyrän kehän leikkauspisteen kohtisuora projektio lävistäjälle toisessa ratkaisussa osuu samalle välille, on alkeellisen geometrisen tarkastelun nojalla

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \arccos \frac{r-x}{r}, & \text{kun } x \leq r, \text{ ja} \\ 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{x-r}{r}, & \text{kun } x \geq r. \end{cases}$$

Kolmannessa ratkaisussa "heitämme" jänteen keskipisteen umpimähkään ympyrän sisälle. Tällöin yhtä todennäköisiä tapahtumia ovat pinta-alaltaan samansuuruiset ympyrän sisällä sijaitsevat tasoalueet. Kysytty todennäköisyys saadaan siitä, että keskipiste putoaa tiettyyn pienempään samankeskiseen ympyrään (katso kuva). Erilaiset lopputulokset esittämissämme kolmessa eri ratkaisussa ovat tämän jälkeen varsin ilmeisiä.



Ratkaisun 3 kuva.

Lähteet

Elfving, Gustav, ja Tuominen, Pekka: *Todennäköisyyslaskenta II*, Limes ry, Helsinki, 1990.

Gnedenko, Boris: *The Theory of Probability*, Mir Publishers, Moscow, 1976.

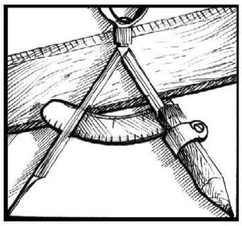
Lehtinen, Matti: *Matematiikan historia*, http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/.

Tuominen, Pekka: *Todennäköisyyslaskenta I*, Limes ry, Helsinki, 2000.

Tuominen, Pekka, ja Norlamo, Pekka: *Todennäköisyyslaskenta*, osa 1, Limes ry, Helsinki, 1985.

Tuominen, Pekka, ja Norlamo, Pekka: *Todennäköisyyslaskenta*, osa 2, Limes ry, Helsinki, 1988.

The MacTutor History of Mathematics archive, http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/.



Suoran määritelmä – se on...

Timo Tossavainen
Lehtori
Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

Henkilö, jolla on aikaa selailla geometrian oppikirjoja, saattaa kiinnittää huomiota hieman erikoiseen ilmiöön: nykyisin juuri missään kirjassa ei sanota mikä tai millainen olio suora tarkkaan ottaen on. Kyse ei ole tahattomasta vahingosta eikä siitä, että jokainen kirjantekijä olettaisi kaikkien ilman muuta ymmärtävän tämän käsitteen, vaan pikemminkin nykyisten kirjantekijöiden matemaattisesta valistuneisuudesta. Nimittäin, aiheesta enemmän kiinnostuva henkilö huomaa pian, ettei suoran määritteleminen ole lainkaan triviaali asia, jos käytettävissä ei ole analyyttisen geometrian käsitteitä. Ennen pitkää mieleen voi jopa tulla epäilys siitä, onkohan suoran matemaattinen määritteleminen tällä tavalla edes mahdollista – tai edes tarpeellista.

Varhaisempien oppikirjojen tekijät ovat olleet nykyisiä kollegoitaan rohkeampia ilmoittamaan mikä suora on. Tarkastelemme seuraavaksi joitakin yrityksiä määritellä tai muuten kuvailla suoran käsite ja pohdimme niihin mahdollisesti liittyviä ongelmia.

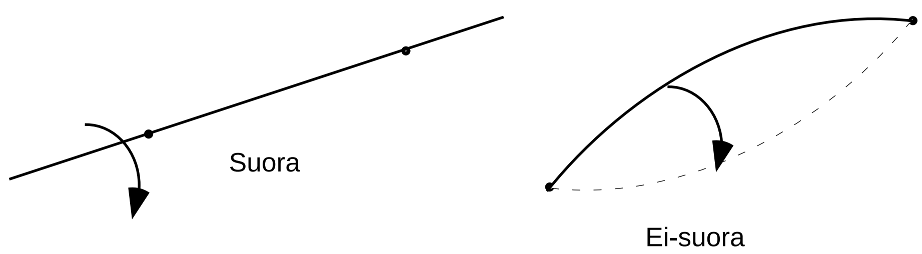
Eukleideen mielestä suora on olio, jota me kutsuisimme janaksi. Hänen klassikkokirjansa *Alkeet* alkusivuilla ilmoitetaan (vapaasti suomennettuna) muun muassa: ”Piste on se, millä ei ole mitään ulottuvuutta... Viiva on pituus vailla leveyttä... Suora on viiva, jonka pisteet ovat tasaisesti toisiinsa nähden.” Tällä ilmaisulla tarkoitettaneen jotain samankaltaista, mitä kirvesmies sanoisi laudansärmää katsoessaan ja todetessaan, ettei särmä ole kiemurteleva.

Eukleideen Alkeissa olevaa ilmaisua ei epämääräisyytensä takia voida käyttää matemaattisena suoran (eikä janan) määritelmänä, mutta kirjan kirjoittajan kunniaksi onkin sanottava, ettei kyseistä ilmaisua kenties ole edes tarkoitettu varsinaiseksi määritelmäksi. Alkeiden geometriaa koskevassa osuudessa nojaudutaan kyllä monessa kohdin havaintoon, mutta itse asiassa päättely ei perustu siihen, mitä suorasta yllä sanotaan. Tästä voidaan päätellä, että kirjantekijä lienee vain halunnut kuvailla minkälaiseksi kirjassa tarkasteltavan geometrian eräs perusolio voidaan sen konkreettisessa mallissa kuvitella.

Aikoinaan keskikoulussa eniten käytetyssä geometrian oppikirjassa suoraa kuvaillaan seuraavalla tavalla. ”Tarkastellessamme erilaisia kappaleita, havaitsemme, että kaikkia niitä rajoittaa joka puolelta *pinta*... Kahden pinnan rajakohtaa sanomme *viivaksi*... Viivoista tärkein on *suora viiva* eli *suora*. Siitä saamme jonkinlaisen käsityksen, jos vedämme langan kireäksi. On kuitenkin muistettava, että matemaattinen suora jatkuu rajattomasti kumpaankin suuntaan, eikä sillä ole paksuutta.” (Kallio-Malmio-Apajalahti: *Geometria*, 12. painos, 1957)

Tätäkään ilmaisua ei liene tarkoitettu varsinaiseksi määritelmäksi, sillä siinä nojaudutaan havainnollisuuteen jopa enemmän kuin Alkeissa. Jos pinnan ja viivan käsitteet vielä armollisesti hyväksytäänkin, ja vaikka kireä lanka toisaalta antaakin hyvän mielikuvan janasta, niin voidaan silti kysyä millä tavalla suora jatkuu rajatta molempiin suuntiin. Ja ennen kaikkea: mihin suuntiin? Ilmeisesti juuri määriteltävän suoran molempiin suuntiin, joten kyse on kehäajattelusta. Sitä paitsi pelkästään havainnollisuuteen vetoamisella on omat huonot puolensa. Käytännössä kireäksi vedetty pitkähkö lanka usein taipuu hieman kaarevaksi painovoiman vaikutuksesta ja tällaista janaa ”rajattomasti jatkamalla” saadaan sulkeutuva suora, mikä ei liene kirjantekijöiden ilmaisun tarkoitus.

Neovius-Nevanlinnan *Alkeisgeometrian oppikirjassa* toimitaan hieman ovelammin kuin äskeisessä esimerkissä: ”*Pisteellä* tarkoitetaan paikkaa eli kohtaa, jolla ei ole mitään ulottuvuutta. Liikkeessä olevan pisteen muodostamaa uraa sanotaan *viivaksi*... *Suoraksi viivaksi* eli *suoraksi* sanotaan semmoista viivaa, joka ei muuta asemaansa pyöriessään siten, että kaksi sen pistettä pysyy paikoillansa.” (8. painos, 1926)



Toisin sanoen yhtenäinen pistejoukko on suora, jos sen pyöriessä avaruudessa siten, että kaksi sen pistettä pysyy paikallaan, ovat sen kaikki pisteet kiintopisteitä. Tämän havainnollisen määritelmän etuna on selkeys ainakin siinä mielessä, että mikään ”ei-suora” viiva ei käy suorasta. Esimerkiksi ympyrän kaaren pyöriessä siten, että sen päätepisteet pysyvät paikallaan, muuttaa muu osa kaarta asemaansa. Silti myös Neovius-Nevanlinnan määritelmä sisältää ongelmia. Mitä viivan pyöriminen tarkkaan ottaen tarkoittaa, on hankalasti määriteltävissä alkeismatematiikan avulla. Onko suora äärellinen vai ääretön viiva, se ei ole ilmeistä määritelmän nojalla. Lisäksi ongelmana voidaan pitää sitä, että pyöriminen edellyttää kolmiulotteisen perusavaruuden olemassaoloa, muutenhan viiva ei mahdu pyörimään kahden kiintopisteensä ympäri. Lisäksi ainakin uudemmalle kielelle käännettynä määritelmä kuulostaa hieman kehäajattelulta: viiva on suora, jos se pyörii niin kuin suora.

On mielenkiintoista nähdä, mitä ensimmäisessä suomalaisessa tietosanakirjassa *Tietosanakirja* 1910-luvulla suoran määritelmästä sanotaan. Aluksi suoran määritteleminen todetaan hankalaksi asiaksi, minkä jälkeen määritelmä kuitenkin annetaan melkein samoilla sanoilla kuin Neovius-Nevanlinnan teoksessa: ”Kappaleen kääntyessä kahden kiinteäksi ajatellun pisteen ympäri pysyy joukko muitakin kappaleen pisteitä paikoillansa. Kaikki nämä pisteet yhdessä muodostavat suoran.” Tämän jälkeen kirjoittaja ilmoittaa, että suorasta on tehty aikoinaan (!) paljon epäpäteviä määritelmiä. ”Epätyydytyttävä on esim. määritelmä: ’Suora (siis nykykielellä jana) on kahden pisteen lyhin väli’, koska suoran mittaaminen edellyttää, että käsite suora on edeltäpäin selvitetty. Ei suora myöskään ole määriteltävissä viivana, jonka kaiken aikaa samaa pistettä kohti suuntaansa muuttamatta kulkeva piste muodostaa, sillä suuntaa ilmaistaan juuri suoralla.”

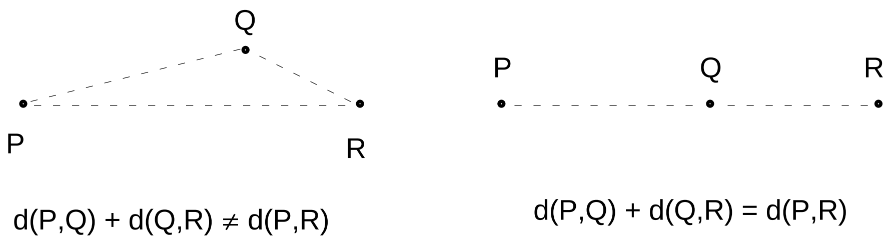
Noin 50 vuotta myöhemmin Lauri Myrberg kirjoittaa *Encyclopædia Fennicassa*: ”suora viiva, geometrian peruskäsite, joka ei ole määriltetävissä... Suora voidaan erottaa muista geometrian käsitteistä siihen liitettyjen perusominaisuuksien nojalla. Sellainen on esim. euklidisessa geometriassa käytetty lause, että suoran määrää kaksi sen pistettä.”

Myrbergin käsitys asiasta edustaa nykyisten matemaatikkojen varsin yksimielistä mielipidettä, ettei suoraa voida määritellä tyydyttävällä tavalla. Tämä ei kuitenkaan ole geometrian kannalta mikään ongelma, sillä geometrian tutkimuksen kohteena eivät ole suorat ja pisteet sinänsä, vaan näiden väliset suhteet erilaisissa malleissa. Erilaisia malleja geometriaan syntyy esimerkiksi sen mukaan oletetaanko ns. paralleeliaksiooma vai ei. Edes kaikissa tasogeometrian malleissa suorien ei tarvitse olla samannäköisiä viivoja. Esimerkiksi eräässä hyperbolisessa geometriassa suoria vastaavat yksikköympyrän sisään piirretyt ja sen reunaa vasten kohtisuorassa olevat ympyräkaaret.

Peruskoulusta ja lukion geometrian kurssista tutun tasogeometrian täydellisimpänä matemaattisena esityksenä pidetään David Hilbertin noin sata vuotta sitten konstruoimaa aksiomaattista systeemiä. Tässä systeemissä käsite suora jätetään kokonaan määrittelemättä, sillä koko konstruktion lähtökohtana on se, että on olemassa kolmenlaisia, mitenkään tarkemmin määrittelemättömiä olioita, joita sanotaan pisteiksi, suoriksi ja tasoiksi, ja näiden välillä vallitsee tiettyjä suhteita, joita kuvaamaan asetetaan noin 20 aksioomaa. Aksioomasysteemi vastaa loogisesti täysin moitteetta sitä geometrian mallia, jota jo Eukleides aikoinaan tarkasteli. Hilbertin systeemin etuna on se, ettei käsitteisiin suora ja piste tarvitse liittää minkäänlaista havainnollista mielikuvaa. Näin ollen geometristen teoreemojen todistuksiin ei jää sellaisia epämääräisiä kohtia, joita havaintoihin nojautuvaan päättelyyn tahtoo väistämättä jäädä. Toinen merkittävä etu selkeyden lisäksi on teorian yleistyminen. Aksiomaattinen lähestymistapa sallii nimittäin senkin, että voimme hyvin erilaisten objektien avulla rakentaa malleja, jotka vastaavat loogisesti tuttua koulugeometrian maailmaa. On esimerkiksi mahdollista laatia malleja, joissa suoria vastaavat pöydät ja pisteitä tuolit – tai päinvastoin! Näennäisestä erilaisuudesta huolimatta kaikki loogisesti ekvivalentit geometrian mallit hallitaan kuitenkin samoilla aksioomilla.

Puhtaasti aksiomaattista lähestymistapaa on käytännössä mahdotonta toteuttaa geometrian kouluopetuksessa, sillä Hilbertin aksioomajärjestelmän ymmärtäminen edellyttää pitkälle meneviä tieteellisiä opintoja. Niinpä nykyisissä koulukirjoissa jatketaankin perinnettä, jossa geometristen peruskäsitteiden välisiä suhteita tarkastellaan sekä havaintoihin että täsmälliseen päättelyyn perustuen. Hilbertin työstä tietoiset kirjantekijät kuitenkin näkevät nykyisin parhaaksi jättää suoran kokonaan määrittelemättä, sillä nykyvaatimusten mukaan tämä ei ole ehkä edes mahdollista eikä ainakaan välttämätöntä.

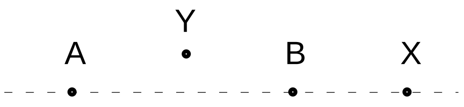
Jos euklidisen tasogeometrian deduktiivisessa opetuksessa halutaan esittää jonkinlainen suoran määritelmä, voidaan hyvin käyttää esimerkiksi Neovius-Nevanlinnan määritelmää. Toinen vaihtoehto voisi olla suoran määrittely etäisyyden käsitteen avulla.



Tason *kolme pistettä on samalla suoralla*, jos ne voidaan nimetä kirjaimilla P, Q ja R siten, että

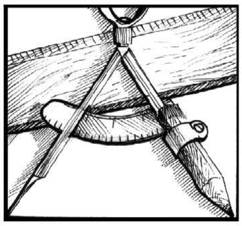
$$d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R),$$

missä $d(X,Y)$ on pisteiden X ja Y välinen etäisyys mitattuna euklidisen periaatteen mukaisesti eli ikäänkuin venymätöntä mutta taipuisaa mittanarua käyttäen. Tällöin *suora pisteiden A ja B kautta* on niiden pisteiden X joukko, jotka ovat samalla suoralla pisteiden A ja B kanssa.



Kuvassa piste X kuuluu pisteiden A ja B määräämälle suoralle, sillä nimeämällä pisteet uudelleen esimerkiksi $A \to P$, $B \to Q$ ja $X \to R$ nähdään, että ehto $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$ toteutuu. Sen sijaan pisteitä A, B ja Y ei voida nimetä uudelleen siten, että samalla suoralla olemisen ehto täyttyisi. Näin ollen Y ei kuulu pisteiden A ja B määräämälle suoralle.

Yllä olevan määritelmän etuna on ainakin se, ettei tarvitse olettaa tasoa laajempaa perusavaruutta. Toisaalta etäisyyden mittaaminen euklidisen periaatteen nojalla lienee ainakin jossain määrin luonnollista ihmismielelle, joten havainnollinen ilmaisu tuskin johtaa kovin väärään mielikuvaan suorasta. Lisäksi määritelmästä selvästi seuraa, että kaksi pistettä määrää suoran yksikäsitteisellä tavalla. Lukijan tehtäväksi jääköön etsiä määritelmään liittyvät ongelmat.



Paraabelin sukulaiset

Pekka Smolander
Matematiikan laitos, Joensuun yliopisto

Johdantoa

Ellipsin, paraabelin ja hyperbelin sukulaisuus on monille tuttu asia. Aihetta on käsitelty esimerksi Solmussa 1/2001, *Matti Lehtisen* artikkelin viimeisessä kappaleessa. Seuraavassa sukulaisuutta pyritään havainnollistamaan yhdennäköisyyden avulla. Huomataan, että yhdennäköisyys nähdään jopa yhtälöistä, kun ne esitetään sopivassa muodossa.

Oikealle aukeava paraabeli

Tarkastellaan ensin paraabelia, jonka yksinkertaisin yhtälö on

$$y = x^2.$$

Tämä paraabeli aukeaa ylöspäin ja sen huippu on origossa. Lähellä origoa käyrä näyttää sellaisen suuren ellipsin osalta, jonka isoakseli on y-akselin suuntainen. Visuaalisesti miellyttävämpää on tarkastella ellipsejä, joiden isoakseli on x-akselin suuntainen. Siksi tarkastellaankin oikelle aukeavaa paraabelia

$$y^2 = x. \tag{1}$$

Tämä saadaan ensimmäisestä yhtälöstä vaihtamalla x- ja y-koordinaattien roolit.

Pyritään löytämään ne ellipsit ja hyperbelit, jotka origon lähellä mahdollisimman tarkasti näyttävät paraabelilta (1). Esimerkiksi ellipsi

$$\frac{(x-8)^2}{8^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1,$$

ja hyperbeli

$$\frac{(x+8)^2}{8^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

muistuttavat paraabelia (1) origon läheisyydessä. Nämä käyrät on piirretty Kuvaan 1.

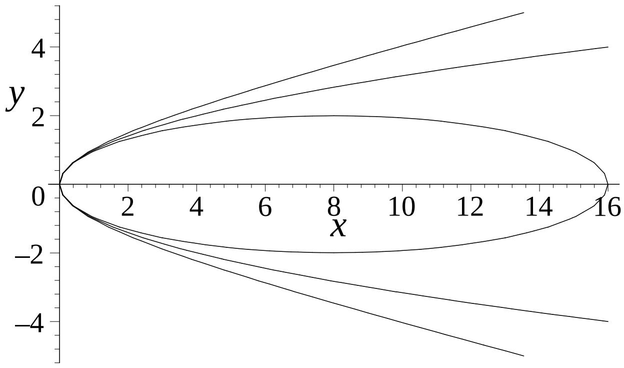
Ellipsistä paraabeliksi

Ajatus on seuraava: Kiinnitetään ellipsin äärimmäisenä vasemmalla oleva piste origoon ja valitaan ellipsille tietty muoto, joka riippuu ellipsin koosta. Kasvattamalla ellipsin kokoa rajatta huomataan, että vastaavasti ellipsin yhtälö yhtyy paraabelin yhtälöön.

Ellipsin yhtälön perusmuoto on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä a on vaaka-akselin puolikas ja b on pystyakselin puolikas. Muokataan tätä yhtälöä edellisen ajatuksen mukaan.



Kuva 1: Ellipsi, paraabeli ja hyperbeli

Siirtämällä ellipsiä luvun a verran oikealle saadaan äärimmäisenä vasemmalla oleva ellipsin piste origoon. Tällaisen ellipsin yhtälö on

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Koska luvut a ja b ovat puoliakselien pituudet, ne vaikuttavat ellipsin muotoon ja ne voidaan valita halutulla tavalla. Esimerkiksi piirtelemällä eri muotoisia ellipsejä huomataan seuraavaa: Puoliakselien pituudet kannattaa valita niin, että ne toteuttavat yhtälön

$$b^2 = a/2.$$

Edellisestä yhtälöstä saadaan siis

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a/2} = 1. \tag{2}$$

Ratkaisemalla y^2 saadaan yhtälö

$$y^2 = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}\right),$$

joka sievenee yksinkertaiseen muotoon

$$y^2 = -\frac{1}{2a}x^2 + x. \tag{3}$$

Tämä yhtälö on siis yhtä pitävä yhtälön (2) kanssa. Kasvatetaan ellipsin kokoa antamalla $a \to \infty$. Tällöin $\frac{1}{2a} \to 0$, joten rajankäynnissä päädytään paraabelin yhtälöön (1).

Hyperbelistä paraabeliksi

Hyperbelin yhtälö perusmuodossaan on

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä a ja b ovat hyperbelin puoliakselit. Myös tästä yhtälöstä päädytään edellisen tyyppisellä muokkauksella paraabelin yhtälöön.

Kiinnitetään hyperbelin oikeanpuoleisen haaran kärkipiste origoon korvaamalla x lausekkeella $x + a$ ja valitaan $b^2 = a/2$. Saadaan yhtälö

$$y^2 = \frac{1}{2a}x^2 + x. \tag{4}$$

Kun $a \to \infty$, niin myös tämä hyperbelin yhtälö muuntuu paraabelin yhtälöksi (1). Lukija voi kirjoittaa yksityiskohdat näkyviin katsomalla mallia edellisestä kappaleesta.

Käyrien perhe

Edellä johdetut ellipsin ja hyperbelin yhtälöt muistuttavat toisiaan. Jos ellipsille kirjoitetaan

$$t = -\frac{1}{2a},$$

ja paraabelille

$$t = \frac{1}{2a},$$

niin (3) ja (4) saadaan samasta yhtälöstä

$$y^2 = tx^2 + x. \tag{5}$$

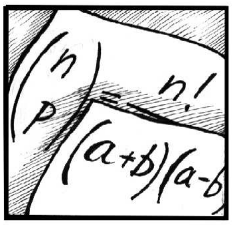
Ellipsi saadaan, kun $-\infty < t < 0$, ja hyperbeli, kun $0 < t < \infty$. On huomattava, että myös paraabeli (1) saadaan tästä yhtälöstä valitsemalla $t = 0$. Esimerkiksi Kuvan 1 käyrät saadaan, kun $t = -1/16$, $t = 0$ ja $t = 1/16$.

Jokaisella parametrin t arvolla saadaan yhtälöstä (5) joko ellipsi, paraabeli tai hyperbeli. Näin siis muodostuu käyrien perhe, jossa on yksi paraabeli ja sitä origon lähellä muistuttavia ellipsejä ja hyperbelejä. Mitä lähempänä luku t on nollaa, niin sitä enemmän käyrä muistuttaa paraabelia.

Kiinnostunut lukija voi piirrellä näitä käyriä ja muita tasokäyriä esimerkiksi ohjelmalla Graphmatica. Ohjelman voi imuroida osoitteessa `http://www.graphmatica.com` olevalta verkkosivulta.

Viitteet

M. Lehtinen, *Ellipsit, hyperbelit ja paraabelit vinossa*, Solmu 1/2001, http://solmu.math.helsinki.fi/2001/1/.



Solmun tehtävien ratkaisuja

Matti Lehtinen

Esitetään Solmun 1/2002 tehtävien 1–15 ratkaisut. Niitä on toimittajan lisäksi rustaillut *Janne Mansikkamäki* Vammalasta ja *Pekka Aarnio* Harjavallasta. Loput ratkaisut julkaistaan seuraavassa Solmussa.

1. Luku $(\sqrt{50}+7)^{2001}$ kehitetään desimaaliluvuksi. Määritä luvun 1. ja 2001. desimaali.

Ratkaisu. **(*Pekka Aarnio*)** Tunnetusti

$$(a+b)^{2n+1} = a^{2n+1} + \binom{2n+1}{1}a^{2n}b + \binom{2n+1}{2}a^{2n-1}b^2 + \cdots + \binom{2n+1}{2n+1}b^{2n+1}$$

ja

$$(a-b)^{2n+1} = a^{2n+1} - \binom{2n+1}{1}a^{2n}b + \binom{2n+1}{2}a^{2n-1}b^2 - \cdots - \binom{2n+1}{2n+1}b^{2n+1}.$$

Siten lausekkeissa $(\sqrt{50}+7)^{2n+1}$ ja $(\sqrt{50}-7)^{2n+1}$ on samat desimaaliosat, koska desimaaliosaa kertyy vain luvun $a=\sqrt{50}$ parittomista potensseista ja niillä on samat kertoimet ja etumerkit molemmissa lausekkeissa. Koska $\sqrt{50}-7 = 0{,}071\ldots < 10^{-1}$, niin lausekkeessa $(\sqrt{50}-7)^{2001}$ on ainakin 2001 nollaa desimaaliosan alussa. Siten myös luvun $(\sqrt{50}+7)^{2001}$ desimaaliosassa on ainakin 2001 nollaa desimaalipilkun jälkeen. Kysytyt ensimmäinen ja 2001. desimaali ovat siis nollia kumpikin.

2. Kolmion sivujen pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja. Yksi kolmion keskijanoista on kohtisuorassa erästä kolmion kulmanpuolittajaa vastaan. Määritä kolmion sivujen pituudet.

Ratkaisu. Olkoot kolmion ABC sivujen pituudet a, b ja c. Voimme olettaa, että mediaani AD ja kulman puolittaja BE leikkaavat toisensa kohtisuorasti pisteessä P. Kolmiossa BDA on silloin BP sekä kulman puolittaja että korkeusjana. Kolmio BDP on tasakylkinen. Mutta silloin $a=2c$. Koska $\{a,\,b,\,c\}$ on kolmen peräkkäisen kokonaisluvun joukko, $a-c$ on 1 tai 2. Jos $a-c=1$, $c=1$, $a=2$, jolloin $b=3$. Tällöin ABC ei ole kolmio. On siis oltava $a-c=2c-c=2$, $c=2$, $a=4$, $b=3$.

3. Kuutio K on leikattu 99:ksi pienemmäksi kuutioksi. Näistä vain yhdellä särmän pituus ei ole 1. Määritä kuution K tilavuus.

Ratkaisu. Jos alkuperäisen kuution särmä on x ja $y \neq 1$ on osakuution särmä, niin x:n ja y:n on oltava muiden keskenään samankokoisten osakuutioiden särmän monikertoja eli x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja. Lisäksi on oltava $x^3-y^3=98$ eli $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 98 = 2\cdot 7^2$. Koska $x-y < x^2+xy+y^2$, on oltava joko $x-y=1$ ja $x^2+xy+y^2=98$, $x-y=2$ ja $x^2+xy+y^2=49$ tai $x-y=7$, $x^2+xy+y^2=14$. Ensimmäinen vaihtoehto johtaa yhtälöön $(y+1)^2+y(y+1)+y^3=98$ eli $3(y^2+y)=97$. Koska 97 ei ole jaollinen 3:lla, tämä ei käy. Kolmas vaihtoehto puolestaan johtaa yhtälöön $(y+7)^2+y(y+7)+y^2=14$, mikä selvästikin on mahdotonta ($14 < 7^2$). Keskimmäinen vaihtoehto vuorostaan johtaa yhtälöön $y^2 + 4y + 4 + y^2 + 2y + y^2 = 3y^2 + 6y + 4 = 49$ eli $y^2 + 2y - 15 = 0$. Tämän yhtälön ainoa positiivinen ratkaisu on $y = 3$. $x = 5$ ja $y = 3$ toteuttavat alkuperäisen yhtälön. Siis $x = 5$, ja K:n tilavuus on 125 yksikköä.

4. Määritä suurin kokonaisluku d, joka on kaikkien lukujen $n(n+1)(2n+2002)$, missä n on positiivinen kokonaisluku, tekijä.

Ratkaisu. Luvuista n ja $n+1$ toinen on parillinen. Jos $n \equiv 2 \mod 3$, niin $n+1$ on jaollinen 3:lla ja jos $n \equiv 1 \mod 3$, niin $2n + 2002 \equiv 2004 \equiv 0 \mod 3$. $n(n+1)(2n+2002)$ on siis aina jaollinen 12:lla. Tästä seuraa, että $d = 12k$, missä k on kokonaisluku. Jos $12k$ on tekijänä luvuissa $n(n+1)(2n+2002)$ ja $(n+1)(n+2)(2n+2004)$, se on tekijänä näiden lukujen erotuksessa, joka on $6(n+1)(n+668)$. $2k$ on siis tekijänä luvussa $(n+1)(n+668)$ kaikilla n erityisesti $2k$ on tekijänä luvuissa $(2k+1)(2k+668)$ ja $(2k+2)(2k+669)$. Koska $2k$:lla ja $2k+1$:llä ei ole yhteisiä tekijä, se on $2k+668$:n tekijä. Mutta $2k+668$:lla ja $2k+669$:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, joten $2k$ on $2k+2$:n tekijä. Silloin $2k$ on luvun 2 tekijä, joten $k = 1$. Siis $d = 12$.

5. Montako alkiota on suurimmassa joukon $A = \{1, 2, \ldots, 547\}$ sellaisessa osajoukossa, jossa minkään kahden luvun summa ei ole jaollinen 42:lla?

Ratkaisu. Olkoon A_i niiden A:n lukujen joukko, jotka ovat kongruentteja i:n kanssa modulo 42. Koska $547 = 13 \cdot 42 + 1$, niin A_1:ssä on 14 alkiota ja muissa joukoissa A_i on 13 alkiota. Jos A:n osajoukossa minkään kahden luvun summa ei ole jaollinen 42:lla, joukossa ei ole kahta lukua, joista toinen kuuluisi joukkoon A_i ja toinen joukkoon A_{42-i}. Joukossa ei myöskään ole kahta lukua, jotka molemmat kuuluisivat joukkoon A_0 tai A_{21}. Maksimaalisessa ehdot täyttävässä osajoukossa voi siis olla joukot $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ ja yksi luku joukosta A_0 ja yksi luku joukosta A_{21}. Maksimaalinen alkiomäärä on $14 + 19 \cdot 13 + 2 = 263$.

6. Ympyrät, joiden säteet ovat h ja k, sivuavat suoraa ℓ pisteissä A ja B. Ympyrät leikkaavat toisensa pisteissä C ja D. Todista, että kolmioiden ABC ja ABD ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet ovat samat. Määritä tämä säde.

Ratkaisu. Ratkaisu perustuu sinilauseen toistuvaan käyttöön. Voimme olettaa, että D on kolmion ABC sisäpiste. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle CAB = 180° - \angle ADC$ ja $\angle ABC = 180° - \angle CDB$. Olkoon R_C kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde. Sinilauseen nojalla kolmioista ADC ja ABC saadaan $AC = 2h\sin(\angle ADC) = 2h\sin(\angle CAB)$ ja $AC = 2R_C\sin(\angle ABC)$. Vastaavasti kolmioista CDB ja ABC saadaan $BC = 2k\sin(\angle CDB) = 2k\sin(\angle ABC)$ ja $BC = 2R_C\sin(\angle CAB)$. Kun yhtälöt $2h\sin(\angle CAB) = 2R_C\sin(\angle ABC)$ ja $2k\sin(\angle ABC) = 2R_C\sin(\angle CAB)$ kerrotaan keskenään, saadaan $R_C^2 = hk$. Olkoon R_D kolmion ABD ympäri piirretyn ympyrän säde. Nyt $\angle DAB = \angle DCA$ ja $\angle ABD = \angle BCD$. Kolmioista ADC ja ABD saadaan $AD = 2h\sin(\angle DCA = 2h\sin(\angle DAC) = 2R_D\sin(\angle ABD)$, kolmioista DBC ja ABD puolestaan $DB = 2k\sin(\angle BCD) = 2k\sin(\angle ABD) = 2R_D\sin(\angle DAB)$. Kun yhtälöt kerrotaan keskenään, saadaan $R_D^2 = hk$. Säteet R_C ja R_D ovat samat ja $= \sqrt{hk}$.

7. Olkoon positiivisten lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tulo 1. Osoita, että

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Ratkaisu. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} 1 &= (\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\sqrt{a_n})^{1/n} \\ &\leq \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}}{n}. \end{aligned}$$

Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} &(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n})^2 \leq n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &\leq (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n})(a_1 + a_2 + \cdots a_n). \end{aligned}$$

Väite saadaan tästä jakolaskulla.

8. Seurueen jokaisen neljän jäsenen joukossa on yksi, joka on tuttu kyseisten kolmen muun jäsenen kanssa. Todista, että seurueessa on ainakin yksi jäsen, joka on tuttu seurueen kaikkien muiden jäsenten kanssa.

Ratkaisu. Oletetaan, että seurueessa kukaan ei tunne kaikkia muita. Olkoon A eräs seurueen jäsen. Seurueessa on silloin ainakin yksi jäsen B, joka ei ole tuttu A:lle. Olkoot C ja D kaksi muuta seurueen jäsentä. Joukossa $\{A, B, C, D\}$ on ainakin yksi, joka tuntee muut kolme. Tämä yksi ei ole A eikä B, joten se on C tai D. Joka tapauksessa C ja D tuntevat toisensa. Koska C ja D ovat mielivaltaisia, tiedetään, että jos A ja B poistetaan seurueesta, kaikki muuta jäsenet tuntevat toisensa. Mutta joko C tai D tunsi sekä A:n että B:n ja niin muodoin kaikki seurueen jäsenet. Ristiriita, joka osoittaa alkuperäisen oletuksen virheelliseksi.

9. Varastossa on 2001 juustonpalaa. Todista, että on mahdollista leikata yksi paloista kahteen osaan niin, että palat voidaan kerätä kahteen säkkiin, joiden sisältö painaa yhtä paljon ja joissa on kummassakin yhtä monta palaa.

Ratkaisu 1. Olkoot juustonpalojen painot $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2001}$. Valitaan palat $a_1, a_3, \ldots, a_{1999}$ toiseen säkkiin ja palat $a_2, a_4, \ldots, a_{2000}$ toiseen. Säkkien painon erotus on

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{1000}(a_{2k} - a_{2k-1}) &= a_{2000} - \sum_{k=1}^{999}(a_{2k+1} - a_{2k}) - a_1 \\ &\leq a_{2000} - a_1 < a_{2000} \leq a_{2001}. \end{aligned}$$

Mutta näin ollen pala a_{2001} voidaan leikata kahdeksi palaksi, joiden painojen erotus on sama kuin säkkien painojen erotus. Kun raskaampi pala pannaan kevyempään säkkiin ja kevyempi raskaaseen, molemmat säkit tulevat yhtä painaviksi.

Ratkaisu 2. (***Janne Mansikkamäki***) Todistetaan induktiolla, että $2n-1$ juustonpalaa voidaan aina säkittää vaaditulla tavalla.

1°. Kun $n=1$, paloja on yksi, ja se voidaan jakaa kahdeksi yhtä suureksi palaksi.

2°. Oletetaan, että kun $n=k$, jako voidaan tehdä. Olkoon sitten $n=k+1$. Jaetaan ensin $2k-1$ palaa tehtävän mukaisesti kahteen säkkiin. Tällöin on yksi paloista jaettu kahdeksi osaksi. Olkoon sen paino x_1. Kun tämän palan osat poistetaan säkeistä, niissä on yhä yhtä monta palaa. Säkit painavat s_1 ja s_2. Oletetaan, että $s_1 \le s_2$. Huomataan, että $s_2 - s_1 < x_1$. Nyt säkkeihin on laittamatta kolme palaa. Niiden painot ovat x_1, x_2 ja x_3. Voidaan olettaa, että $x_1 \le x_2 \le x_3$. Jaetaan nyt suurin pala osiksi, joiden painot ovat d ja x_3-d. Osoitetaan, että d voidaan valita niin, että

$$s_1 + x_2 + d = s_2 + x_1 + (x_3 - d)$$

eli

$$d = \frac{(s_2-s_1)-(x_2-x_1)+x_3}{2}.$$

Koska $s_2-s_1 \le x_1$ ja $x_2-x_1 \le x_2$, niin $|(s_2-s_1)-(x_2-x_1)| < x_2 \le x_3$, joten todellakin $d < x_3$. Induktioaskel voidaan siis ottaa.

10. Kokonaislukukertoimisella n:nnen asteen ($n \geqslant 5$) polynomilla $P(x)$ on n eri kokonaislukunollakohtaa 0, x_2, x_3, …, x_n. Määritä polynomin $P(P(x))$ kokonaislukunollakohdat.

Ratkaisu. Tehtävän mukaan $P(x) = a_n x(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$, missä a_n on kokonaisluku. Osoitetaan, että $P(k) \ne x_i$ kaikilla $i \ge 2$ ja kaikilla kokonaisluvuilla k. Vastaoletukseksi voidaan asettaa $P(k) = x_2$ jollain kokonaisluvulla k. Silloin k on x_2:n tekijä, eli $x_2 = kt$ jollain kokonaisluvulla t. Edelleen silloin $a_n k(1-t)(k-x_3)\cdots(k-x_n) = t$, joten $1-t$ on t:n tekijä. Silloin joko $t=0$ tai $t=2$. Jos $t=0$, $x_2=0$, mikä ei ole tehtävän ehtojen mukaan mahdollista. Siis $t=2$ ja $a_n k(k-x_3)(k-x_4)\cdots(k-x_n) = -2$. Luvut k, $k-x_3$, $k-x_4$, …, $k-x_n$ ovat kaikki eri lukuja ja luvun -2 tekijöitä. Koska viimeinen ehto toteutuu vain, kun luvut kuuluvat joukkoon $\{-2, -1, 1, 2\}$, on oltava $n=5$ ja $|a_n k(k-x_3)(k-x_4)(k-x_5)| \ge 4$. Ristiriita. Siis $P(x) \ne x_i$, joten $P(P(x)) = 0$ vain, kun $P(x)=0$ eli x on jokin P:n nollakohdista 0, x_i.

11. Veljekset möivät n lammasta hintaan n euroa/lammas. Rahat jaettiin niin, että vanhempi veli otti ensin 10 euroa, sitten nuorempi otti 10 euroa jne., kunnes oli nuoremman veljen vuoro ottaa rahaa, jota ei kuitenkaan enää ollut kymmentä euroa. Tällöin sovittiin, että nuorempi veli saa loput rahat sekä vanhemman linkkuveitsen, ja jako menee tasan. Minkä arvoinen oli linkkuveitsi?

Ratkaisu. Veljekset saivat n^2 dollaria. Olkoon $n = 10a + b$. Silloin $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Kertomuksen mukaan $n^2 = (2k+1)\cdot 10 + y$. Luvun b^2 on oltava muotoa $(2m+1)\cdot 10 + y$. Mutta kymmentä pienempien lukujen neliöistä tätä muotoa ovat vain 16 ja 36. Koska viimeisessä jakovaiheessa vanhempi veli sai 10 dollaria ja nuorempi siis 6, täytyy linkkuveitsen arvon olla 2 dollaria.

12. Reaaliluvut a ja b toteuttavat yhtälöt

$$a^3 - 3ab^2 = 20, \quad b^3 - 3a^2 b = 40.$$

Määritä $a^2 + b^2$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 2000 &= 400 + 1600 = 20^2 + 40^2 \\ &= (a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2 \\ &= a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 + b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 \\ &= a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = (a^2+b^2)^3. \end{aligned}$$

Siis $a^2 + b^2 = \sqrt[3]{2000}$.

13. Olkoon

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Osoita, että $a_n = 2 + a_{n-1}$ silloin ja vain silloin, kun n on alkuluku.

Ratkaisu. Kirjoitetaan yhtälö $a_n = 2 + a_{n-1}$ muotoon

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \\ &= 2 + \left\lfloor \frac{n-1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n-1}{n-1} \right\rfloor \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n-1} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n-1}{n-1} \right\rfloor. \end{aligned} \tag{1}$$

Selvästi kaikilla k, $2 \le k \le n-1$ on $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \ge \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$, joten

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n-1} \right\rfloor \\ &\ge \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n-1}{n-1} \right\rfloor. \end{aligned} \tag{2}$$

Jos $n = ab$, $2 \le a < n$, niin $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = b > \left\lfloor \frac{n-1}{a} \right\rfloor$. Tällöin (2):ssa on aito erisuuruus, joten (1) ei toteudu.

Mutta jos n on alkuluku, on kaikilla k $n = qk + r$, missä $1 \leq r < k$. Silloin kaikilla k on $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = q = \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$, ja (1) toteutuu.

14. Todista, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n luku $2^n + n^2$ on jaollinen 5:llä silloin ja vain silloin, kuin luku $n^2 \cdot 2^n + 1$ on jaollinen 5:llä.

Ratkaisu. Jos $n = 5k$, niin kumpikaan luvuista $2^n + n^2$ ja $n^2 \cdot 2^n + 1$ ei ole jaollinen 5:llä. Jos $n = 5k \pm 1$, niin $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ on jaollinen 5:llä. Koska $n^2 2^n + 1 = (2^n - 1)(n^2 - 1) + 2^n + n^2$, ja $n^2 2^n + 1$ ja $2^n + n^2$ ovat samanaikaisesti 5:llä jaollisia. Jos $n = 5k \pm 2$, $n^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1$, joten $n^2 + 1$ on jaollinen 5:llä. Mutta $n^2 2^n + 1 = (2^n + 1)(n^2 + 1) - 2^n - n^2$, ja $n^2 2^n + 1$ ja $2^n + n^2$ ovat jälleen samanaikaisesti 5:llä jaollisia.

15. Määritä kaikki alkuluvut n, joiden kymmenjärjestelmäesitys on $n = 10101\ldots01$.

Ratkaisu. Tehtävän luvut ovat muotoa

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 10^{2k},$$

missä $n \geq 2$ on luvussa olevien ykkösten määrä. Jos n on parillinen, a_n on jaollinen 101:llä. 101 on itsessään alkuluku. Jos $n = 2p + 1$, niin

$$\begin{aligned} 11a_n &= \sum_{k=0}^{2p} 10^{2k+1} + \sum_{k=0}^{2p} 10^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{4p+1} 10^k = (10^{2p+1} + 1) \sum_{k=0}^{2p} 10^k. \end{aligned}$$

Jos $p \geq 1$, niin oikean puolen molemmat tekijät ovat > 11, joten a_n ei voi olla alkuluku. Siis 101 on ainoa vaadittua muotoa oleva alkuluku.