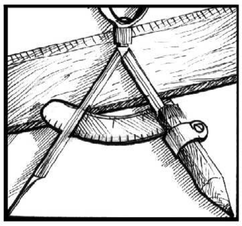


Suoran määritelmä – se on...

Timo Tossavainen
Lehtori
Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

Henkilö, jolla on aikaa selailla geometrian oppikirjoja, saattaa kiinnittää huomiota hieman erikoiseen ilmiöön: nykyisin juuri missään kirjassa ei sanota mikä tai millainen olio suora tarkkaan ottaen on. Kyse ei ole tahattomasta vahingosta eikä siitä, että jokainen kirjantekijä olettaisi kaikkien ilman muuta ymmärtävän tämän käsitteen, vaan pikemminkin nykyisten kirjantekijöiden matemaattisesta valistuneisuudesta. Nimittäin, aiheesta enemmän kiinnostuva henkilö huomaa pian, ettei suoran määritteleminen ole lainkaan triviaali asia, jos käytettävissä ei ole analyyttisen geometrian käsitteitä. Ennen pitkää mieleen voi jopa tulla epäilys siitä, onkohan suoran matemaattinen määritteleminen tällä tavalla edes mahdollista – tai edes tarpeellista.

Varhaisempien oppikirjojen tekijät ovat olleet nykyisiä kollegoitaan rohkeampia ilmoittamaan mikä suora on. Tarkastelemme seuraavaksi joitakin yrityksiä määritellä tai muuten kuvailla suoran käsite ja pohdimme niihin mahdollisesti liittyviä ongelmia.

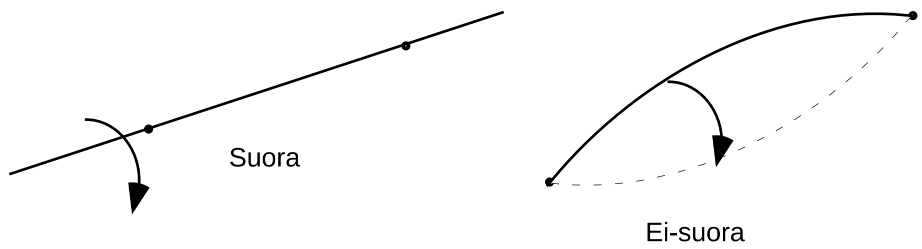
Eukleideen mielestä suora on olio, jota me kutsuisimme janaksi. Hänen klassikkokirjansa *Alkeet* alkusivuilla ilmoitetaan (vapaasti suomennettuna) muun muassa: ”Piste on se, millä ei ole mitään ulottuvuutta... Viiva on pituus vailla leveyttä... Suora on viiva, jonka pisteet ovat tasaisesti toisiinsa nähden.” Tällä ilmaisulla tarkoitettaneen jotain samankaltaista, mitä kirvesmies sanoisi laudansärmää katsoessaan ja todetessaan, ettei särmä ole kiemurteleva.

Eukleideen Alkeissa olevaa ilmaisua ei epämääräisyytensä takia voida käyttää matemaattisena suoran (eikä janan) määritelmänä, mutta kirjan kirjoittajan kunniaksi onkin sanottava, ettei kyseistä ilmaisua kenties ole edes tarkoitettu varsinaiseksi määritelmäksi. Alkeiden geometriaa koskevassa osuudessa nojaudutaan kyllä monessa kohdin havaintoon, mutta itse asiassa päättely ei perustu siihen, mitä suorasta yllä sanotaan. Tästä voidaan päätellä, että kirjantekijä lienee vain halunnut kuvailla minkälaiseksi kirjassa tarkasteltavan geometrian eräs perusolio voidaan sen konkreettisessa mallissa kuvitella.

Aikoinaan keskikoulussa eniten käytetyssä geometrian oppikirjassa suoraa kuvaillaan seuraavalla tavalla. ”Tarkastellessamme erilaisia kappaleita, havaitsemme, että kaikkia niitä rajoittaa joka puolelta *pinta*... Kahden pinnan rajakohtaa sanomme *viivaksi*... Viivoista tärkein on *suora viiva* eli *suora*. Siitä saamme jonkinlaisen käsityksen, jos vedämme langan kireäksi. On kuitenkin muistettava, että matemaattinen suora jatkuu rajattomasti kumpaankin suuntaan, eikä sillä ole paksuutta.” (Kallio-Malmio-Apajalahti: *Geometria*, 12. painos, 1957)

Tätäkään ilmaisua ei liene tarkoitettu varsinaiseksi määritelmäksi, sillä siinä nojaudutaan havainnollisuuteen jopa enemmän kuin Alkeissa. Jos pinnan ja viivan käsitteet vielä armollisesti hyväksytäänkin, ja vaikka kireä lanka toisaalta antaakin hyvän mielikuvan janasta, niin voidaan silti kysyä millä tavalla suora jatkuu rajatta molempiin suuntiin. Ja ennen kaikkea: mihin suuntiin? Ilmeisesti juuri määriteltävän suoran molempiin suuntiin, joten kyse on kehäajattelusta. Sitä paitsi pelkästään havainnollisuuteen vetoamisella on omat huonot puolensa. Käytännössä kireäksi vedetty pitkähkö lanka usein taipuu hieman kaarevaksi painovoiman vaikutuksesta ja tällaista janaa "rajattomasti jatkamalla" saadaan sulkeutuva suora, mikä ei liene kirjantekijöiden ilmaisun tarkoitus.

Neovius-Nevanlinnan *Alkeisgeometrian oppikirjassa* toimitaan hieman ovelammin kuin äskeisessä esimerkissä: "*Pisteellä* tarkoitetaan paikkaa eli kohtaa, jolla ei ole mitään ulottuvuutta. Liikkeessä olevan pisteen muodostamaa uraa sanotaan *viivaksi*... *Suoraksi viivaksi* eli *suoraksi* sanotaan semmoista viivaa, joka ei muuta asemaansa pyöriessään siten, että kaksi sen pistettä pysyy paikoillansa." (8. painos, 1926)



Toisin sanoen yhtenäinen pistejoukko on suora, jos sen pyöriessä avaruudessa siten, että kaksi sen pistettä pysyy paikallaan, ovat sen kaikki pisteet kiintopisteitä. Tämän havainnollisen määritelmän etuna on selkeys ainakin siinä mielessä, että mikään "ei-suora" viiva ei käy suorasta. Esimerkiksi ympyrän kaaren pyöriessä siten, että sen päätepisteet pysyvät paikallaan, muuttaa muu osa kaarta asemaansa. Silti myös Neovius-Nevanlinnan määritelmä sisältää ongelmia. Mitä viivan pyöriminen tarkkaan ottaen tarkoittaa, on hankalasti määriteltävissä alkeismatematiikan avulla. Onko suora äärellinen vai ääretön viiva, se ei ole ilmeistä määritelmän nojalla. Lisäksi ongelmana voidaan pitää sitä, että pyöriminen edellyttää kolmiulotteisen perusavaruuden olemassaoloa, muutenhan viiva ei mahdu pyörimään kahden kiintopisteensä ympäri. Lisäksi ainakin uudemmalle kielelle käännettynä määritelmä kuulostaa hieman kehäajattelulta: viiva on suora, jos se pyörii niin kuin suora.

On mielenkiintoista nähdä, mitä ensimmäisessä suomalaisessa tietosanakirjassa *Tietosanakirja* 1910-luvulla suoran määritelmästä sanotaan. Aluksi suoran määritteleminen todetaan hankalaksi asiaksi, minkä jälkeen määritelmä kuitenkin annetaan melkein samoilla sanoilla kuin Neovius-Nevanlinnan teoksessa: "Kappaleen kääntyessä kahden kiinteäksi ajatellun pisteen ympäri pysyy joukko muitakin kappaleen pisteitä paikoillansa. Kaikki nämä pisteet yhdessä muodostavat suoran." Tämän jälkeen kirjoittaja ilmoittaa, että suorasta on tehty aikoinaan (!) paljon epäpäteviä määritelmiä. "Epätyydytyttävä on esim. määritelmä: 'Suora (siis nykykielellä jana) on kahden pisteen lyhin väli', koska suoran mittaaminen edellyttää, että käsite suora on edeltäpäin selvitetty. Ei suora myöskään ole määriteltävissä viivana, jonka kaiken aikaa samaa pistettä kohti suuntaansa muuttamatta kulkeva piste muodostaa, sillä suuntaa ilmaistaan juuri suoralla."

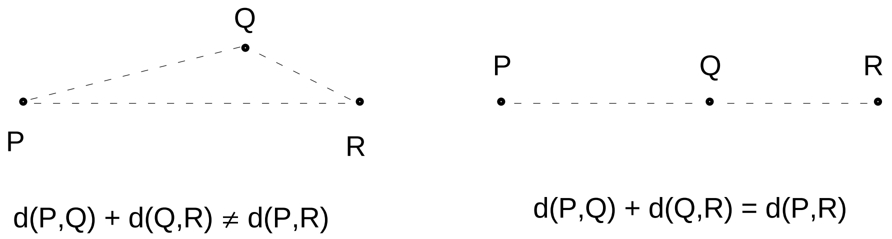
Noin 50 vuotta myöhemmin Lauri Myrberg kirjoittaa *Encyclopædia Fennicassa*: "suora viiva, geometrian peruskäsite, joka ei ole määriltetävissä... Suora voidaan erottaa muista geometrian käsitteistä siihen liitettyjen perusominaisuuksien nojalla. Sellainen on esim. euklidisessa geometriassa käytetty lause, että suoran määrää kaksi sen pistettä."

Myrbergin käsitys asiasta edustaa nykyisten matemaatikkojen varsin yksimielistä mielipidettä, ettei suoraa voida määritellä tyydyttävällä tavalla. Tämä ei kuitenkaan ole geometrian kannalta mikään ongelma, sillä geometrian tutkimuksen kohteena eivät ole suorat ja pisteet sinänsä, vaan näiden väliset suhteet erilaisissa malleissa. Erilaisia malleja geometriaan syntyy esimerkiksi sen mukaan oletetaanko ns. paralleeliaksiooma vai ei. Edes kaikissa tasogeometrian malleissa suorien ei tarvitse olla samannäköisiä viivoja. Esimerkiksi eräässä hyperbolisessa geometriassa suoria vastaavat yksikköympyrän sisään piirretyt ja sen reunaa vasten kohtisuorassa olevat ympyräkaaret.

Peruskoulusta ja lukion geometrian kurssista tutun tasogeometrian täydellisimpänä matemaattisena esityksenä pidetään David Hilbertin noin sata vuotta sitten konstruoimaa aksiomaattista systeemiä. Tässä systeemissä käsite suora jätetään kokonaan määrittelemättä, sillä koko konstruktion lähtökohtana on se, että on olemassa kolmenlaisia, mitenkään tarkemmin määrittelemättömiä olioita, joita sanotaan pisteiksi, suoriksi ja tasoiksi, ja näiden välillä vallitsee tiettyjä suhteita, joita kuvaamaan asetetaan noin 20 aksioomaa. Aksioomasysteemi vastaa loogisesti täysin moitteetta sitä geometrian mallia, jota jo Eukleides aikoinaan tarkasteli. Hilbertin systeemin etuna on se, ettei käsitteisiin suora ja piste tarvitse liittää minkäänlaista havainnollista mielikuvaa. Näin ollen geometristen teoreemojen todistuksiin ei jää sellaisia epämääräisiä kohtia, joita havaintoihin nojautuvaan päättelyyn tahtoo väistämättä jäädä. Toinen merkittävä etu selkeyden lisäksi on teorian yleistyminen. Aksiomaattinen lähestymistapa sallii nimittäin senkin, että voimme hyvin erilaisten objektien avulla rakentaa malleja, jotka vastaavat loogisesti tuttua koulugeometrian maailmaa. On esimerkiksi mahdollista laatia malleja, joissa suoria vastaavat pöydät ja pisteitä tuolit – tai päinvastoin! Näennäisestä erilaisuudesta huolimatta kaikki loogisesti ekvivalentit geometrian mallit hallitaan kuitenkin samoilla aksioomilla.

Puhtaasti aksiomaattista lähestymistapaa on käytännössä mahdotonta toteuttaa geometrian kouluopetuksessa, sillä Hilbertin aksioomajärjestelmän ymmärtäminen edellyttää pitkälle meneviä tieteellisiä opintoja. Niinpä nykyisissä koulukirjoissa jatketaankin perinnettä, jossa geometristen peruskäsitteiden välisiä suhteita tarkastellaan sekä havaintoihin että täsmälliseen päättelyyn perustuen. Hilbertin työstä tietoiset kirjantekijät kuitenkin näkevät nykyisin parhaaksi jättää suoran kokonaan määrittelemättä, sillä nykyvaatimusten mukaan tämä ei ole ehkä edes mahdollista eikä ainakaan välttämätöntä.

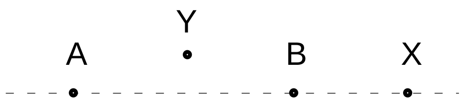
Jos euklidisen tasogeometrian deduktiivisessa opetuksessa halutaan esittää jonkinlainen suoran määritelmä, voidaan hyvin käyttää esimerkiksi Neovius-Nevanlinnan määritelmää. Toinen vaihtoehto voisi olla suoran määrittely etäisyyden käsitteen avulla.



Tason *kolme pistettä on samalla suoralla*, jos ne voidaan nimetä kirjaimilla P, Q ja R siten, että

$$d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R),$$

missä $d(X,Y)$ on pisteiden X ja Y välinen etäisyys mitattuna euklidisen periaatteen mukaisesti eli ikäänkuin venymätöntä mutta taipuisaa mittanarua käyttäen. Tällöin *suora pisteiden A ja B kautta* on niiden pisteiden X joukko, jotka ovat samalla suoralla pisteiden A ja B kanssa.



Kuvassa piste X kuuluu pisteiden A ja B määräämälle suoralle, sillä nimeämällä pisteet uudelleen esimerkiksi $A \to P$, $B \to Q$ ja $X \to R$ nähdään, että ehto $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$ toteutuu. Sen sijaan pisteitä A, B ja Y ei voida nimetä uudelleen siten, että samalla suoralla olemisen ehto täyttyisi. Näin ollen Y ei kuulu pisteiden A ja B määräämälle suoralle.

Yllä olevan määritelmän etuna on ainakin se, ettei tarvitse olettaa tasoa laajempaa perusavaruutta. Toisaalta etäisyyden mittaaminen euklidisen periaatteen nojalla lienee ainakin jossain määrin luonnollista ihmismielelle, joten havainnollinen ilmaisu tuskin johtaa kovin väärään mielikuvaan suorasta. Lisäksi määritelmästä selvästi seuraa, että kaksi pistettä määrää suoran yksikäsitteisellä tavalla. Lukijan tehtäväksi jääköön etsiä määritelmään liittyvät ongelmat.