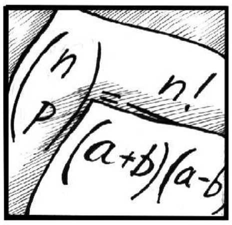

Solmun tehtävien ratkaisuja

Matti Lehtinen

Esitetään Solmun 1/2002 tehtävien 16–30 ratkaisut; tehtävien 1–15 ratkaisut esitettiin edellisessä numerossa 2/2002.

16. Määritä kymmenjärjestelmässä kirjoitetun luvun 2001^{2001} numeroiden summan numeroiden summan numeroiden summa.

Ratkaisu. Olkoon $S(n)$ luvun n numeroiden summa ja olkoon $2001^{2001} = k$. Koska $2001^{2001} < \left(10^4\right)^{2001} = 10^{8004}$, luvussa k on enintään 8004 numeroa. Siis $S(k) \leq 9 \cdot 8004 = 72036$. Näin ollen $S(S(k)) \leq 7 + 4 \cdot 9 = 43$ ja $S(S(S(k))) \leq 3 + 9 = 12$. Mutta $S(n) \equiv n \pmod 9$. Koska $2001 \equiv 0 \pmod 3$, $k \equiv 0 \pmod 9$. Silloin myös $S(S(S(n))) \equiv 0 \pmod 9$. Ainoa mahdollisuus on, että $S(S(S(k))) = 9$.

17. Olkoon p kaikkien sellaisten funktioiden lukumäärä, jotka on määritelty joukossa $\{1, 2, \ldots, m\}$, m positiivinen kokonaisluku, ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, 35, 36\}$ ja olkoon q kaikkien sellaisten funktioiden lukumäärä, jotka on määritelty joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$, n positiivinen kokonaisluku, ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Määritä $|p - q|$:n pienin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. Tehtävän oletusten mukaan $p = 36^m$ ja $q = 5^n$. Tarkastellaan ensin tapauksia $p > q$. Luku $36^m - 5^n$ päättyy ykköseen. Jos olisi $36^m - 5^n = 1$, olisi $5^n = 36^m - 1 = (6^m - 1)(6^m + 1)$. Koska luku $6^m + 1$ päättyy seitsemään, se ei voi olla tekijänä luvussa 5^n. Siis $36^m - 5^n \geq 11$. Mutta yhtälöllä $36^m - 5^n = 11$ on ratkaisu $m = 1$, $n = 2$. Tarkastellaan tapauksia $p < q$. Luku $5^n - 36^m$ päättyy yhdeksään. Mutta jaollisuus estää, että olisi $5^n - 36^n = 9$. Siis $|p - q|$:n minimiarvo on 11.

18. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$ ei-positiivisia lukuja. Todista, että

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{2001}} \leqslant 2000 + 2^{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2001}}.$$

Ratkaisu. Osoitetaan induktiolla, että

$$(1) \qquad 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_n} \leq n - 1 + 2^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Väite pätee, kun $n = 2$: koska $(1 - 2^{a_1})(1 - 2^{a_2}) \geq 0$, niin $2^{a_1} + 2^{a_2} \leq 1 + 2^{a_1 + a_2}$. Oletetaan, että (1) on tosi. Silloin samasta syystä kuin edellä

$$\begin{aligned} 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{n+1}} &\leq n - 1 + 2^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} + 2^{a_{n+1}} \\ &\leq n + 2^{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}}. \end{aligned}$$

19. Neliön $ABCD$ sivun pituus on 1. Olkoon X mielivaltainen sivun AB ja Y mielivaltainen sivun CD piste ja olkoot M XD:n ja YA:n leikkauspiste ja N XC:n ja YB:n leikkauspiste. Määritä ne pisteet X ja Y, joille nelikulmion $XNYM$ ala on suurin mahdollinen.

Ratkaisu. Kolmiot BNX ja YNC ovat yhdenmuotoiset.Oletetaan, että $BX \geq CY$. Silloin $XN \geq NC$, ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $BX = CY$. Olkoon P se janan NX piste, jolle $NP = NC$.

Silloin $|BNP| = |BNC|$, $|YPN| = |YNC|$ ja $|BPX| \ge |YXP|$ (yhtäsuuruus vain, kun $BX = CY$). Lisäksi $|XNY| = |XBY| - |XBN| = |XBC| - |XBN| = |BNC|$. Siis $|BNX| + |YNC| = |BPX| + |BNP| + |YNC| \ge |YXP| + |BCN| + |YPN| = |XNY| + |BCN| = 2|XNY|$. Samankokoiset kolmiot XNY ja BCN peittävät alle puolet puolisuunnikkaasta $XBYC$, joten $|XNY| \le \frac{1}{4}|XBCY|$. Samoin osoitetaan, että $|XYM| \le \frac{1}{4}|AXYD|$. Siis $|XNYM| \le \frac{1}{4}$. Yhtäsuuruus pätee edellisten tarkastelujen mukaan silloin ja vain silloin, kun $XB = YC$.

20. Suunnikkaan $ABCD$ sivun AD keskipiste on E ja F on pisteen B kohtisuora projektio suoralla CE. Osoita, että ABF on tasakylkinen kolmio.

Ratkaisu. Leikatkoon CE suoran AB pisteessä G. Koska $AE = ED$, kolmiot AEG ja DEC ovat yhteneviä. Siis $AG = CD = AB$. Koska GBF on suorakulmainen kolmio, sen ympäri piirretyn ympyrän halkaisija on hypotenuusa GB ja ympyrän keskipiste GB:n keskipiste A. Siis $AB = AF$, ja ABF on tasakylkinen.

21. Pisteet A, B, C ja D ovat pallon pinnan eri pisteitä. Janat AB ja CD leikkaavat toisensa pisteessä F. Pisteet A, C ja F ovat yhtä etäällä pisteestä E. Osoita, että suorat BD ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Ratkaisu. Pisteet A, B, C ja D ovat samalla ympyrällä Γ ja samassa tasossa τ. Olkoon O pisteen E projektio tasolla τ. Suorakulmaiset kolmiot EOA, EOC ja EOF ovat yhteneviä, joten O on kolmion AFC ympäri piirretyn ympyrän Γ_1 keskipiste. Leikatkoon suora OF Γ_1:n myös pisteessä G ja suoran BD pisteessä H. Ympyröiden Γ ja Γ_1 kehäkulmista saadaan $\angle HBA = \angle DCA = \angle FGA$. Kolmiot HBF ja AGF ovat yhdenmuotoiset. Koska FG on Γ_1:n halkaisija, $\angle GAF = \angle BHF = 90°$. Koska $EO \perp \tau$ ja siis $EO \perp BD$, niin tason EGF kaksi suoraa on kohtisuorassa BD:tä vastaan. Täten BD on kohtisuorassa tasoa EGF vastaan ja erityisesti $BD \perp EF$.

22. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä on Γ. Olkoon P piste Γ:n sisäpuolella. Olkoot X, Y ja Z ne pisteet, joissa suorat AP, BP ja CP myös leikkaavat Γ:n. Määritä ne pisteet P, joille XYZ on tasasivuinen kolmio.

Ratkaisu. Piste P ei voi olla kolmion ABC ulkopuolella. Jos P olisi esim. lyhyemmän kaaren AB määrittämässä segmentissä, olisi se kaarista XY, joka ei sisällä pistettä Z, suurempi kuin $180°$. Olkoon siis P sellainen ABC:n sisäpiste, että kolmio XYZ on tasasivuinen. Kolmiosta APY saadaan $\angle APB = \angle PAY + \angle PYA = \angle XZY + \angle ACB = \angle ACB + 60°$. Samoin saadaan $\angle BPC = \angle BAC + 60°$ ja $\angle CPA = \angle CBA + 60°$. Mutta tunnetusti niiden pisteiden joukko, joista annettu jana näkyy annetussa kulmassa koostuu kahdesta ympyränkaaresta janan eri puolilla. Kolmion ABC sisällä on siten enintään yksi tehtävän ehdon toteuttava piste P. Tällainen piste myös on olemassa, koska edellä saatu kulmaehto merkitsee, että mainitut kaaret ovat kokonaan kolmion sisällä ja siis leikkaavat toisensa.

23. n kiveä asetetaan yhdeksi tai useammaksi kasaksi. Mikä on eri kasoissa olevien kivien lukumäärien tulon suurin mahdollinen arvo?

Ratkaisu. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_k$ positiivisia kokonaislukuja, joiden summa on n. Tehtävä on maksimoida tulo $x_1 x_2 \cdots x_k$. Eri vaihtoehdot läpikäymällä havaitaan, että jos $1 \le n \le 4$, maksimi on n ja se saadaan, kun $k = 1$. Olkoon $n \ge 5$. Maksimitapauksessa ei voi olla $x_j = 1$, koska tulo suurenisi, jos jokin x_i korvattaisiin $x_i + 1$:llä ja x_j jäisi pois. Myöskään mikään x_j ei ole > 4, koska jos $x > 4$, niin $2(x-2) = 2x - 4 > 0$; tulo suurenisi, jos x_j korvattaisiin luvuilla 2 ja $x_j - 2$. Minkään x_j:n ei tarvitse olla 4, sillä $x_j = 4$, tulo ei muutu, jos x_j korvataan kahdella 2:lla. Lisäksi $x_j = 2$ enintään kahdella j:n arvolla, koska $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, mutta $3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$. Maksimitilanteessa on siis vain lukuja $x_j = 3$ ja $x_j = 2$; jälkimmäisiä enintään kaksi kappaletta. Maksimitulot ovat siten seuraavat: jos $n = 3m$, maksimi on 3^m, jos $n = 3m + 1$, maksimi on $4 \cdot 3^{m-1}$, jos $n = 3m + 2$, maksimi on $2 \cdot 3^m$. Jos $n = 1$, maksimi on 1.

24. Määritellään lukujonot (a_n) ja (b_n) seuraavasti: $a_1 = 9$, $b_1 = 3$, $a_{k+1} = 9^{a_k}$, $b_{k+1} = 3^{b_k}$, kun $k = 1, 2, \ldots$ Määritä pienin n, jolle $b_n > a_{2001}$.

Ratkaisu. Jos $3^p > 3^q$, niin $3^p \ge 3^{q+1} > 2 \cdot 3^q$. Osoitetaan induktiolla, että $b_k < a_k < b_{k+1}$ kaikilla k. Väite pätee, kun $k = 1$: $b_1 = 3 < 9 = a_1 < 3^3 = b_2$. Oletetaan, että $b_k < a_k < b_{k+1}$. Silloin $3^{b_k} > a_k = 9^{a_{k-1}} = 3^{2a_{k-1}}$, joten $b_{k+1} > 2a_k$. Näin ollen $a_{k+1} = 9^{a_k} > 3^{a_k} > 3^{b_k} = b_{k+1}$ ja $a_{k+1} = 9^{a_k} = 3^{2a_k} < 3^{b_{k+1}} = b_{k+2}$. Tästä seuraa, että $b_{2001} < a_{2001} < b_{2002}$, joten tehtävän vastaus on $n = 2002$.

25. Tasossa on annettuina 2000 pistettä. Osoita, että pisteet voidaan yhdistää pareittain 1000 janalla, jotka eivät leikkaa toisiaan.

Ratkaisu. Jos pisteet yhdistetään pareittain 1000 janalla niin, että janojen pituuksien summa on mahdollisimman pieni, niin janat eivät leikkaa toisiaan. Jos nimittäin AB ja CD leikkaisivat pisteessä P, olisi $AB + CD = AP + PB + CP + PD > AC + BD$.

26. Eräs tehdas tuottaa samankokoisia säännöllisiä tetraedreja. Tehdas maalaa tetraedrinsa neljällä värillä A, B, C ja D, kukin tahko omallaan. Montako erilaista tetraedria on mahdollista tuottaa?

Ratkaisu. Olkoot värit $\{A, B, C, D\}$. Väritetty tetraedri voidaan aina kääntää niin, että pohjan väri on A ja että B-väri osoittaa esim. etelään. Silloin on vain kaksi mahdollisuutta sijoittaa C- ja D-värit: C luoteeseen ja D koilliseen tai päinvastoin. Erilaisia tetraedriväterityksiä on siis vain kaksi.

27. Maalaiskoulussa on 20 lasta. Jokaisella kahdella lapsella on yhteinen isoisä. Todista, että eräällä isoisällä on ainakin 14 lastenlasta.

Ratkaisu. Olkoot A ja B X:n isoisät. Olkoon lapsista kaikkiaan k kappaletta, $k \geq 1$, sellaisia, joiden isoisät ovat A ja B. Olkoon Y lapsi, jonka isoisät eivät ole A ja B. Kuitenkin toinen näistä on Y:n isoisä; olkoon toinen isoisä C ja toinen A. Lapsen Z toinen isoisä on joko A tai B ja toinen isoisä joko A tai C. Isoisiä on siis enintään 3, ja C on kaikkien niiden $20-k$:n lapsen isoisä, joiden isoisät eivät ole A ja B. Olkoon A:lla ja C:llä n yhteistä lapsenlasta; silloin B:llä ja C:llä on $20-k-n$ yhteistä lapsenlasta. Ainakin yksi luvuista k, n, $20-k-n$ on enintään 6. Jos esim. $k \leq 6$, niin C:llä on $(20-k-n)+n = 20-k \geq 14$ lapsenlasta.

28. Toisessa koulussa oli 13 tyttöä ja 10 poikaa. Opettaja jakoi namusia. Kaikki tytöt saivat keskenään yhtä monta ja kaikki pojat keskenään yhtä monta. Kukaan ei jäänyt ilman. Osoittautui, että tapa, jolla opettaja jakoi namuset, oli ainoa tapa, joka täytti edellä kuvatut ehdot. Montako namusta opettajalla enintään oli?

Ratkaisu. Jos namuja oli x ja jos jokainen poika sai a ja jokainen tyttö b namua, niin $13a+10b = x$. Yhtälön yksittäisratkaisu on $a = -3x$, $b = 4x$ ja yleinen ratkaisu $a = -3x+10t$, $b = 4x-13t$, missä t on mielivaltainen kokonaisluku. Koska $a > 0$ ja $b > 0$, on oltava $10t > 3x$ ja $13t < 4x$ eli $\frac{3x}{10} < t < \frac{4x}{13}$. Jos $\frac{4x}{13} - \frac{3x}{10} = \frac{x}{130} > 2$, tehtävällä on enemmän kuin yksi ratkaisu. Jos $x = 260$, ehto sievenee muotoon $78 < t < 80$. Tällöin ratkaisuja on vain yksi. Opettajalla oli enintään 260 namusta.

29. Todista, että

$$\frac{1}{668} + \frac{1}{669} + \cdots + \frac{1}{2002} = 1 + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2}{5\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \frac{2}{2000\cdot 2001\cdot 2002}.$$

Ratkaisu. Jaetaan $\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$ osamurtoihin: yhtälöstä

$$\begin{aligned}\frac{2}{(n-1)n(n+1)} &= \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1} \\ &= \frac{(n^2+n)A + (n^2-1)B + (n^2-n)C}{(n-1)n(n+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)n^2 + (A-C)n - B}{(n-1)n(n+1)}\end{aligned}$$

saadaan $B = -2$, $A = C$, $2A+B = 0$, $A = C = 1$. Siis

$$\begin{aligned}\frac{2}{(n-1)n(n+1)} &= \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} \\ &= -\frac{3}{n} + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Mutta näin ollen

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{667} \frac{2}{(3k-1)\cdot 3k\cdot(3k+1)} \\ &= -\sum_{k=1}^{667}\frac{3}{3k} + \sum_{m=2}^{2002}\frac{1}{m} = -1 + \sum_{m=668}^{2002}\frac{1}{m},\end{aligned}$$

mikä on sama kuin tehtävän väitös.

30. Olkoon $\mathbb{N}^*$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, joille $f(n+m) = f(n)f(m)$ kaikilla m, $n \in \mathbb{N}^*$ ja joille yhtälöllä $f(f(x)) = (f(x))^2$ on ainakin yksi ratkaisu $x \in \mathbb{N}^*$.

Ratkaisu. Olkoon $f(1) = a$, Silloin $f(n+1) = f(1)f(n) = af(n)$. Tästä seuraa induktiolla, että $f(n) = a^n$. Yhtälö $f(f(x)) = (f(x))^2$ on siis sama kuin $a^{a^x} = (a^x)^2 = a^{2x}$. Jos $a = 1$, yhtälön ratkaisuja ovat kaikki $x \in \mathbb{N}^*$. Jos $a \neq 1$, yhtälö saa muodon $a^x = 2x$. Ratkaisuja voi olla vain parillisilla a:n arvoilla. Jos $a > 2$, niin $a^n > 2^n \geq 2n$. Kun $a = 2$, yhtälöllä on ratkaisu $x = 1$. Tehtävällä on siis kaksi ratkaisua: $f(n) = 1$ kaikilla n ja $f(n) = 2^n$ kaikilla n.