Solmu

Matematiikkalehti
3/2002

http://solmu.math.helsinki.fi/

Solmu 3/2002

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

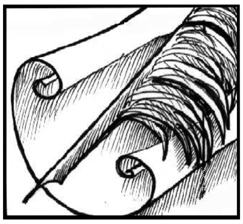
http://solmu.math.helsinki.fi/

Numeroon 1/2003 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 15. joulukuuta 2002 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys



Pääkirjoitus

Todistaminen on asia, joka liittyy kiinteästi matematiikkaan. Usein todistuksen kohteena on jokin matemaattinen ongelma: olemme löytäneet sille ratkaisun, ja todistuksen tarkoituksena on perustella tämän ratkaisun pätevyys.

Matematiikassa voidaan myös todistaa asioita mahdottomiksi: tällaisia ongelmia ei voida lainkaan ratkaista. Tunnetuimmat esimerkit lienevät jo antiikin kreikkalaisia askarruttaneet kysymykset ympyrän neliöimisestä[1] ja kuution kahdentamisesta[2] siten, että ratkaisussa käytetään vain harppia ja viivotinta. Näiden ongelmien täsmällinen muotoilu edellyttää tietysti sitä, että olemme huolellisesti määritelleet ne operaatiot, joita harpilla ja viivottimella on luvallista suorittaa. Todistus kyseisten operaatioiden mahdottomuudelle palautuu kuitenkin geometriasta lukujen maailmaan; esimerkiksi kuution kahdentamisen tapauksessa siihen, ettei lukua $\sqrt[3]{2}$ koskaan saada tulokseksi sellaisesta laskusta, jossa lähdetään liikkeelle kokonaisluvuista ja käytetään ainostaan yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskua sekä neliöjuuren ottamista.

Ammattimatematiikko törmää aina silloin tällöin henkilöihin, jotka eivät näitä todistuksia sulata. Tällainen asenne saattaa olla elämässä hyödyllinen, mutta ainakin matematiikan kohdalla vain tiettyyn pisteeseen saakka. Myös yllä mainittujen ongelmien kohdalla yrittäjiä riittää vielä kauan sen jälkeen, kun niiden mahdottomuus on todistettu, ja useimmiten itse päättelyssä ei ole muuta vikaa kuin se, ettei rajoitusta harpin ja viivottimen käyttämisestä ole ymmärretty oikein.

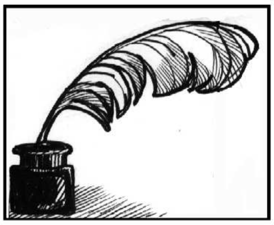
Tähän liittyy havainto siitä, kuinka tärkeää matematiikassa on pitää kiinni täsmällisistä määritelmistä. Ainoana tieteenalana matematiikka antaa lopullisia vastauksia, mutta vain kysymyksiin, jotka on muotoiltu täsmällisesti. Jos määritelmien tarkkuudesta annetaan periksi, niin matemaattisista väitteistä tulee mielipidekysymyksiä.

Itse opin ymmärtämään hyvien määritelmien tärkeyden oikeastaan vasta väitöskirjaa tehdessäni. Siihen saattoi vaikuttaa myös työni ohjaajan antama neuvo siitä, kuinka tutkimustyön pitäisi edistyä: ”Viikossa pitää todistaa yksi lause tai kaksi apulausetta, mutta hyvällä määritelmällä voi korvata lauseen.”

Pekka Alestalo

[1] Ympyrän säde on annettu, määritettävä sivun pituus sellaiselle neliölle, jolla on sama pinta-ala kuin ympyrällä.

[2] Kuution sivun pituus on annettu, määritettävä sivun pituus sellaiselle kuutiolle, jonka tilavuus on kaksinkertainen alkuperäiseen verrattuna.



Toimitussihteerin palsta

Kirjoitin Solmun edellisessä numerossa 2/2002 klassisesta todennäköisyydestä, jonka sovelluksena esitin loton päävoiton todennäköisyyden laskemisen. Pyysin Solmun lukijoita itse selvittämään loton muiden voittoluokkien todennäköisyydet ja lähettämään ratkaisut Solmun toimitukseen.

Koska ratkaisuja ei ole saapunut, lienee paikallaan antaa muutamia vihjeitä kysyttyjen todennäköisyyksien selvittämiseksi. Kirjoituksessani kaikkien mahdollisten rivien lukumääräksi saatiin

$$\binom{39}{7} = \frac{39!}{7!\,32!} = 15\,380\,937$$

ja tämän perusteella laskettiin täysosuman klassinen todennäköisyys $P_k(\text{"7 oikein"}) \approx 6{,}5 \cdot 10^{-8}$. On huomattava, että tässä yhteydessä kaikki muut numerot (myös lisänumerot, joita arvotaan kolme) tulkittiin "vääriksi numeroiksi".

Laskemme seuraavaksi klassisen todennäköisyyden voittoluokalle "kuusi oikein", jolloin rivissä on siis "yksi väärin". Seitsemästä oikeasta numerosta voidaan valita kuusi numeroa

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!\,1!} = 7$$

eri tavalla (tämä on 7-alkioisen joukon 6-*kombinaatioiden* lukumäärä). Vastaavasti 32 väärästä numerosta voidaan yksi numero valita

$$\binom{32}{1} = \frac{32!}{1!\,31!} = 32$$

eri tavalla. *Tuloperiaatteen* mukaan rivejä, joissa on kuusi oikein ja yksi väärin, on yhteensä $7 \cdot 32 = 224$ kappaletta. Näin ollen klassisen todennäköisyyden määritelmän perusteella

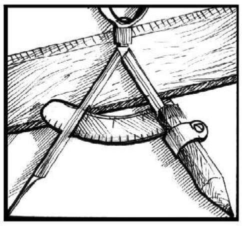
$$P_k(\text{"6 oikein"}) = \frac{224}{15\,380\,937} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Edellä esitetty *binomikerroin* $\binom{39}{7}$ ilmoittaa, kuinka monella tavalla 39 lottonumeroa voidaan jakaa kahteen osaan siten, että ensimmäiseen osaan tulee 7 "oikeaa numeroa" ja toiseen osaan 32 "väärää numeroa". Kun laskemme lisänumeroita sisältävien loton voittoluokkien todennäköisyyksiä, niin emme voi tulkita lisänumeroita oikeiksi emmekä vääriksi numeroiksi. Tällöin lottonumerot on jaettava kolmeen luokkaan, "oikeat numerot", "lisänumerot" ja "väärät numerot". Mahdollisten rivien lukumääräksi saadaan nyt tuloperiaatteella *multinomikerroin*

$$\binom{39}{7}\binom{32}{3}\binom{29}{29} = \frac{39!}{7!\,3!\,29!} = 76\,289\,447\,520.$$

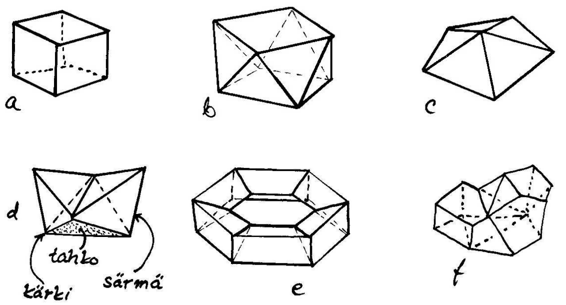
Näiden vihjeiden jälkeen jätän vielä jäljellä olevien voittoluokkien todennäköisyyksien laskemisen lukijoiden tehtäväksi. Odotamme jälleen ratkaisuehdotuksia Solmuun.

Mika Koskenoja



Monitahokkaiden topologiaa

Virpi Kauko
Assistentti
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto



Montako kuperaa deltaedriä on?

Monitahokas tarkoittaa tasomonikulmioiden rajaamaa kolmiulotteista joukkoa, tai myös tällaisista monikulmioista koostuvaa pintaa. (Tarvittaessa täsmennetään tarkoitetaanko kulloinkin umpinaista kappaletta vai sen onttoa kuorta.)

Monikulmio puolestaan on tasokuvio, jota reunustaa itseään leikkaamaton murtoviiva eli äärellinen määrä peräkkäin silmukaksi liitettyjä janoja (tai myös tällaisen tasoalueen reunaviiva).

Monitahokkaita voidaan luokitella erilaisten säännöllisyys- ym. ominaisuuksien perusteella, mutta on myös olemassa kaikille monitahokkaille yhteisiä ominaisuuksia.

Jokaisella tahokkaalla on tietty määrä *kärkiä* (K), kärkiä toisiinsa yhdistäviä *särmiä* (S) ja särmien reunustamia *tahkoja* eli monikulmioita (T). Vierekkäisten tahkojen tasot leikkaavat toisensa särmiä pitkin. Näiden kolmen suureen avulla määritellään monitahokkaan *Eulerin karakteristika* $K - S + T$, jota on tapana merkitä lyhyesti kreikkalaisella khi-kirjaimella χ. Esimerkiksi kuutiolla (kuva a) on $K = 8, S = 12, T = 6$ ja siten $\chi = 8 - 12 + 6 = 2$.

1. Tehtäviä. (a) Laske Eulerin karakteristika muille oheisen kuvan monitahokkaille ja keksi itse lisää esimerkkejä.

(b) Monikulmio tai monitahokas on *kupera* eli *konveksi,* jos sen kärkiä yhdistävät janat eivät joudu joukon ulkopuolelle. Mitkä oheisen kuvan monitahokkaista ovat kuperia?

(c) Monitahokasta sanotaan *deltaedri*ksi, jos sen kaikki tahkot ovat tasasivuisia kolmioita. Yksi sellainen on kuvassa d. Montako erilaista deltaedriä on olemassa? Entä montako kuperaa deltaedriä?

Tehtävän 1.c ehdot täyttäviä monitahokkaita voi etsiä ilman mitään lisätietoja, piirtämällä ja/tai leikkaamalla ja liimaamalla pahvikolmioita reunoistaan yhteen. Mutta mistä tiedetään, milloin kaikki ovat löytyneet?

Etsintää voi helpottaa huomaamalla muutaman yleisen säännönmukaisuuden.

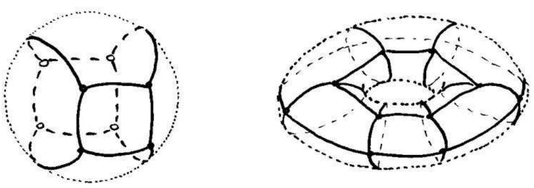
Tehtävän 1.a tehtyämme huomaamme, että $K - S + T = 2$ ainakin kaikille kuvan tahokkaille, paitsi mutterimaiselle kappaleelle (kuva e). Mahtaako tämä tulos päteä yleisemminkin? Miksi mutteri poikkeaa muista – voimmekohan todistaa teoreeman, jonka mukaan $\chi = 2$ kaikille ”epämutterimaisille” monitahokkaille? Tai toisaalta, mitä yhteistä on niillä tahokkailla, joille mainittu kaava pätee?

Eulerin monitahokaslause

2. Lause. Jokaiselle kuperalle monitahokkaalle pätee $\chi = K - S + T = 2$.

Tämä on klassinen Eulerin monitahokaslause. Itse asiassa kuperuus ei ole tässä *välttämätön ehto*, sillä väite pätee myös esimerkiksi kuvissa d ja f oleville ”lommoisille” tahokkaille. Etsimmekin toisentyyppisen luonnehdinnan, jonka avulla tulos on myös helpompi todistaa.

Tavoittelemamme monitahokkaat ovat tietyllä tavalla ”pallomaisia”. Määrittelemme tämän ominaisuuden tarkemmin kohta, mutta ensin selitämme idean: jos monitahokas ajatellaan valmistetun jäykän pahvin sijasta jostakin venyvästä ja taipuisasta materiaalista, sen voi pullistaa pyöreäksi. Mutteri pullistuu tällöin uimarenkaan muotoiseksi pinnaksi, *torukseksi*, kun taas kuvan muut tahokkaat muuttuvat *palloksi*. Pallo on kupera, torus ei. Palloa ei voi muuttaa torukseksi (eikä torusta palloksi) leikkaamatta siihen ensin reikiä.

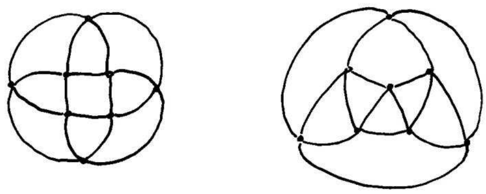


Jos kärjet ja särmät on merkitty tahokkaan muusta pinnasta poikkeavalla värillä, ne jäävät näkyviin pullistettuun pintaan *verkoksi*. Niiden lukumäärä ei selvästikään moisessa pullistelussa muutu, joten myöskään Eulerin karakteristika ei riipu siitä onko kyseessä teräväsärmäinen monitahokas vai sileällä pinnalla oleva verkko – tai siitäkään onko tahokas kupera vai lommoinen. Sillä sen sijaan on väliä, onko verkko pallon vai toruksen pinnalla, kuten mutteriesimerkki osoittaa.

Palloverkko

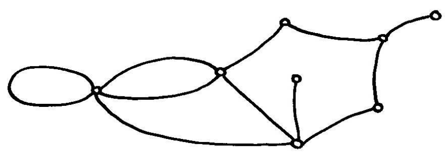
Laajemmassa mielessä *verkko* eli *graafi* on mikä tahansa kuvio, joka koostuu kärki- eli solmupisteistä ja niitä yhdistävistä, toisiaan leikkaamattomista särmistä. *Palloverkoksi* nimitetään tässä sellaista äärellistä ja yhtenäistä verkkoa, jonka kärjet ja särmät ovat pallopinnalla ja siis jakavat pallon ”tilkkuihin” eli tahkoihin. *Äärellisyys* tarkoittaa, että kärkiä, särmiä ja tahkoja on vain äärellisen monta kappaletta. *Yhtenäisyys* taas tarkoittaa, että verkon jokaisesta kärjestä pääsee särmiä myöten mihin tahansa muuhun kärkeen.

Puhkaisemalla palloverkon yhteen tahkoon reiän ja venyttämällä sitä verkon voi ”litistää” tasoon ilman että verkon kärkien ja niissä kohtaavien särmien ja tahkojen määrät muuttuvat.



3. Tehtäviä. (a) Yllä on eräs monitahokas – neliöpohjainen vinoprisma – levitetty auki tasograafiksi kahdella eri tavalla. Piirrä tai rakenna siitä kolmiulotteinen malli.

(b) Rakenna erilaisia palloverkkoja solmimalla lankaa paperimassa- tms. askartelupallon ympärille.



Jokaista kuperaa monitahokasta siis vastaa jokin palloverkko, mutta on myös sellaisia palloverkkoja joita ei vastaa mikään monitahokas. Palloverkossa nimittäin voi olla ”halkioita”, ”irtopäitä” ja ”yksi- ja kaksikulmioita”, toisin kuin monitahokkaassa. Nyt osaamme muotoilla väitteen, jonka haluamme todistaa:

4. Lause. Palloverkolle pätee $\chi = 2$.

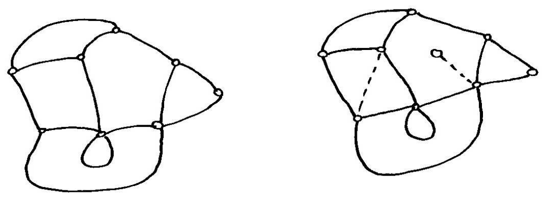
Todistus. Teemme eräänlaisen induktiopäättelyn: todistamme väitteen ensin mahdollisimman yksinkertaiselle palloverkolle, ja sitten osoitamme ettei $K - S + T$ muutu vaikka kärkiä tai särmiä lisättäisiin.

Otetaan ensin pallolta vain yksi kärkipiste, jolloin loppuosa on yhtä tahkoa. Tässä yksinkertaisimmassa palloverkossa on $\chi = 1 - 0 + 1 = 2$; väite siis pätee ainakin tässä erikoistapauksessa.

Oletetaan sitten, että pallo on verkotettu millä tahansa tavalla, kunhan vain $\chi = K - S + T = 2$. (Näin voidaan olettaa, koska olemme jo löytäneet ainakin yhden palloverkon, joka tämän toteuttaa.)

Muodostetaan nyt uusi verkko lisäämällä uusi särmä jo ennestään olevien kärkien välille, jolloin yksi tahko tulee jaetuksi kahtia. Näin kärkien määrä ei muutu, mutta särmät ja tahkot lisääntyvät molemmat yhdellä, joten uuden verkon Eulerin karakteristika on

$$\begin{aligned}\chi' &= K' - S' + T' = K - (S+1) + (T+1)\\ &= K - S + T - 1 + 1 = \chi = 2.\end{aligned}$$



Uusi verkko voidaan muodostaa myös siten, että lisätään kärkipiste ja yhdistetään se uudella särmällä johonkin ennestään olleeseen kärkipisteeseen. Tällöin kärjet ja särmät lisääntyvät kumpikin yhdellä ja tahkojen määrä pysyy ennallaan, joten χ ei nytkään muutu.

Uusia palloverkkoja voidaan rakentaa lisää äärettömän monta toistamalla näitä kahta operaatiota. Toisaalta mikä tahansa palloverkko saadaan aikaan tällä tavoin: annetun palloverkon voi purkaa poistamalla siitä yksi kerrallaan särmiä ja yhden särmän varaan jääneitä kärkipisteitä, siten että verkko pysyy joka vaiheessa yhtenäisenä (lukija keksiköön säännön, jolla moinen onnistuu!). Kun tämä prosessi sitten tehdään takaperin, alkuperäinen verkko tulee rakennetuksi mainittuja operaatioita käyttäen.

Koska kyseiset operaatiot siis eivät muuta Eulerin karakteristikaa, se on vakio kaikille palloverkoille. Ja koska $\chi = 2$ yhdelle palloverkolle (sille jossa on vain yksi kärki ja yksi tahko), tämä vakio on 2. □

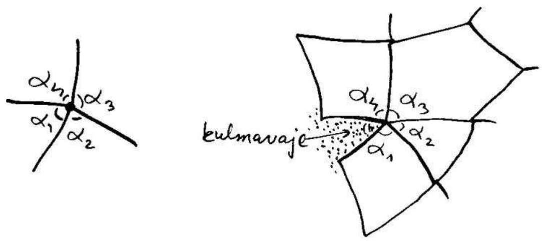
Tämä tulos pätee siis kaikille palloverkoille – erityisesti sellaisille jotka vastaavat jotakin monitahokasta. Niinpä tulimme samalla todistaneeksi Eulerin monitahokaslauseen 2.

Kulmavaje

Monitahokkaan jokaisessa kärkipisteessä k kohtaa jokin määrä $s(k)$ särmiä ja saman verran tahkoja. Kaksi vierekkäistä särmää ovat jonkin tasomonikulmion sivuja, ja niiden välinen kulma α voidaan mitata tai laskea. Kun lasketaan nämä kaikkien kulmien $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s(k)}$ asteluvut yhteen, saadaan luku, joka kertoo jotakin kyseisen kärkipisteen luonteesta. Mikäli kulmien summa sattuu olemaan tasan 360°, monikulmiot voi latoa samaan tasoon pisteen ympärille. Kulmasumman poikkeama täydestä kulmasta määritellään kärkipisteen k *kulmavajeeksi*:

$$\mathrm{vaje}(k) := 360^\circ - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s(k)}).$$

Positiivinen kulmavaje siis kertoo, miten laaja kiila jää puuttumaan täydestä ympyrästä, jos yksi särmä leikataan auki ja kärjessä kohtaavat monikulmiot levitetään samaan tasoon.



5. Tehtäviä. (a) Leikkaa paperista monikulmioita. Liittele niitä yhteen ja mieti, voiko jonkin kärkipisteen kulmavaje olla negatiivinen? Miltä sellainen kärkipiste näyttäisi? Miten kulmavajeen ja kuperuuden käsitteet liittyvät toisiinsa?

(b) Rakenna paperimonikulmioista (mielellään säännöllisistä, jottei mene turhan vaikeaksi) mieleisesi monitahokas. Laske kunkin kärkipisteen kulmavaje ja kaikkien kärkien kulmavajeiden summa. Tee sama tarkastelu ainakin kahdelle erilaiselle tahokkaalle.

Monitahokkaan kaikkien kärkien (joita on K kappaletta) kulmavajeiden summaa $\sum_{k=1}^{K} \mathrm{vaje}(k) = \Delta$ merkitään kreikkalaisella isolla delta-kirjaimella. Itse asiassa pätee yleisestikin:

6. Lause. Kuperan monitahokkaan kärkien kulmavajeiden summa on $\Delta = 720^\circ$.

Todistus. (a) Oletetaan aluksi jokainen tahko kolmioksi. Silloin monitahokkaassa on kolme särmää jokaista tahkoa kohti; toisaalta jokainen särmä on kahdelle tahkolle yhteinen, joten $3T = 2S$. Sijoittamalla tämä yhtälö Eulerin monitahokaslauseeseen 2 saadaan $2K - T = 4$. Kaikkien kärkien kulmavajeiden summa on

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{k=1}^{K}\big(360^\circ - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s(k)})\big)\\ &= 360^\circ \cdot K - (\text{kaikkien tahkojen}\\ &\qquad \text{kulmien summa}).\end{aligned}$$

Koska kolmion kulmien summa on 180° (tätä tulosta ei todisteta nyt, mutta asiaan ehkä palataan Solmussa joskus myöhemmin) ja koska tahkoja on T kappaletta, summaksi tulee

$$\begin{aligned} 360° \cdot K - 180° \cdot T &= 180° \cdot (2K - T) \\ &= 180° \cdot 4 = 720°. \end{aligned}$$

(b) Jos monitahokkaan tahkoina on muitakin monikulmioita kuin kolmioita, tahkot voidaan jakaa lävistäjillä kolmioiksi. Nyt tälle pelkistä kolmioista koostuvalle ”monitahokkaalle” pätee (a)-kohdan päättely siitä huolimatta, että vierekkäiset ”tahkot” saattavat olla samassa tasossa. ”Särmien” lisääminen ei muuta kulmien suuruuksia, joten myös tässä tapauksessa kulmavajesumma on 720°. □

Huomaa, että emme todistuksessa oikeastaan käyttäneet oletusta monitahokkaan kuperuudesta. Käytimme vain sitä tietoa, että sille pätee Eulerin monitahokaslause – ja kuten totesimme, tämä pätee aina kun tahokas voidaan pullistaa palloverkoksi. Kuperuus ei siis tällekään lauseelle ole välttämätön ehto (siis väite on totta kuperille tahokkaille, mutta myös joillekin muille).

Tämä tulos on itse asiassa aika hämmästyttävä. Onhan *kulmien mittaaminen* luonteeltaan erilaista kuin kärkien, särmien ja tahkojen *lukumäärien laskeminen*: tahokasta ei voi noin vain korvata pyöreällä pallolla kuten teimme monitahokaslauseen todistuksessa, koska venyttely ja pullistelu tietenkin muuttaa kulmia. Mutta silti myös kulmavajelause pätee riippumatta tahokkaan tarkemmasta muodosta, kunhan siinä ei ole ”reikää” kuten toruksessa ja mutterissa.

Kuperien deltaedrien etsinnässä (1.c) voi nyt käyttää apuna juuri todistettuja lauseita 4 ja 6. Laske ensin sellaisen kärjen kulmavaje, jossa kohtaa p tasasivuista kolmiota, ja mieti miten suuri kokonaisluku p voi olla. Em. lauseet antavat välttämättömän ehdon etsitynlaisten tahokkaiden kärkien lukumäärille, joten ”yrityksen ja erehdyksen menetelmää” ei tarvitse jatkaa loputtomiin. (Tehtävään annetaan ratkaisu seuraavassa Solmussa.)

Onko topologia geometriaa?

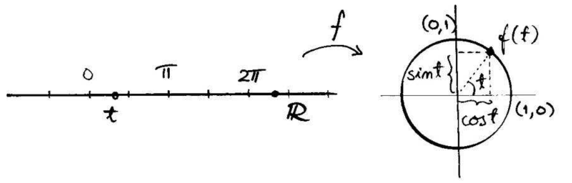
Monikulmioita ja -tahokkaita tarkastellaan usein geometrisina olioina. *Geometria* on matematiikan ala, jossa ”mitataan” tai oikeastaan lasketaan etäisyyksiä ja kulmien suuruuksia; itse sanakin on johdettu kreikan maanmittausta tarkoittavasta sanasta. Tuttu esimerkki geometrisesta tuloksesta on Pythagoraan lause, joka koskee suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia.

Edellä kuitenkin tarkastelimme monitahokkaita hiukan eri kannalta: Eulerin lauseessa ei puhuta mitään pituuksista eikä kulmista. Eulerin karakteristika on monitahokkaan geometrisesta muodosta riippumaton vakio.

Joukon muotoa voivat muuttaa niissä määritellyt *kuvaukset* eli *funktiot*. Esimerkiksi kuvaus

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ f(t) = (\cos t, \sin t)$$

käärii reaaliakselin tasoon ympyräksi. Totea tämä itse antamalla muuttujalle $t \in \mathbb{R}$ arvoja ja piirtämällä kuvapisteet tasoon.

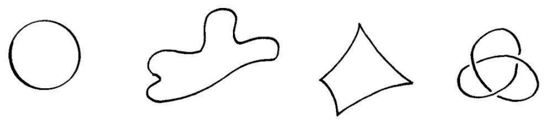


Jokaista reaalilukua t vastaa siten yksi (ympyrän kehällä oleva) tason piste (x, y), mutta jokaista ympyrän pistettä vastaa äärettömän monta reaalilukua: esimerkiksi pistettä $(0, 1)$ vastaavat luvut $\ldots, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$ (radiaania). Toisaalta muita tason pisteitä kuin ympyrällä olevia ei kuvauksessa f vastaa mikään reaaliluku.

Kuvauksia voidaan luokitella erinäisten ominaisuuksien perusteella. Kaksi joukkoa A ja B ovat *topologisesti ekvivalentit*, mikäli niiden välillä on *topologinen kuvaus* eli *homeomorfismi*. Havainnollisesti tämä tarkoittaa, että

- jokaista joukon A pistettä vastaa *tasan yksi* B:n piste ja päinvastoin;
- *lähekkäin* olevia A:n pisteitä vastaa *lähekkäiset* B:n pisteet ja päinvastoin.

Äskeisen esimerkin f ei siis ollut topologinen kuvaus. Ympyrän ja suoran välillä ei ole olemassakaan topologista kuvausta. Ympyrän kanssa topologisesti ekvivalentteja käyriä sanotaan *silmukoiksi*. Kuvan käyrät ovat silmukoita, mutta suoran lisäksi esimerkiksi jana, kirjain R ja numero 8 eivät ole. Topologinen kuvaus voi venyttää, kutistaa ja taivuttaa joukkoa, tai jopa vetää sen umpisolmuun, mutta ei katkaista, rei'ittää eikä venyttää äärettömiin.

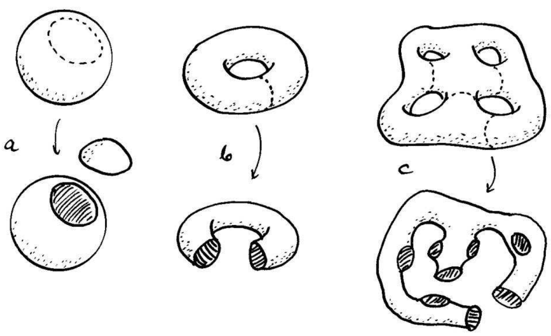


Ominaisuuksia ja vakioita, jotka säilyvät topologisessa kuvauksessa, sanotaan *topologisiksi*. Esimerkiksi Eulerin karakteristika on topologinen vakio, ja yhtenäisyys on topologinen ominaisuus.

Toisin kuin Eulerin lauseessa, kulmavajelauseessa puhutaan kulmien asteluvuista – siis geometriasta! – mutta lauseen sisältö on että näistä laskettu tietty lauseke on topologinen vakio. Topologia ja geometria kietoutuvatkin monin tavoin yhteen, mutta ne eivät ole sama asia.

Pinta ja sen genus

Ominaisuus, joka erottaa ratkaisevasti pallomaiset pinnat torusmaisista, on myös luonteeltaan topologinen. Huomaamme, että toruksen voi leikata auki sopivasti valittua silmukkaa myöten (sylinteriputkeksi) niin että se pysyy yhtenä kappaleena. Pallolle tämä ei onnistu: leikkasipa sitä millaista silmukkaa pitkin tahansa, siitä aina irtoaa pala. Toisaalta torustakaan ei voi leikata enää toista silmukkaa pitkin: joko putken kylkeen tulee reikä tai putken päästä irtoaa rengas. Kuvassa oikealla olevan pinnan voi avata peräti neljää erillistä silmukkaa pitkin halkaisematta sitä kahtia.



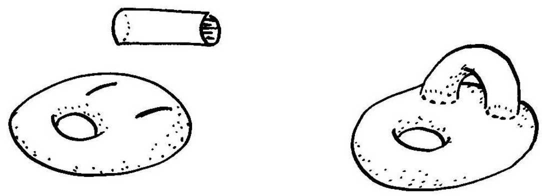
Pinta tarkoittaa tässä yhtenäistä, kaksiulotteista, suljettua ja reunatonta joukkoa. *Yhtenäisyys* merkitsee, että mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää toisiinsa jollakin pintaa pitkin kulkevalla käyrällä; *2-ulotteisuus* taas sitä, että pinnasta leikattu pieni pala "näyttää samalta" kuin tasosta leikattu pala (tarkemmin sanoen pinta on paikallisesti topologisesti ekvivalentti tason kanssa). Erityisesti monitahokkaat ovat sellaisia. Nyt voimme määritellä tärkeän topologisen käsitteen:

Pinnan *genus* on kokonaisluku g, joka kertoo montako erillistä silmukkaa myöten pinnan voi leikata auki niin että se pysyy yhtenäisenä.

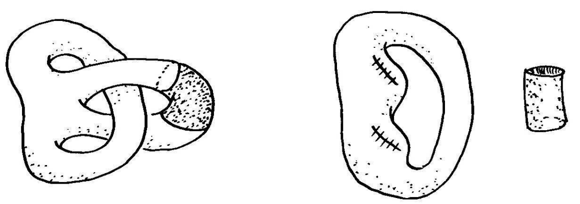
Siispä pallon, kuution, pyramidin jne. genus on $g = 0$; toruksen, uimarenkaan, mutterinpinnan jne. genus on puolestaan $g = 1$. Genus on toisin ilmaistuna "pujotusreikien" tai "kahvojen" lukumäärä.

7. Lause. (a) Pinnan genus kasvaa yhdellä, jos siihen tehdään kaksi viiltoa ja liitetään näihin sylinteriputki päistään kahvaksi.

(b) Jos pinnan genus on vähintään yksi, niin siitä voidaan poistaa kahva leikkaamalla kahta silmukkaa myöten ja sulkemalla syntyneet reiät. Tällöin pinnan genus vähenee yhdellä.



Todistus. (a) Olkoon P pinta ja $g \geq 0$ sen genus. Viiltämällä P kahdesta kohtaa auki ja liittämällä reikiin putki päistään kahvaksi syntyy uusi pinta P'. Nyt kahvan voi taas irrottaa toisesta päästään leikkaamalla silmukkaa myöten. Näin ollen sellaisia silmukoita, joita pitkin pinnan voi leikata auki irrottamatta siitä palaa, löytyy P':lta yksi enemmän kuin P:ltä; P':n genus on siis $g + 1$.



(b) Olkoon P pinta ja $g \geq 1$ sen genus, jolloin sillä määritelmän mukaan on g eri silmukkaa $s_1, s_2, \ldots s_g$, joita myöten sen voi leikata auki irrottamatta paloja. Leikataan P auki yhtä tällaista silmukkaa s_g pitkin, jolloin pinta siis jää yhtenäiseksi ja siihen tulee kaksi silmukanmuotoista reikää.

Sitten leikataan pinta auki syntyneen reiän reunan läheltä kulkevaa silmukkaa pitkin. Tällöin irtoaa sylinteriputken muotoinen pala, joten kyseinen silmukka ei voinut olla mikään edellämainituista $(g-1)$:stä silmukasta. Ommellaan sitten pintaan jääneet kaksi reikää umpeen, jolloin syntyy uusi pinta P''. Nyt pinnalla P'' on edelleen $g - 1$ erillistä silmukkaa, joita pitkin auki leikattuna se pysyisi yhtenäisenä: $s_1, s_2, \ldots s_{g-1}$. Niinpä P'':n genus on $g - 1$, ja operaatiosta jäi yli yksi sylinterinmuotoinen kahva. □

Mutterille ja muille positiivisen genuksen omaaville monitahokkaille pätee Eulerin monitahokaslausetta (4) ja kulmavajelausetta (6) vastaavat tulokset; niissä vain esiintyy eri vakiot. Todistaaksemme nämä tulokset käytämme jälleen apuna verkkoja.

Pintaverkko

Mikä tahansa pinta voidaan ”verkottaa” samaan tapaan kuin pallo. Mielivaltaisesti valitut kärjet ja särmät jakavat pinnan alueisiin, mutta tässä tarvitsemme lisäehdon. Jokaisen alueen reuna saa koostua vain yhdestä (murtoviiva)silmukasta – toisin sanoen vaadimme, että alue on monikulmion kanssa topologisesti ekvivalentti. (Tämä ehto sulkee pois rengasmaiset tai reiälliset alueet.)

Esimerkiksi toruksen voi verkottaa siten, että saadaan edellä esiintyneen mutterin ”pyöristetty” vastine – mutta jos tästä verkosta poistetaan tietyt kuusi viivaa, saadaan toinen verkko, jonka yksi alue on renkaan muotoinen.

Nimitämme *pintaverkoksi* äärellistä ja yhtenäistä verkkoa, joka jakaa jonkin pinnan *topologisiin monikulmioihin*. Edellisen kuvan vasemmanpuoleinen verkko on pintaverkko, oikeanpuoleinen ei. (Aiemmin määritelty palloverkko on siis pintaverkon erikoistapaus.)

8. Tehtäviä. (a) Piirrä tai rakenna monitahokas, jonka genus on vähintään yksi ja jossa on ainakin yksi rengasmainen ”tahko”. Laske sen Eulerin karakteristika. Lisää sitten kärkiä tai särmiä siten, että rengasalue jakautuu tavallisiksi monikulmioiksi, ja laske tämän uuden tahokkaan karakteristika.

(b) Vertaa ylläolevaa pintaverkon määritelmää palloverkon määritelmään. Palloverkon määritelmä ei kieltänyt rengasalueita – siinä vaadittiin vain että verkon pitää olla yhtenäinen. Voiko palloverkossa olla rengasalueita? Mieti miksi rengasalueet pitää kieltää erikseen suurempigenuksisilta pintaverkoilta.

(c) Voiko 1-genuksista monitahokasta (tai pintaverkkoa) esittää tasograafina (vrt. tehtävä 3.a)?

Yleistetty Eulerin lause ja kulmavajelause

Nyt yleistämme äsken nollagenuksisille monitahokkaille todistamamme kaksi lausetta isompigenuksisillekin tahokkaille.

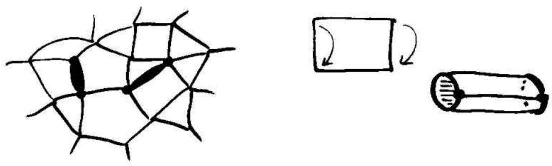
9. Lause. Jos pinnan genus on g, niin sen jokaisen pintaverkon Eulerin karakteristika on $\chi = 2 - 2g$.

Todistus. Käytämme jälleen induktiotyyppistä päättelyä. Pallon tapauksessa $g = 0$ ja $\chi = 2 = 2 - 2 \cdot 0$, jo todistetun tavallisen Eulerin lauseen nojalla. Oletetaan sitten väitteen pätevän *jollakin* luonnollisella luvulla g, eli että (minkä tahansa) g-genuksisen pintaverkon V karakteristika on $\chi = 2 - 2g$.

Eulerin lauseen perusteella χ ei riipu pinnan eikä verkon geometriasta. On osoitettava, että tällöin minkä tahansa $(g+1)$-genuksisen pintaverkon karakteristika on $\chi' = 2 - 2(g+1)$. Koska

$$2 - 2(g+1) = 2 - 2g - 2 = -2g = \chi - 2,$$

on toisin sanoen todistettava, että pinnan genuksen kasvaessa yhdellä sillä olevan pintaverkon Eulerin karakteristika vähenee kahdella. Lauseen 7 nojalla minkä tahansa $(g+1)$-genuksisen pinnan voi koota g-genuksisesta pinnasta ja sylinteriputkesta.



Leikataan pintaverkko V auki kahta erillistä särmää myöten. Kahvaksi liitettävän putken voi tehdä vaikkapa yhdestä topologisesta neliöstä, jonka vastakkaiset sivut yhdistetään uudeksi särmäksi. Operaation jälkeen meillä on uusi pintaverkko V', jonka genus on $g+1$ ja jossa on kärkiä saman verran kuin V:ssä, särmiä kolme enemmän ja tahkoja yksi enemmän. Siten verkon V' Eulerin karakteristika on

$$\begin{aligned}\chi' &= K - (S+3) + (T+1)\\ &= K - S + T - 3 + 1 = \chi - 2,\end{aligned}$$

kuten väitettiin. Vielä todetaan tavallisen Eulerin lauseen perusteella, ettei V':n karakteristika riipu valitusta pintaverkosta eikä siten myöskään tavasta jolla kahvan lisäys tehtiin, joten todistuskin pätee näistä valinnoista riippumatta. □

Jokaista monitahokasta vastaa sen kanssa topologisesti ekvivalentti pintaverkko, joten lauseesta 9 seuraa *yleistetty Eulerin monitahokaslause*:

10. Lause. Jos monitahokkaan genus on g, niin sen Eulerin karakteristika on $\chi = 2 - 2g$.

Todistamme vielä yleistetyn kulmavajelauseen:

11. Lause. Jos monitahokkaan Eulerin karakteristika on χ, niin sen kaikkien kärkien kulmavajeiden summa on $\Delta = 360° \cdot \chi$.

Todistus. Lauseen 6 todistus yleistyy melko suoraan; ainoa ero on, että (a)-kohdassa yhtälöä $3T = 2S$ ei sijoiteta Eulerin monitahokaslauseeseen $K - S + T = 2$, vaan Eulerin karakteristikan määritelmään $K - S + T = \chi$.

Tällöin saadaan $2K - 2S + 2T = 2K - T = 2\chi$ ja kaikkien kulmavajeiden summaksi

$$\begin{aligned}\Delta &= 360° \cdot K - (\text{kaikkien tahkojen kulmien}\\ &\quad \text{summa}) = 360° \cdot K - 180° \cdot T\\ &= 180° \cdot (2K - T) = 180° \cdot 2\chi\\ &= 360° \cdot \chi.\end{aligned}$$

(b)-kohdan päättely toimii sellaisenaan. □

Nämä tulokset osoittavat, että Eulerin karakteristika χ ja kulmavajeiden summa Δ kertovat (verkotetusta) pinnasta tasan saman asian kuin genus g. Jos siis yksi näistä luvuista tiedetään, voidaan laskea myös muut. Kaikki (yhtenäiset, kaksiulotteiset, suljetut ja reunattomat) pinnat voidaan luokitella tämän ominaisuuden perusteella topologisiin luokkiin.

12. Tehtävä. Piirrä tai rakenna erigenuksisia monitahokkaita ja laske niiden χ ja Δ.

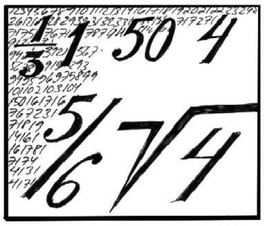
Huomautuksia

Tämän artikkelin tarkoitus oli esitellä havainnollisten esimerkkien avulla millaisia asioita tutkii topologiaksi kutsuttu matematiikan ala ja todistaa muutama topologinen lause. Muodollisia määritelmiä esitettiin mahdollisimman vähän, mutta kiinnostunut lukija löytää niitä helposti lisää oppikirjoista.

Topologisen kuvauksen eli homeomorfismin oikea määritelmä on *'jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvauskin on jatkuva'.* Sana *topologia* on peräisin kreikasta (kuten moni muukin matematiikan termi). Se on matematiikan ala, jossa *avoimet joukot* ja *jatkuvat kuvaukset* ovat keskeisiä käsitteitä.

Oletimme (erikseen mainitsematta) kaikki pinnat *suunnistuviksi*, eli että niillä on sekä sisä- että ulkopuoli. On olemassa myös suunnistumattomia pintoja kuten Kleinin pullo, joita tämä tarkastelu siis ei koske. Nollagenuksisen monitahokkaan ja pallo(verko)n topologista ekvivalenssia perustelimme edellä vain intuitioon vedoten: monitahokkaan voi "pullistaa" palloksi. Tämä voitaisiin todistaa täsmällisesti määrittelemällä kuvaus, joka kuvaa monitahokkaan särmineen palloksi, ja osoittamalla kyseinen kuvaus homeomorfismiksi. Muutkin nyt perustelematta esitetyt väitteet (kuten 'yhtenäisyys on topologinen ominaisuus' ja 'ympyrän ja suoran välillä ei ole homeomorfismia') ovat helposti todistettavissa lyhyehkön topologian perusteisiin tutustumisen jälkeen.

∗Lisätehtävä. Sen sijaan että verkotetaan valmiita pintoja, kuten edellä tehtiin, voitaisiin aluksi rakentaa pelkkä verkko kärjistä ja särmistä. (Tällöin ei kuitenkaan välttämättä synny pintaverkkoa; totea tämä rakentamalla sopiva esimerkkiverkko.) Mutta jos verkko on jonkin monitahokkaan "luuranko", onko kyseinen monitahokas yksikäsitteinen? Löydätkö verkon, johon voi pingottaa tahkoja kahdella eri tavalla siten, että syntyy eri genuksiset monitahokkaat? (Tämä on vaikea – älä masennu vaikka et löytäisi tällaista verkkoa!)



Muutamia ajatuksia matematiikan opetuksesta

Tibor Szalontai, tri, Nyíregyháza, Unkari
Marjatta Näätänen, dosentti, Helsingin yliopisto

Matematiikan opetuksesta

Matematiikan didaktiikka on monitieteinen, oma tieteenhaaransa, jolla on aivan omat erityispiirteensä verrattuna muihin ainedidaktiikkoihin. Se ei ole vain sovellettua pedagogiikkaa, vaikkakin se vasta luo omaa tieteellistä kieltään ja tutkimusmenetelmiään.

Matematiikan didaktiikka käyttää ja soveltaa yleisen pedagogiikan päätuloksia ja perusperiaatteita. Sillä on kuitenkin useita erityisiä piirteitä ja tuloksia, joita tuskin voidaan soveltaa yleiseen tai useiden muiden aineiden pedagogiikkaan. Matematiikan didaktiikassa on myös useita ongelmia, jotka eivät ole kovin kiinnostavia muiden aineiden kannalta; näitä ei voi ratkaista eikä näihin voi vastata yleisen pedagogiikan puitteissa. Esimerkiksi matematiikan äärettömyyskäsitteiden opetus, matemaattinen induktio, implikaation A $\Rightarrow$ B opettaminen kun A on epätosi, määritelmien pohjustaminen ja niiden ymmärtämisen rakentaminen, matemaattisen lahjakkuuden komponentit jne. Erityispiirteet seuraavat usein matematiikan erikoisesta luonteesta verrattuna muihin tieteisiin.

On useita hyviä matematiikan opettamisen lähestymistapoja, tyylisuuntia, käytäntöjä, luokkahuoneen järjestelyjä (oppilaiden ryhmittely, istumisjärjestelyt). Niillä on etuja tai haittoja ja niiden tehokkuus vaihtelee riippuen

- oppilaiden iästä ja kykytasosta
- erityisistä didaktisista tehtävistä, matemaattisista käsitteistä ja probleemoista, tarvittavista verbaaleista ja kirjallisista taidoista jne.

Euroopassa vallitsee nykyisin useita käsitteellisiä suuntauksia, esim. tutkiva, historiallista järjestystä seuraava, strukturaalis-formalistinen, ongelmanratkaisua painottava, sovellussuuntautunut, yksilöllistetty, tietokone-orientoitunut. Ne eivät sulje toisiaan pois eikä mikään niistä esiinny ainoana opettajan työssä. Puhukaamme siis vain suuntauksista tai niiden vallitsevuudesta.

Nykyisin matematiikan didaktiikan kirjallisuus ja erilaiset käsitteelliset suuntaukset keskittyvät oppilaan matemaattiseen ajatteluun ja ongelman ratkaisuun kullakin luokalla ja ikäryhmässä. Kansalliset ja kansainväliset vertailut ovat kuitenkin viime vuosikymmeninä osoittaneet monissa länsimaissa syrjäytyvien oppilaiden lisääntymistä ja laskevaa suuntaa keskimääräisessä matematiikan suoritustasossa, vaikkakin tietty vähemmistö yltää erinomaisiin suorituksiin.

Hyvien opetusmenetelmien opettaminen opettajille niin, että ne lopulta toteutetaan itse opetustyössä, on vaikea tehtävä. Hyvien ideoiden tietäminen ei sinänsä tuo automaattisesti hyviä tuloksia, vaan opettajan rooli ja käytettävissä oleva opetusmateriaali ovat menestyksen suhteen edelleen ratkaisevassa asemassa.

Opettajan on valittava eri vaihtoehdoista, kun hänen on opetettava erityinen teema, aihe, käsite, uusi työskentelytapa, taito, pohjustettava käsitettä, rakennettava systemaattisesti tietoa, kehitetettävä sovelluksiin sopivaa tietoa, kykyjä, rutiineja. Opettajan tulisi tuntea mahdollisimman monta erilaista opetusmetodia, suuntausta ja konkreettista menetelmää. Näin hän voi laajentaa omaa menetelmällistä kulttuuriaan, luovuuttaan ja kekseliäisyyttän. Parhaat ainekset eri opetusmetodeista tulisi integroida, jotta saadaan tehokkaita oppitunteja.

Käytännöllinen näkökulma

Unkarissa saadun kokemuksen mukaan eritasoisten oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittämisessä pätevät samat oppimismenetelmät. Kaikkien oppilaiden tulisi saada parhaiden menetelmien mukaista opetusta koulussa. Kaksi päinvastaiselta näyttävää suuntausta ovat

- oppilaiden eriyttäminen
- suurten ryhmien opettaminen samanaikaisesti (samassa luokassa)

Lisävaatimus, joka ehkä on myös ristiriitainen ensimmäisen kanssa, on yhteistyö- ja kommunikaatiokykyjen opettaminen. Ehdotamme kompromissia ja tasapainoista opetus- ja luokkahuoneratkaisua. Eriyttäminen voidaan ratkaista luokkahuoneessa, kotitehtävillä ja (säännöllisesti tai tilapäisesti pidettävillä) iltapäiväryhmillä lahjakkaille ja kertaustunneilla jälkeenjääneille.

Meistä yksinkertaiset apuvälineet ovat hyviä käsitteenmuodostuksen ensimmäisessä vaiheessa. Tämä on Piagét'n sisäistämisteorian mukaista. Ulkoinen toiminta muutetaan vähitellen sisäiseksi ajatteluksi käyttäen ensin välineitä, sitten kvasimanipulatiivista ajattelua (kuviteltu toiminta tai malli), lopuksi pelkästään ajattelua. Visualisoinnin voimakkuushierarkia kasvavassa järjestyksessä on: luento; selitys ja esimerkit, kuvat, kalvot, kuviot ja graafit; liikkuvilla visuaalisilla apuvälineillä demonstrointi, tietokoneanimaatio, videofilmi; todellisen elämän demonstrointi ja toiminta; apuvälineiden käyttö; lopuksi kaikkein tehokkaimpana oman kehon liike. Esimerkiksi kombinaatioiden opettelu on tehokkainta pienillä oppilailla, jos he (esim. 4 oppilasta) asettuvat eri järjestyksiin ja näitä tutkitaan.

Oppilaille tulisi järjestää mahdollisimman paljon omaa työtä (joskus pienissä, heterogeenisissa ryhmissä), mutta niin, että erilliset osatehtävät tai toiminnot annetaan kyllin pienissä erissä ja koko luokka tai tasoryhmä toimii saman aiheen ja ongelman parissa esim. muutaman minuutin ajan. Mikäli itsenäiseen työhön annetaan suuria tehtäväkokonaisuuksia, heikot oppilaat eivät ehkä pääse etenemään, nopeammat pitkästyvät ja alkavat tehdä jotain muuta, eikä luokkaa saada pysymään samassa tahdissa. Nopeimmille voidaan antaa ylimääräisiä tehtäviä, joissa on vähemmän laskemista, mutta jotka kehittävät ajattelua. Näihin he voivat palata aina, kun on aikaa. Itsenäinen työvaihe voidaan järjestää myös kahdessa – kolmessa tasoryhmässä, pääosin harjoitteluvaiheessa mutta myös uutta opittaessa.

Omaa työtä seuraa aina koko luokan (tai koko ryhmän) keskustelu, jokaisen tehtävän tai probleeman jälkeen. Oman työn rooli ja tarkoitus on kehittää ongelman ratkaisua (intuitiota ja luovuutta); kehittää kirjallisia taitoja ja kykyjä, varmistaa nopeutta. Yhteiskeskustelun rooli ja tarkoitus on: kehittää sanallisia kykyjä ja taitoja, rohkeutta, matemaattisten käsitteiden kehittäminen, väärinkäsitysten ja virheellisen ajattelun löytäminen ja korjaaminen, palaute ja oppimisprosessin ohjaaminen. Näin rakennetaan matematiikan rakennetta ja estetään vaara sirpaloituneesta tiedosta. Opettajan tulisi päästä selville kunkin oppilaan tuloksista, erilaisia ratkaisuideoita kerätään ja ajattelutapoja yritetään kehittää monipuolisemmiksi. Kyllin usein tapahtuva ohjattu keskustelu auttaa myös heikkoja tai hitaita oppilaita pääsemään muiden mukaan seuraavaa osatehtävää ratkaistaessa. Oppilaiden keskittyminen säilyy paremmin ja tunti käytetään tehokkaammin kuin jos käytetään pitkiä itsenäisiä työvaiheita. Mikäli halutaan pidempiä kokonaisuuksia, voidaan niitä antaa kotitehtäviksi. Virheet eivät ole väheksymisen tai pilkan aihe, oppilailla on oltava alkuvaiheessa vapaus erehtyä. Vaatimustaso kohoaa ajan myötä, mutta uutta käsitettä opittaessa ei ole ongelmallista, vaikka oppilaalla olisi virheellinen ratkaisuehdotus. Virheet käytetään kaikkien hyödyksi yhteiskeskustelussa.

Matematiikan opetus keksimällä tarkoittaa keksimisen johdattelua käyttämällä apuvälineitä, malleja, strukturoituja probleemasarjoja, jotka johdattavat oppilaat ennakoimaan määritelmiä tai määritelmiin, uusiin esikäsitteisiin tai käsitteisiin omin ponnistuksin, ratkaisuin ja yrityksin pienin askelin. Aiheiden rakenne voidaan parhaassa tapauksessa rakentaa vuosi vuodelta laajenevan spiraalin omaisesti. Useita aiheita ja esikäsitteitä esiintyy jo alkuvaiheessa ja tämä johtaa yhä tarkempaan matemaattiseen opetukseen myöhemmin, vähitellen. Toinen tärkeä näkökohta on optimaaliset matematiikan sisäiset ja muihin oppiaineisiin liittyvät yhteydet.

Opettajan rooli on hyvin tärkeä, hän laatii spiraalinomaisesti etenevät tehtävät (ellei ole hyvää oppikirjaa), järjestää tunnin rytmityksen, oman työskentelyn ja yhteiset keskustelut (oppilaiden palautteen ja arvioinnin, seurannan), antaa lyhyet selitykset, määritelmät, tarvittavan vahvistuksen. Oppilaille on joustavat (ei liian jäykät) etenemisvaatimukset, jos mahdollista, yksilölliset. Tämä halutaan tietenkin perustaa oppilaiden tiedonjanolle, kiinnostukselle, kilpailunhalulle. Matematiikan opettajien tulisi oppia tehokkaan oppitunnin pitämistaito. Tehokkaan oppitunnin aikana jokaisen oppilaan tulisi työskennellä matematiikan parissa tunnin aikana mahdollisimman paljon, tehokkaalla intensiteetillä ja saavuttaa oppimistavoite. Itsenäinen työ ei sovellu vain harjoitteluun, vaan taitavasti ohjattuna se voi olla hyvin hyödyllinen myös uutta tietoa pohjustettaessa. Uusia käsitteitä voidaan esitellä eri tavoilla, ei vain opettajan toimesta.

Tehokas oppitunti käsittää mielestämme lyhyehköjä tehtäviä omatoimisesti, opettaja kulkee luokassa ja seuraa kunkin oppilaan etenemistä, neuvoo tarvittaessa. Sitten hän lopettaa itsenäisen työn vaiheen. Keskustelu alkaa, ideat kerätään ja kysytään, kuka on samaa/eri mieltä. Miksi? Oppilaat selittävät ajattelutapansa (tässä vaiheessa opettaja ei vielä vahvista, kuka on oikeassa/väärässä). Opettaja lopettaa keskustelun. Hän toteaa, mikä etenemistapa oli hyvä/ei ollut hyvä. Selvitetään, miksi. Kun asiasta ollaan yhtä mieltä, opettaja kysyy, kuka osasi ratkaista tehtävän yksin. Oppilaat etsivät itse virheensä ja merkitsevät ne punaisella. Heidän tehtävänsä on virheen korjaamiseksi laatia itse virheetön ratkaisusuunnitelma. Opettaja antaa palautteen, kehuu hyviä suorituksia. On hyvä, että oppilaat kertovat ideansa, mutta vielä parempi on, jos he kertovat, miten he ajattelivat ja oppivat näin ongelmanratkaisustrategioita. Tehokas oppitunti tarkoittaa myös, että tarvittavat apuvälineet ovat kunkin oppilaan käsillä hyvässä järjestyksessä ja nopeasti saatavana. Tällöin ei oppitunnista mene aikaa niiden jakamiseen ja poiskorjaamiseen. Tällaisen järjestelyn edellytyksenä on, että oppilaat pystyvät keskittymään eivätkä hermostuneesti näprää apuvälineiden kanssa silloin, kun niitä ei käytetä.

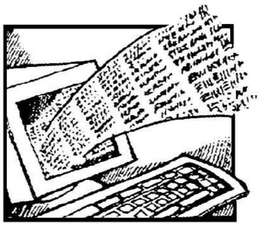
Koko luokka yritetään pitää mahdollisimman kauan yhdessä (12 ikävuoteen asti selvitään melko hyvin eriyttämällä, sen jälkeen oppilaiden erot ovat kasvaneet suuriksi ja ongelman ratkaisu riippuu olosuhteista). Koko luokan yhdessä pitäminen on hyväksi heikoille oppilaille, sillä koko luokan keskustelu tukee heitä. Opettaja eriyttää antamalla useampia pieniä kysymyksiä lahjakkaille, jotka palauttavat tulokset paperilla tunnin lopussa. Oppilaille annetaan vaikka kolmea eri tasoa tehtäviä kotitehtäviksi, oppilas valitsee, minkä tason haluaa. Tunnilla eriyttäminen voidaan tehdä itsenäisen työvaiheen aikana esimerkiksi antamalla viisi vähitellen vaikeutuvaa osatehtävää ja kertomalla, ettei ole ongelmaa, vaikka oppilas saisi vain ensimmäiset kolme ratkaistua annetussa ajassa. Opettaja voi myös vain seurata, kuka ennätti tehdä mitenkin paljon. Kotityö on tärkeä osa matematiikan oppimista. Eri tasoisia kykymyksiä tarjotaan ja oppilas voi siis itse valita itselleen sopivan tason.

Länsimaissa on matematiikan opetuksessa tällä hetkellä voimakkaana suuntauksena ongelmanratkaisu. Tämän suuntauksen soveltamisessa on mielestämme suurena vaarana, etteivät ongelmat liity toisiinsa eikä näin siis rakenneta matematiikan struktuuria. Vaarana voi olla, että hypitään aiheesta toiseen – tosin kyvykkäille oppilaille tämä voi olla harjoitusta ajattelun joustavuudessa. Yksittäinen ongelma voi olla sinänsä mielenkiintoinen ja sopia hyvin vaikka kilpailutehtäväksi. Tällöin oppilaalla on kylliksi aikaa miettiä ongelmaa.

Matematiikkakerhot tai oppilaiden eriyttäminen ylimääräisten kotitehtävien avulla on toinen mahdollisuus käyttää yksittäisiä mielenkiintoisia ongelmia. Jos ongelman edellyttämä kokeilu, yleistäminen, raportin kirjoittaminen vaatii paljon, vie se tavallisesta oppitunnista liikaa aikaa, eivätkä monet oppilaat ennätä saada tehtävää loppuunsuoritetuksi. Jos oppilaiden edistymisen erot kasvavat liikaa, menettää opettaja tilanteen hallinnan. On siis parempi antaa useita pieniä tehtäviä tai ongelmia jotka ratkaistaan vuoron perään ja jotka johdattavat haluttuun päämäärään. Kuten Freudenthal sanoi, matematiikan opetuksessa on suositeltavaa käyttää opastettua (uudelleen) keksimistä. (Nämä asiathan on joku keksinyt jo aikaisemmin). Jos osatehtävät tehdään yksitellen itsenäisesti, niin sen jälkeen käsitellään asiaa yhdessä koko luokan voimin. Näin saadaan vauhti pysymään samana ja kaikkien keskittymistaso säilyy. Virheet saadaan esille alkuvaiheessa, eivätkä ne estä seuraaviin, hiukan vaativampiin vaiheisiin etenemistä.

Kaikenkaikkiaan ei mielestämme siis ole suositeltavaa antaa esim. neljää yhtälöä ratkaistavaksi samalla kertaa. Asteittain vaikeutuvat, toisiinsa liittyvät kysymykset ovat suositeltavia. Suosittelemme yhden oppitunnin aikana useiden toisiinsa liittyvien aiheiden käyttöä oppilaiden mielenkiinnon ylläpitämiseksi ja jotta käsitys matematiikan monipuolisuudesta vahvistuisi. Kun esimerkiksi käsitellään luonnollisten lukujen yhteenlaskua, voidaan tarkastella, miten monilla tavoilla vaikkapa neljä lukua voidaan laskea yhteen (kombinatoriikka). Yhtälöiden, epäyhtälöiden, vertailujen ja sanallisten tehtävien käsittely jokaisella oppitunnilla sekä päässälasku sopivat kaikille ikäryhmille. Jos puolet tai enemmistö oppilaista ei pystynyt ratkaisemaan tehtävää, huomaa opettaja sen kulkiessaan luokassa. Hän voi lopettaa itsenäisen työskentelyn ja siirtyä koko luokan keskusteluun.

Unkarilaisen Vargan idea oli integroida eri alueita (joukot ja logiikka, luvut ja operaatiot, geometria ja mittaaminen, relaatiot ja funktiot sekä jonot, kombinatoriikka, todennäköisyyslaskenta ja tilastotiede). 1970-luvulla Unkarissa tulikin muodiksi, että jokaisella oppitunnilla tulisi esittää jotain jokaisesta näistä ilman yhteyttä toisiinsa. Tulokset eivät olleet hyviä. Myöskään vastakohta ei ole hyvä. Keskitie on paras, jos mahdollista, tulisi tunnin pääteema sitoa muihin aiheisiin mielenkiinnon ylläpitämiseksi.

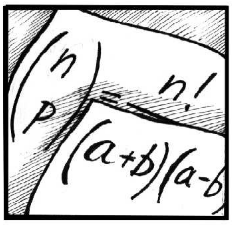


Matemaatikon työtehtäviä

Solmussa on vuosien varrella ilmestynyt useita artikkeleita, jotka käsittelevät matemaatikoiden työtehtäviä tai yleensäkin matematiikan luonnetta eri näkökulmista. Linkit näihin kirjoituksiin on nyt koottu yhteen verkko-osoitteeseen

http://solmu.math.helsinki.fi/2002/fuksit/.

Alunperin artikkelikokoelma tehtiin ajatellen matematiikan uusia yliopisto-opiskelijoita, mutta kirjoitukset ovat kiinnostavaa luettavaa kaikille matematiikan harrastajille, erityisesti matematiikan jatko-opintoja suunnitteleville lukiolaisille. Lukioiden matematiikan opettajat, informoikaa oppilaitanne mahdollisuudesta tutustua matemaatikoiden haastaviin työtehtäviin.



Solmun tehtävien ratkaisuja

Matti Lehtinen

Esitetään Solmun 1/2002 tehtävien 16–30 ratkaisut; tehtävien 1–15 ratkaisut esitettiin edellisessä numerossa 2/2002.

16. Määritä kymmenjärjestelmässä kirjoitetun luvun 2001^{2001} numeroiden summan numeroiden summan numeroiden summa.

Ratkaisu. Olkoon $S(n)$ luvun n numeroiden summa ja olkoon $2001^{2001} = k$. Koska $2001^{2001} < \left(10^4\right)^{2001} = 10^{8004}$, luvussa k on enintään 8004 numeroa. Siis $S(k) \leq 9 \cdot 8004 = 72036$. Näin ollen $S(S(k)) \leq 7 + 4 \cdot 9 = 43$ ja $S(S(S(k))) \leq 3 + 9 = 12$. Mutta $S(n) \equiv n \pmod 9$. Koska $2001 \equiv 0 \pmod 3$, $k \equiv 0 \pmod 9$. Silloin myös $S(S(S(n))) \equiv 0 \pmod 9$. Ainoa mahdollisuus on, että $S(S(S(k))) = 9$.

17. Olkoon p kaikkien sellaisten funktioiden lukumäärä, jotka on määritelty joukossa $\{1, 2, \ldots, m\}$, m positiivinen kokonaisluku, ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, 35, 36\}$ ja olkoon q kaikkien sellaisten funktioiden lukumäärä, jotka on määritelty joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$, n positiivinen kokonaisluku, ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Määritä $|p-q|$:n pienin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. Tehtävän oletusten mukaan $p = 36^m$ ja $q = 5^n$. Tarkastellaan ensin tapauksia $p > q$. Luku $36^m - 5^n$ päättyy ykköseen. Jos olisi $36^m - 5^n = 1$, olisi $5^n = 36^m - 1 = (6^m - 1)(6^m + 1)$. Koska luku $6^m + 1$ päättyy seitsemään, se ei voi olla tekijänä luvussa 5^n. Siis $36^m - 5^n \geq 11$. Mutta yhtälöllä $36^m - 5^n = 11$ on ratkaisu $m = 1$, $n = 2$. Tarkastellaan tapauksia $p < q$. Luku $5^n - 36^m$ päättyy yhdeksään. Mutta jaollisuus estää, että olisi $5^n - 36^n = 9$. Siis $|p - q|$:n minimiarvo on 11.

18. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$ ei-positiivisia lukuja. Todista, että

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{2001}} \leqslant 2000 + 2^{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2001}}.$$

Ratkaisu. Osoitetaan induktiolla, että

$$(1) \qquad 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_n} \leq n - 1 + 2^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Väite pätee, kun $n = 2$: koska $(1 - 2^{a_1})(1 - 2^{a_2}) \geq 0$, niin $2^{a_1} + 2^{a_2} \leq 1 + 2^{a_1 + a_2}$. Oletetaan, että (1) on tosi. Silloin samasta syystä kuin edellä

$$\begin{aligned} 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{n+1}} &\leq n - 1 + 2^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} + 2^{a_{n+1}} \\ &\leq n + 2^{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}}. \end{aligned}$$

19. Neliön $ABCD$ sivun pituus on 1. Olkoon X mielivaltainen sivun AB ja Y mielivaltainen sivun CD piste ja olkoot M XD:n ja YA:n leikkauspiste ja N XC:n ja YB:n leikkauspiste. Määritä ne pisteet X ja Y, joille nelikulmion $XNYM$ ala on suurin mahdollinen.

Ratkaisu. Kolmiot BNX ja YNC ovat yhdenmuotoiset.Oletetaan, että $BX \geq CY$. Silloin $XN \geq NC$, ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $BX = CY$. Olkoon P se janan NX piste, jolle $NP = NC$. Silloin $|BNP| = |BNC|$, $|YPN| = |YNC|$ ja $|BPX| \geq$

$|YXP|$ (yhtäsuuruus vain, kun $BX = CY$). Lisäksi $|XNY| = |XBY| - |XBN| = |XBC| - |XBN| = |BNC|$. Siis $|BNX| + |YNC| = |BPX| + |BNP| + |YNC| \geq |YXP| + |BCN| + |YPN| = |XNY| + |BCN| = 2|XNY|$. Samankokoiset kolmiot XNY ja BCN peittävät alle puolet puolisuunnikkaasta $XBYC$, joten $|XNY| \leq \frac{1}{4}|XBCY|$. Samoin osoitetaan, että $|XYM| \leq \frac{1}{4}|AXYD|$. Siis $|XNYM| \leq \frac{1}{4}$. Yhtäsuuruus pätee edellisten tarkastelujen mukaan silloin ja vain silloin, kun $XB = YC$.

20. Suunnikkaan $ABCD$ sivun AD keskipiste on E ja F on pisteen B kohtisuora projektio suoralla CE. Osoita, että ABF on tasakylkinen kolmio.

Ratkaisu. Leikatkoon CE suoran AB pisteessä G. Koska $AE = ED$, kolmiot AEG ja DEC ovat yhteneviä. Siis $AG = CD = AB$. Koska GBF on suorakulmainen kolmio, sen ympäri piirretyn ympyrän halkaisija on hypotenuusa GB ja ympyrän keskipiste GB:n keskipiste A. Siis $AB = AF$, ja ABF on tasakylkinen.

21. Pisteet A, B, C ja D ovat pallon pinnan eri pisteitä. Janat AB ja CD leikkaavat toisensa pisteessä F. Pisteet A, C ja F ovat yhtä etäällä pisteestä E. Osoita, että suorat BD ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Ratkaisu. Pisteet A, B, C ja D ovat samalla ympyrällä Γ ja samassa tasossa τ. Olkoon O pisteen E projektio tasolla τ. Suorakulmaiset kolmiot EOA, EOC ja EOF ovat yhteneviä, joten O on kolmion AFC ympäri piirretyn ympyrän Γ_1 keskipiste. Leikatkoon suora OF Γ_1:n myös pisteessä G ja suoran BD pisteessä H. Ympyröiden Γ ja Γ_1 kehäkulmista saadaan $\angle HBA = \angle DCA = \angle FGA$. Kolmiot HBF ja AGF ovat yhdenmuotoiset. Koska FG on Γ_1:n halkaisija, $\angle GAF = \angle BHF = 90°$. Koska $EO \perp \tau$ ja siis $EO \perp BD$, niin tason EGF kaksi suoraa on kohtisuorassa BD:tä vastaan. Täten BD on kohtisuorassa tasoa EGF vastaan ja erityisesti $BD \perp EF$.

22. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä on Γ. Olkoon P piste Γ:n sisäpuolella. Olkoot X, Y ja Z ne pisteet, joissa suorat AP, BP ja CP myös leikkaavat Γ:n. Määritä ne pisteet P, joille XYZ on tasasivuinen kolmio.

Ratkaisu. Piste P ei voi olla kolmion ABC ulkopuolella. Jos P olisi esim. lyhyemmän kaaren AB määrittämässä segmentissä, olisi se kaarista XY, joka ei sisällä pistettä Z, suurempi kuin 180°. Olkoon siis P sellainen ABC:n sisäpiste, että kolmio XYZ on tasasivuinen. Kolmiosta APY saadaan $\angle APB = \angle PAY + \angle PYA = \angle XZY + \angle ACB = \angle ACB + 60°$. Samoin saadaan $\angle BPC = \angle BAC + 60°$ ja $\angle CPA = \angle CBA + 60°$. Mutta tunnetusti niiden pisteiden joukko, joista annettu jana näkyy annetussa kulmassa koostuu kahdesta ympyränkaaresta janan eri puolilla. Kolmion ABC sisällä on siten enintään yksi tehtävän ehdon toteuttava piste P. Tällainen piste myös on olemassa, koska edellä saatu kulmaehto merkitsee, että mainitut kaaret ovat kokonaan kolmion sisällä ja siis leikkaavat toisensa.

23. n kiveä asetetaan yhdeksi tai useammaksi kasaksi. Mikä on eri kasoissa olevien kivien lukumäärien tulon suurin mahdollinen arvo?

Ratkaisu. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_k$ positiivisia kokonaislukuja, joiden summa on n. Tehtävä on maksimoida tulo $x_1 x_2 \cdots x_k$. Eri vaihtoehdot läpikäymällä havaitaan, että jos $1 \leq n \leq 4$, maksimi on n ja se saadaan, kun $k = 1$. Olkoon $n \geq 5$. Maksimitapauksessa ei voi olla $x_j = 1$, koska tulo suurenisi, jos jokin x_i korvattaisiin $x_i + 1$:llä ja x_j jäisi pois. Myöskään mikään x_j ei ole > 4, koska jos $x > 4$, niin $2(x-2) = 2x - 4 > 0$; tulo suurenisi, jos x_j korvattaisiin luvuilla 2 ja $x_j - 2$. Minkään x_j:n ei tarvitse olla 4, sillä $x_j = 4$, tulo ei muutu, jos x_j korvataan kahdella 2:lla. Lisäksi $x_j = 2$ enintään kahdella j:n arvolla, koska $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, mutta $3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$. Maksimitilanteessa on siis vain lukuja $x_j = 3$ ja $x_j = 2$; jälkimmäisiä enintään kaksi kappaletta. Maksimitulot ovat siten seuraavat: jos $n = 3m$, maksimi on 3^m, jos $n = 3m + 1$, maksimi on $4 \cdot 3^{m-1}$, jos $n = 3m + 2$, maksimi on $2 \cdot 3^m$. Jos $n = 1$, maksimi on 1.

24. Määritellään lukujonot (a_n) ja (b_n) seuraavasti: $a_1 = 9$, $b_1 = 3$, $a_{k+1} = 9^{a_k}$, $b_{k+1} = 3^{b_k}$, kun $k = 1, 2, \ldots$ Määritä pienin n, jolle $b_n > a_{2001}$.

Ratkaisu. Jos $3^p > 3^q$, niin $3^p \geq 3^{q+1} > 2 \cdot 3^q$. Osoitetaan induktiolla, että $b_k < a_k < b_{k+1}$ kaikilla k. Väite pätee, kun $k = 1$: $b_1 = 3 < 9 = a_1 < 3^3 = b_2$. Oletetaan, että $b_k < a_k < b_{k+1}$. Silloin $3^{b_k} > a_k = 9^{a_{k-1}} = 3^{2a_{k-1}}$, joten $b_{k+1} > 2a_k$. Näin ollen $a_{k+1} = 9^{a_k} > 3^{a_k} > 3^{b_k} = b_{k+1}$ ja $a_{k+1} = 9^{a_k} = 3^{2a_k} < 3^{b_{k+1}} = b_{k+2}$. Tästä seuraa, että $b_{2001} < a_{2001} < b_{2002}$, joten tehtävän vastaus on $n = 2002$.

25. Tasossa on annettuina 2000 pistettä. Osoita, että pisteet voidaan yhdistää pareittain 1000 janalla, jotka eivät leikkaa toisiaan.

Ratkaisu. Jos pisteet yhdistetään pareittain 1000 janalla niin, että janojen pituuksien summa on mahdollisimman pieni, niin janat eivät leikkaa toisiaan. Jos nimittäin AB ja CD leikkaisivat pisteessä P, olisi $AB + CD = AP + PB + CP + PD > AC + BD$.

26. Eräs tehdas tuottaa samankokoisia säännöllisiä tetraedreja. Tehdas maalaa tetraedrinsa neljällä värillä A, B, C ja D, kukin tahko omallaan. Montako erilaista tetraedria on mahdollista tuottaa?

Ratkaisu. Olkoot värit $\{A, B, C, D\}$. Väritetty tetraedri voidaan aina kääntää niin, että pohjan väri on A ja että B-väri osoittaa esim. etelään. Silloin on vain kaksi mahdollisuutta sijoittaa C- ja D-värit: C luoteeseen ja D koilliseen tai päinvastoin. Erilaisia tetraedriväritykset on siis vain kaksi.

27. Maalaiskoulussa on 20 lasta. Jokaisella kahdella lapsella on yhteinen isoisä. Todista, että eräällä isoisällä on ainakin 14 lastenlasta.

Ratkaisu. Olkoot A ja B X:n isoisät. Olkoon lapsista kaikkiaan k kappaletta, $k \geq 1$, sellaisia, joiden isoisät ovat A ja B. Olkoon Y lapsi, jonka isoisät eivät ole A ja B. Kuitenkin toinen näistä on Y:n isoisä; olkoon toinen isoisä C ja toinen A. Lapsen Z toinen isoisä on joko A tai B ja toinen isoisä joko A tai C. Isoisiä on siis enintään 3, ja C on kaikkien niiden $20-k$:n lapsen isoisä, joiden isoisät eivät ole A ja B. Olkoon A:lla ja C:llä n yhteistä lapsenlasta; silloin B:llä ja C:llä on $20-k-n$ yhteistä lapsenlasta. Ainakin yksi luvuista k, n, $20-k-n$ on enintään 6. Jos esim. $k \leq 6$, niin C:llä on $(20-k-n)+n = 20-k \geq 14$ lapsenlasta.

28. Toisessa koulussa oli 13 tyttöä ja 10 poikaa. Opettaja jakoi namusia. Kaikki tytöt saivat keskenään yhtä monta ja kaikki pojat keskenään yhtä monta. Kukaan ei jäänyt ilman. Osoittautui, että tapa, jolla opettaja jakoi namuset, oli ainoa tapa, joka täytti edellä kuvatut ehdot. Montako namusta opettajalla enintään oli?

Ratkaisu. Jos namuja oli x ja jos jokainen poika sai a ja jokainen tyttö b namua, niin $13a+10b = x$. Yhtälön yksittäisratkaisu on $a = -3x$, $b = 4x$ ja yleinen ratkaisu $a = -3x + 10t$, $b = 4x - 13t$, missä t on mielivaltainen kokonaisluku. Koska $a > 0$ ja $b > 0$, on oltava $10t > 3x$ ja $13t < 4x$ eli $\frac{3x}{10} < t < \frac{4x}{13}$. Jos $\frac{4x}{13} - \frac{3x}{10} = \frac{x}{130} > 2$, tehtävällä on enemmän kuin yksi ratkaisu. Jos $x = 260$, ehto sievenee muotoon $78 < t < 80$. Tällöin ratkaisuja on vain yksi. Opettajalla oli enintään 260 namusta.

29. Todista, että

$$\frac{1}{668} + \frac{1}{669} + \cdots + \frac{1}{2002} = 1 + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2}{5\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \frac{2}{2000\cdot 2001\cdot 2002}.$$

Ratkaisu. Jaetaan $\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$ osamurtoihin: yhtälöstä

$$\begin{aligned}\frac{2}{(n-1)n(n+1)} &= \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1}\\ &= \frac{(n^2+n)A + (n^2-1)B + (n^2-n)C}{(n-1)n(n+1)}\\ &= \frac{(A+B+C)n^2 + (A-C)n - B}{(n-1)n(n+1)}\end{aligned}$$

saadaan $B = -2$, $A = C$, $2A + B = 0$, $A = C = 1$. Siis

$$\begin{aligned}\frac{2}{(n-1)n(n+1)} &= \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\\ &= -\frac{3}{n} + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

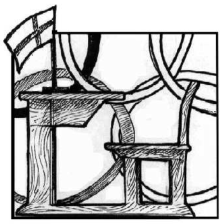
Mutta näin ollen

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{667} \frac{2}{(3k-1)\cdot 3k\cdot (3k+1)}\\ &= -\sum_{k=1}^{667} \frac{3}{3k} + \sum_{m=2}^{2002} \frac{1}{m} = -1 + \sum_{m=668}^{2002} \frac{1}{m},\end{aligned}$$

mikä on sama kuin tehtävän väitös.

30. Olkoon $\mathbb{N}^*$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, joille $f(n+m) = f(n)f(m)$ kaikilla m, $n \in \mathbb{N}^*$ ja joille yhtälöllä $f(f(x)) = (f(x))^2$ on ainakin yksi ratkaisu $x \in \mathbb{N}^*$.

Ratkaisu. Olkoon $f(1) = a$, Silloin $f(n+1) = f(1)f(n) = af(n)$. Tästä seuraa induktiolla, että $f(n) = a^n$. Yhtälö $f(f(x)) = (f(x))^2$ on siis sama kuin $a^{a^x} = (a^x)^2 = a^{2x}$. Jos $a = 1$, yhtälön ratkaisuja ovat kaikki $x \in \mathbb{N}^*$. Jos $a \neq 1$, yhtälö saa muodon $a^x = 2x$. Ratkaisuja voi olla vain parillisilla a:n arvoilla. Jos $a > 2$, niin $a^n > 2^n \geq 2n$. Kun $a = 2$, yhtälöllä on ratkaisu $x = 1$. Tehtävällä on siis kaksi ratkaisua: $f(n) = 1$ kaikilla n ja $f(n) = 2^n$ kaikilla n.



Matematiikkaleirillä Unkarin Köszegissä 4.–9.8.2002

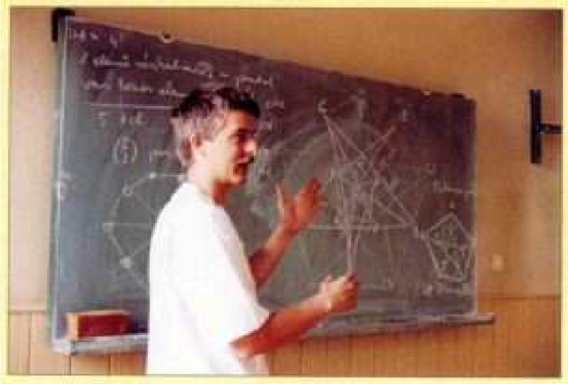
Timo Tossavainen
Lehtori, Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto
timo.tossavainen@joensuu.fi[1]

Unkarin länsiosassa sijaitsevassa Köszegin pikkukaupungissa järjestettiin elokuun toisella viikolla matematiikkaleiri, jolle kokoontui noin sata matematiikasta innostunutta nuorta ja heidän opettajaansa. Kyse on Unkarissa jo perinteeksi muodostuneesta toiminnasta, jossa matemaattisesti lahjakkaille 10–17 -vuotiaille nuorille ja heidän opettajilleen järjestetään erityisopetusta matematiikkaan liittyvistä aiheista. Leirille kutsuttiin myös vierailijoita ulkomailta tutustumaan unkarilaiseen matematiikan opetukseen.

Unkarissa järjestetään lapsille ja nuorille useita erilaisia kilpailuja matematiikassa. Esimerkiksi Kömal-niminen lehti, joka ilmestyy säännöllisesti, on perustettu erityisesti sitä varten, että siinä julkaistaan kilpailukysymyksiä, joihin osallistujat vastaavat lähettämällä ratkaisuehdotuksensa lehden toimitukseen. Kiinnostavimmat ratkaisut julkaistaan seuraavassa numerossa ja vuoden lopussa parhaiten menestyneet kilpailijat palkitaan erilaisin tavoin. Eräänä palkintona on pääsy sellaiselle leirille, joka järjestettiin tänä kesänä Köszegissä.

Leiriohjelma oli suunniteltu siten, että jokainen päivä alkoi klo 8.00 oppitunneilla. Oppilaat oli jaettu ryhmiin ikänsä perusteella ja kullakin ryhmällä oli kaksi opettajaa. Aamupäivisin oppilaat tutustuivat sellaiseen matematiikkaan, jota heille ei opeteta peruskoulussa eikä lukiossa. Oppituntien aiheet vaihtelivat stokastisista prosesseista ongelmanratkaisuun. Yleensä ryhmät saivat teoriaopetuksen lisäksi harjoitustehtäviä, joita oppilaat ratkoivat iltaisin. Iltapäivien ohjelma oli oppilaiden osalta joustavampi, he saivat osallistua mieltymystensä mukaan joko liikunnallisiin rientoihin tai erilaisille oppitunneille, joiden aiheet olivat varsin samanlaisia kuin aamupäivien tunneillakin. Opetusta kesti parhaimpina päivinä iltakymmeneen asti ja siihen osallistuttiin aktiivisesti.

[1] Kirjoittaja sai matka-avustusta Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitokselta.



Erityisesti tietotekniikkaan ja peleihin liittyvät kombinatoriset ongelmat tuntuvat kiinnostavan unkarilaisia nuoria. Esimerkkinä voidaan mainita vaikkapa peli, jossa pöydälle pinotaan jokin määrää kolikoita useaan eri pinoon. Kaksi kilpailijaa ottaa vuorotellen vähintään yhden kolikon jostakin pinosta. Voittaja on se, joka ottaa viimeisen kolikon pöydältä. Oppilaiden tehtävänä oli etsiä strategia, jolla peli voitetaan.

Myös nuorten opettajille järjestettiin luentoja. Unkarissa on jälleen kerran käynnissä opetussuunnitelmien perusteiden uudistusprosessi, ja tähän liittyvät kysymykset ymmärrettävästi kiinnostivat opettajia. Asiasisältöjen puolesta unkarilainen ja suomalainen matematiikan kouluopetus eivät näyttäisi jatkossa eroavan kovinkaan paljon toisistaan, tosin unkarilaiset arvostavat ehkä meitä hieman enemmän matemaattisten ongelmanratkaisutaitojen opettamista. Tämä näkyi muun muassa siten, että leirille osallistuneet opettajat olivat hyvin innostuneita ongelmanratkaisusessioista, joita tunnettu ja arvostettu Lajos Pósa järjesti lähes jokaisena leiripäivänä.

Lähes kansallissankarin asemaan kohonneen János Bolyain perintöä kunnioittaakseen unkarilaiset haluaisivat opettaa myös hyperbolisen geometrian alkeita lapsilleen. Tästä aiheesta István Lénárt piti hyvin vakuuttavan esityksen värikkäiden pallojensa avulla.

Ulkomaalaista tarkkailijaa saattoi leirillä hämmästyttää oppilaille annettavien harjoitustehtävien vaativuustaso. Tehtävät vaativat usein varsin hyvää kaavojen käsittelytaitoa, tai sitten ne edellyttivät jonkin erityisen näppärän tempun keksimistä. Esimerkiksi 16-vuotiaita oppilaita pyydettiin määrittelemään sellainen (jatkuva) funktio f, että yhtälöllä $x = f(f(f(x)))$ on ratkaisu x siten, että $f(x) \neq x$. On kuitenkin muistettava, että leirille osallistuneet olivat matemaattisesti erityislahjakkaita nuoria ja lapsia, joista useimmat olivat osallistuneet matemaattisiin kilpailuihin jo monen vuoden ajan. Kilpailujen lisäksi matematiikasta kiinnostuneista oppilaista pidetään Unkarissa muutenkin hyvää huolta, tästä kertoo esimerkiksi se, että Unkarissa on taloudellisesti kannattavaa julkaista 4 000 matemaattisesta ongelmasta koostuva harjoituskirja (kilpailuja ja ylioppilaskirjoituksia varten). Tätä uunituoretta kirjaa esitteli István Hortobágyi.

Suomalaista matematiikan opettajaa alkaa tietysti tällaisella leirillä mietityttämään pitäisikö samanlaista toimintaa järjestää Suomessakin. Kyselin leiriviikon aikana useammaltakin opiskelijalta, miksi he tulevat vapaaehtoisesti kesken kesälomansa viikoksi leirille opiskelemaan matematiikkaa (myös opettajat olivat tulleet vapaaehtoisesti ja palkatta). Vastaus oli aina sama: koska matematiikka on kivaa ja on mukavaa tutustua toisiin matematiikasta innostuneisiin ihmisiin. Näiden nuorten rohkaisemana vastaan asettamaani kysymykseen myönteisesti. Haastankin kaikki matematiikasta innostuneet ihmiset pohtimaan yhdessä millainen voisi olla leiri, jolla suomalaiset nuoret ja heidän opettajansa – ja myös vanhempansa – voisivat iloita matematiikasta.

Kirja-arvio

Osmo Pekonen: Marian maa. Lasse Heikkilän elämä 1925–1961

Osmo Pekosen kirja on, kuten Pekoselta voi odottaakin, monipuolisesti aihettaan käsittelevä, mielenkiintoinen ja lennokkaan sivistynyt. Paitsi päähenkilön ja hänen kohtaamiensa ihmisten vaiheiden kautta eläväksi tulevaa maamme kohtalokasta lähihistoriaa, antaa kirja monenlaista ajateltavaa Heikkilän kirjallisen toiminnan sekä hänen matemaattisten, filosofisten ja uskonnollisten harrastustensa parista. Tässä on muutama esimerkki meille nykyajan ihmisille mietittäväksi.

Ote Heikkilän kirjeestä 4.10.1947: ”Logistiikalle olen aina kiitollinen eräästä voitosta; kuulostanee paradoksaaliselta, kun sanon sen: kurista! Olen oivaltanut kurin merkityksen, ilman sitä ei tule mitään. En tarkoita preussilaista sellaista, vaan ylipäätään kiinteyttä ja kestävyyttä. Se on hankittavissa vain kurilla: pitää ajatuksensa kohdistettuina vain yhteen asiaan kerrallaan ja syventymällä.” Korkeampi matematiikka puolestaan oli Heikkilälle eräänlaista turvallista huumetta: ”Imaginäärinen maailma on uusi maailma: uusi ulottuvuus on tullut ja se sattuu vähän ja sitten se maistuu hyvälle kuin humala, raitis humala, sillä se on viisauden tuote.”

Kirjasta löytyy myös Heikkilän kirjoittamien Peilielegioiden lähtökohta, matemaatikon ja katolisen kirkon kardinaalin *Nicolaus Cusanuksen* (1401–64) vertaus pähkinäpuusta: Fyysisillä silmillämme näemme pelkän pähkinäpuun, sen haarautuvat oksat ja niissä olevat pähkinät. Mutta näkemyksemme voi tunkeutua syvemmälle. Ymmärryksen silmillä tajuamme, että tämä puu kerran oli pieni siemen, josta se on kasvanut. Siemenessä piili sisäinen kyky kasvaa juuri pähkinäpuuksi eikä miksikään muuksi. Tämä kyky kasvaa pähkinäpuuksi on kykynä tyhjentymätön ja ainoastaan siten rajoitettu, että se tekee mahdolliseksi vain pähkinäpuun. Näkemyksemme voi tunkeutua yhä vain syvemmälle. Älyn silmillä näemme kaikkien siementen siemenen, kaikkien voimien voiman, mikä ei ole enää ylipäätänsä rajoitettu, vaan joka aikaansaa kaiken, kaikkien luontojen luonnon. Näemme tässä versovassa puussa äärettömän Jumalan tai vielä enemmän: näemme kasvavassa puussa äärettömän Jumalan kasvavana puuna. Näemme äärellisessä kuvassa – peilikuvassa – äärettömän alkukuvan symbolisena.

Heikkilä siteeraa eräässä käsikirjoituksessaan myös *Teresa Avilalaista*, joka puhuu nunnille: ”Eikö osoittaisi suurta tietämättömyyttä, tyttäreni, jos ihmiseltä kysyttäisiin, kuka hän on, eikä hän tuntisi itseään ja nimeään, ei tietäisi kuka on hänen isänsä, äitinsä ja synnyinmaansa? Mutta jos tämä olisi suurta typeryyttä, on oma typeryytemme vertaa vailla, kun emme pyri ottamaan selvää siitä, keitä olemme, vaan pysyttelemme tässä ruumiissa ja umpimähkään tiedämme, että meillä on sielu (koska olemme sen kuulleet ja koska usko niin meille väittää), mutta mitä kykyjä voi tällä sielulla olla tai kuka siinä asuu tai kuinka suuri on sen arvo, sitä harvoin tutkistelemme, ja niin jää perin vähäiseksi pyrkimyksemme kaikin tavoin säilyttää sielun kauneutta. Koko kiinnostuksemme kohdistuu jalokiven karkeaan kehykseen tai tämän linnan ulkomuuriin eli omaan ruumiiseemme.”

Pekonen on omistanut yhden luvun äärettömyyskäsitteelle, joka kiehtoi Heikkilää – kuten monia muitakin.

Marjatta Näätänen, dosentti, matematiikan laitos, HY