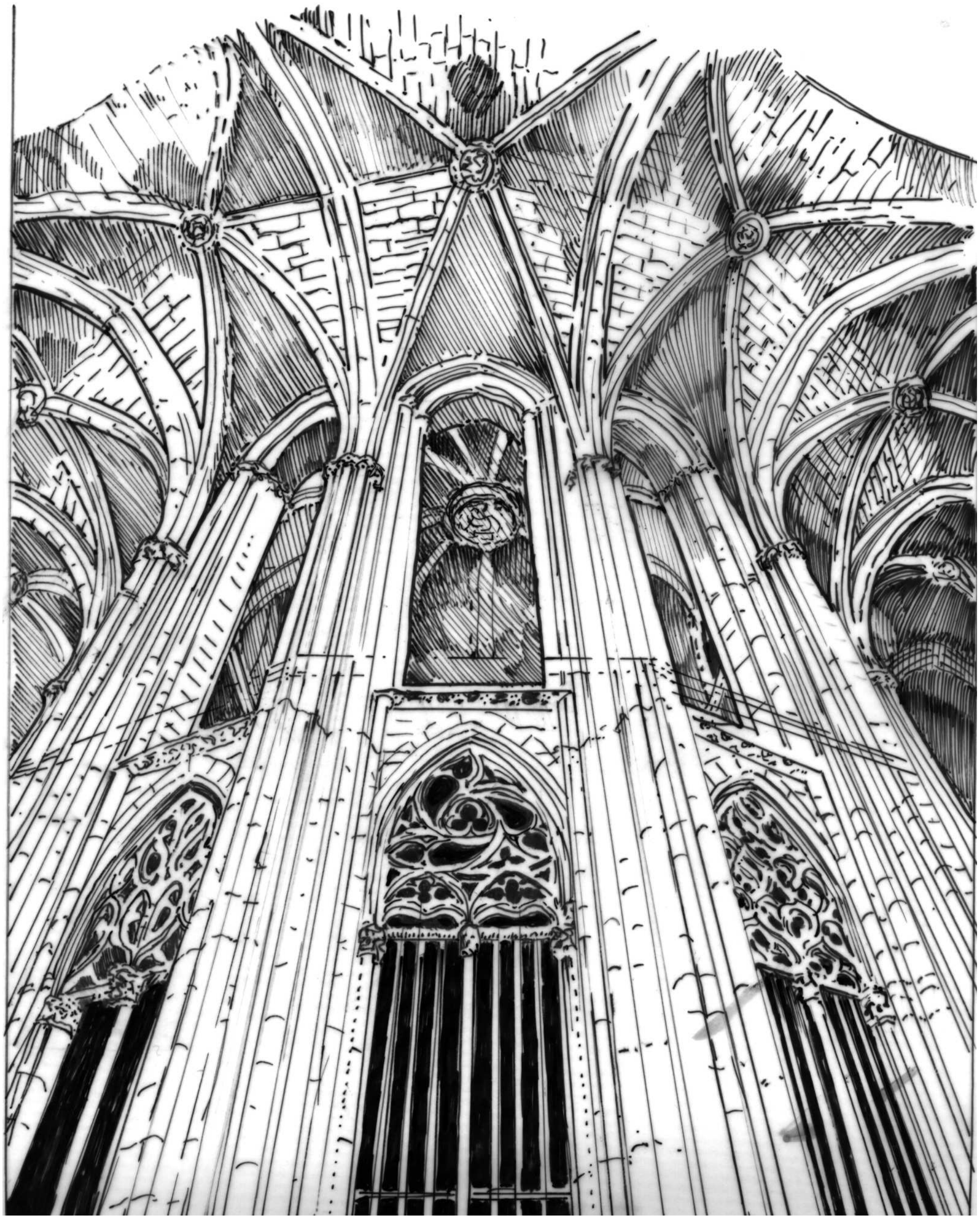
Solmu

Matematiikkalehti
1/2003

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 1/2003

Kansi: Tortosan katedraali, rakennettu vuosina 1347–1400

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

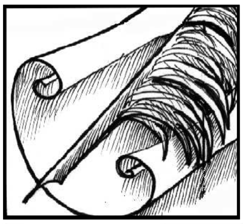
Numeroon 2/2003 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 15. maaliskuuta 2003 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa sekä Suomen Kulttuurirahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys

Tästä Solmun numerosta lähtien pääkirjoituksia kirjoittavat myös muut kuin päätoimittaja.



Pääkirjoitus

Valtakunnalliset matematiikan ja luonnontieteiden osaamisen kehittämistalkoot, LUMAna tunnetut, avattiin virallisesti 24. huhtikuuta 1996. Talkoot vietiin päätökseen 12. joulukuuta 2002. Tuolloin julkistettiin kansainvälisen arviointiryhmän kohteliaan ankara kritiikki. Parisen viikkoa aiemmin LUMA-väki purjehti ohjelman unohduksiin Silja Serenadella Helsingin ja Tukholman välillä päätösseminaarissa, jossa ei liikaa menneitä muisteltu, vaan mentiin kokka kohisten tulevaisuuteen uusien opetussuunnitelmien parissa.

LUMAn taustalla oli poliitikoissa syntynyt harvinainen matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tasoa ja tuloksia koskenut huolitila. Nämä tieteet kun eivät ole vain yhteiskunnan ja sivistyksen kulmakivi, vaan niillä koetaan olevan ihan oikeaa merkitystä kansantaloudelle. Nokia käy insinööreillä, eikä insinööriä synny ilman jonkinmoisia matematiikan ja luonnontieteiden taitoja. Niitä taas voi mitata vaikka ylioppilaskirjoituksissa laajempaa matematiikkaa suorittavien lukumäärillä. Joku voisi sanoa, että vaikkapa hyväksymiskynnyksen ylittämiseen vaadittava tietomäärä mittaisi sekin tulevan insinöörin laatua, mutta mitäpä nyt sentään lillukanvarsista.

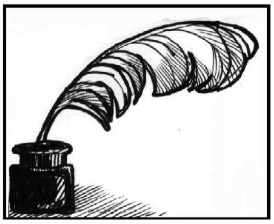
Poliitikkojen huoli muuttui sanaksi hallitusohjelmassa ja teoiksi Opetusministeriön ja Opetushallituksen virkahuoneissa. Kehitystä ei synny ilman rahaa, ja raha on niukkaa, ainakin opetusalalla. Mutta meillähän on Suomessa talkooperinne. Siispä valittiin muutama kymmen kuntaa, joihin jaettuna LUMA-resurssi ei aivan olemattomiin huvennut, annettiin tehtäväksi kehittää parempaa ja tuloksellisempaa opetusta, ja odotettiin, että kateelliset mutta innokkaat naapurikunnat seuraavat perässä omin neuvoin. Ja tuloksiahan on syntynyt. Ihan selvästi pitkää matematiikkaa kirjoittaa nyt useampi ylioppilaskokelas kuin ennen talkoita. Opettajia on täydennyskoulutettu monen monta tuntia.

Kuin lahjana taivaasta juuri LUMAn viimeiseen vuoteen tupsahti OECD:n laaja lukutaidon, matematiikan ja luonnontieteiden vertailututkimus PISA. Suomi oli aivan kärjessä, ennen muuta lukutaidossa, mutta myös matematiikassa ja luonnontieteessä! Ja tulos on varmasti luotettavaa. Sen paremmin ei voi tutkimusta suunnitella, tästä vakuuttuu jokainen, joka yrittää perehtyä PISAn ositettuihin otoksiin ja niistä jalostettuihin pisteisiin tutkimusorganisaation monisatasivuisesta (vain näihin tilastomenetelmiin keskittyvästä) selosteesta. Mutta H.C. Andersenkin – se keisarin uusista vaatteista kirjoittanut tanskalainen – oli viisas mies.

PISAn koehenkilöt käyttivät alkeislaskutoimitusten mukaan noin 20 minuuttia tutkimuksen matematiikan osioon vastaamiseen. Kysymyksistä ei ole julkistettu kuin näytteitä. Nämä näytteet ainakaan eivät sisällä juuri mitään muuta kuin luetun ymmärtämistä koskevia kysymyksiä. Tutkimuksen mahtipontisen ja maailmoja syleilevän kehyksen – ”matematiikan suuret ideat” – kanssa niillä ei ainakaan minusta ole juuri tekemistä. Matematiikan opetuksemme korkeatasoisuuden todistelu PISAn tuloksiin viittaamalla ei ainakaan minuun tehoa.

Opetusta kehitetään seuraavaksi kirjoittamalla opetussuunnitelmat uusiksi. Välituloksia lukiessaan kysyy, ovatko asialla aina olleet matematiikkaa ymmärtävät. Joskus tulee mieleen, että opetuksen kehittämistäkin tärkeämpää olisi hyvä opetus. Siihen tarvitaan hyvät ja motivoituneet (vain siten voi itsekin motivoida) opettajat ja oppilaat, jotka tietävät, että matematiikkaan(kaan) ei ole kuninkaantietä. Matematiikkaa voi oikeasti oppia vain työtä tekemällä.

Matti Lehtinen



Toimitussihteerin palsta

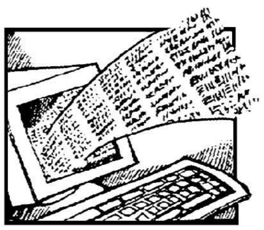
Tulevaisuuden informaatioyhteiskunnassa selviytymiseen vaadittavien taitojen opettaminen on yksi tämän hetken suurista haasteista. Olemme lähestymässä tilannetta, jossa tietotekniset valmiudet ovat lukutaitoon rinnastettava perustaito. Koulutus, teknologia, laitteet ja ohjelmistot eivät kuitenkaan ole tasapuolisesti kaikkien saatavilla. Erityisesti tämä on ongelma kehitysmaissa, joilla ei ole varaa maksaa ulkomaisesta huipputeknologiasta.

Sellaisten taitojen opettaminen, joiden käyttäminen edellyttää tietyn kaupallisen tuotteen ostamista, ei ole maksuttoman ja kaikille avoimen koulutuksen periaatteiden mukaista. Kuitenkin lähes kaikessa tietotekniikkaan liittyvässä opetuksessa on kysymys juuri siitä.

Vuoden 2002 aikana vapaat ja avoimen lähdekoodin ohjelmistot, etenkin Linux-käyttöjärjestelmä, ovat olleet näkyvästi esillä otsikoissa. Tähän ovat vaikuttaneet talouden laskusuhdanteesta johtuva yritysten ja yhteisöjen halu etsiä säästöjä, vapaiden ohjelmistojen käytettävyyden parantuminen sekä monissa maissa poliittisten päättäjien halu suunnata ohjelmistohankintoja kotimaisille yrityksille. Vaikka vapailla ohjelmistoilla usein tavoitellaan säästöjä, ei raha kuitenkaan ole ainoa eikä edes tärkein syy niiden käyttämiseen.

Monet vapaat ohjelmistot ovat pitkään olleet harrastajien suosiossa. Viimeistään vuoden 2002 aikana nämä ohjelmistot ovat kuitenkin kypsyneet vakavasti otettaviksi vaihtoehdoksi kaikkeen tietojenkäsittelyyn. Vapaita ohjelmistoja ovat ottaneet tai ottamassa käyttöön mm. Saksan liittopäivät, Etelä-Korean julkishallinto sekä Turun kaupunki. Slashdot-lehden mukaan Tanskassa suunnitellaan kaikkien koulujen siirtymistä Linux/StarOffice -ympäristöön. Seuraavassa artikkelissa kerron vapaista ohjelmistoista.

Antti Rasila



Mitä ovat vapaat ohjelmistot?

Antti Rasila
Tutkija
Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Vapailla ohjelmistoilla (free software, logiciel libre) tarkoitetaan ohjelmia, joiden lähdekoodi on vapaasti käytettävissä, levitettävissä, muutettavissa ja edelleen välitettävissä eteenpäin muutetussa muodossa. Ero vapaiden ja ilmaisten ohjelmistojen välillä on se, että vapaan ohjelmiston käyttäjä ei sitoudu ohjelmiston toimittajaan tulevaisuuden käyttötarpeissaan. Ilmaisen ohjelmiston kehitys saattaa loppua tai ohjelman seuraava versio ei olekaan enää ilmainen. Lähdekoodin julkisuus ja vapaa muokattavuus takaa, että jos ohjelmiston kehitys yllättäen loppuisi tai alkaisi edetä käyttäjän kannalta huonoon suuntaan, kuka hyvänsä voi muokata lähdekoodista mieleisensä uuden version.

Lähdekoodin levityksessä käytettävä lisenssisopimus jakaa vapaat ohjelmistot kahteen ryhmään. Näistä ensimmäinen on niinkutsuttu BSD-lisenssi, jonka nimi tulee Berkeleyn yliopistossa kehitetystä BSD UNIX -käyttöjärjestelmästä. Tähän lisenssityyppiin pohjautuvat ohjelmistot ovat kaikkien vapaasti muokattavissa ja levitettävissä ilman erityisiä lisärajoituksia, kunhan tietoa alkuperäisistä tekijöistä ei poisteta koodista. Toinen lisenssityyppi on Richard Stallmanin kehittämä GPL (General Public License), jonka tarkoituksena on taata ohjelmiston säilyminen vapaana myös tulevaisuudessa. Ajatus on, että kuka hyvänsä voi käyttää lähdekoodia ohjelman uuden version tai kokonaan uuden ohjelmiston rakennusosana, kunhan myös uusi ohjelmisto (lähdekoodeineen) julkaistaan vapaan ohjelmistolisenssin alaisuudessa. Esimerkkejä tähän lisensointiratkaisuun perustuvista ohjelmistoista ovat tunnetuimmat vapaan lähdekoodin ohjelmistot, kuten Linux-käyttöjärjestelmäydin, toimisto-ohjelmisto OpenOffice.org sekä web-selain Mozilla.

Lisenssillä on merkitystä

Ensisilmäyksellä BSD-tyyppinen lisenssi näyttää tarjoavan käyttäjälle ja ohjelmiston kehittäjälle enemmän vapautta. Näin ei kuitenkaan välttämättä ole; monet tunnetuimmista kaupallisista ohjelmistoista, kuten Apple OS X ja Microsoft Windows nimittäin sisältävät merkittävässä määrin erilaisista BSD-lisensoiduista vapaista ohjelmistoprojekteista otettuja osia. Nämä ohjelmistot eivät kuitenkaan ole vapaita, eivätkä alkuperäisen ohjelmiston kehittelyyn osallistuneet mitenkään hyödy antamastaan panoksesta. Pelkkä alkuperäinen, vapaasti saatavilla oleva koodi ei anna kilpailijalle mahdollisuutta tehdä yhteensopivaa ohjelmistoa, koska vapaan ja julkisen perustan päälle on rakennettu salaisia ja dokumentoimattomia ominaisuuksia. GPL-lisenssi ei mahdollista vapaan ohjelmakoodin käyttämistä kaupallisen ohjelmiston pohjana. Täten uuden ohjelmiston kehittäjille on tarjolla kaksi vaihtoehtoa, joko kirjoittaa koko koodi itse ja valita mieleisensä lisenssi tai sitten käyttää pohjana vapaasti saatavaa lähdekoodia ja tarjota ohjelmisto sitten vapaaseen levitykseen. Vapaan ohjelmiston myynnille ei sinänsä ole mitään estettä.

Taloudellisia näkökohtia

Ohjelmiston vapaa levitettävyys ei välttämättä tarkoita, etteivät ohjelmiston kehittäjät voisi taloudellisesti hyötyä työstään. Ilmeisten tuki- ja koulutuspalvelujen lisäksi on mahdollista esimerkiksi myydä lisäpalveluna ohjelmistotuotteen muokkaamista käyttäjän erityistarpeita vastaaviksi. GPL-lisenssi voi tarjota myös yllättäviä etuja puhtaasti kaupallisesti motivoituneelle tuottajalle. Vaikka joidenkin ohjelmistojen myynnillä tehdään suuria voittoja, tämä ei ole totta kaikkien kohdalla.

GPL-lisensointi tarjoaa todennäköisiä säästöjä koodin ylläpidossa ja estää tehokkaasti kilpailijoita ottamasta koodia osaksi omaa kaupallista tuotettaan. Nämä seikat saattavat tehdä tämän lisenssin erityisen houkuttelevaksi sellaisten tuotteiden levityksessä, joiden itsenäinen taloudellinen arvo on vähäinen mutta joiden kehittäminen auttaa myymään jotakin muuta oheistuotetta, kuten laitteistoja tai isoja tietokantaohjelmistoja. Tämä lienee motivaationa monien isojen ohjelmisto- ja laitteistotoimittajien, kuten IBM, Oracle ja Sun Microsystems, aktiiviselle panostukselle vapaiden ohjelmistojen kehitystyössä. Koska vapaat ohjelmistot eivät ole kenenkään omaisuutta, sisältää niiden tukeminen vähemmän riskejä epäedulliseen kilpailuasemaan joutumisesta kuin kilpailijan kaupalliseen ohjelmistoon sitoutuminen. Esimerkiksi tietokantoihin erikoistuneen Oraclen tuotteet vaativat toimiakseen käyttöjärjestelmän, mutta käyttöjärjestelmätoimittajista esimerkiksi Microsoft ja IBM myyvät myös kilpailevia tietokantaratkaisuja. Siksi Linux-käyttöjärjestelmän suosiminen on myös liiketaloudellisesti järkevä ratkaisu.

Tämä osoittaa, etteivät vapaat ohjelmistot tarkoita ohjelmistoteollisuuden loppua ja kaikkien ohjelmoijien joutumista työttömiksi. Itseasiassa vapaat ohjelmistot tarjoavat monissa tapauksissa huomattavia mahdollisuuksia uusien työpaikkojen luomiseen. Jo aikaisemmin mainittujen lisäpalvelujen lisäksi vapaita ohjelmia voi paikallisesti muokata käyttäjäkunnan tarpeita vastaaviksi. Kysymykseen saattaa tulla esimerkiksi jonkin ohjelman kääntäminen pienelle kielialueelle, josta saatavat myyntitulot eivät yksin riittäisi kaupallisen ohjelmiston tukemiseen. Erityisen suuria nämä edut ovat kehitysmaissa, joissa tarvittavat muutokset voidaan tehdä paikallisen palkkatason mukaisin kustannuksin, ulkomaanvaluuttaa käyttämättä. Vapaita ohjelmistoja käyttämällä voi edistää paitsi ohjelmoijien työmahdollisuuksia, myös ohjelmistokehityksen työpaikkojen tasapuolisempaa maantieteellistä jakautumista, koska suurin osa kaupallisista ohjelmistoista kehitään Yhdysvalloissa.

Muita vapaan ohjelmiston etuja

Kaupallisten ohjelmistojen markkinointi perustuu usein ajatukseen, että ohjelmaa levitetään edullisesti, jopa ilmaiseksi, vakiintuneen käyttäjäkunnan luomiseksi. Riittävän monen käyttäjän sitouduttua ohjelmistoon ja sijoitettua tarpeellisiin laitteisiin ja koulutukseen, ohjelmiston hintaa nostetaan. Käyttäjät eivät kuitenkaan halua siirtyä kilpailevan valmistajan tuotteeseen, koska tämä tarkoittaisi huomattavaa lisävaivaa sekä koulutuksesta ja mahdollisista laitteistohankinnoista aiheutuvia kustannuksia. Siksi useimmat käyttäjät maksavat uuden hinnan, jota tietenkin nostetaan jälleen seuraavassa versiossa. Vapaan ohjelmiston tärkein etu on suoja käyttäjän investoinneille. Kaupallisten ohjelmistojen tapauksessa yhdellä yrityksellä on yleensä monopoli ohjelmistoon liittyvien ohjeispalvelujen tarjontaan. Tämä saattaa tarkoittaa huonoa palvelua ja korkeita hintoja. Koska vapaa ohjelmisto ei ole sidottu mihinkään tiettyyn laitteisto- tai ohjelmistotoimittajaan, tuki- ja koulutuspalvelujen saatavuus perustuu markkinatalouden laeille, ja palveluun tyytymättömällä asiakkaalla on aina mahdollisuus vaihtaa toimittajaa.

Kaikkien saatavilla oleva lähdekoodi tarjoaa monia itsessään merkittäviä etuja. Koodin tutkiminen auttaa selvittämään yllättäviä virhetilanteita ja siten vähentää esimerkiksi laitteistoajurien kehitykseen kuluvaa aikaa. Ohjelmakoodissa olevat virheet löydetään ja korjataan nopeammin. Avoin lähdekoodi parantaa tietoturvaa ja sallii käyttäjän tutkia ohjelman toimintaa ja vakuuttua siitä, ettei ohjelmaan ole piilotettu salaisia takaovia tai vakoiluominaisuuksia. Tämä on merkittävä näkökohta niissä sovelluksissa, joissa käsitellään salaista tai arkaluontoista tietoa. Nämä edut ovat saaneet monet kaupallisten ohjelmistojenkin valmistajat avaamaan ainakin osia lähdekoodiaan joko täysin julkisesti tai joillekin erityisen sopimuksen tehneille asiakkailleen. Kaikki julkisen lähdekoodin ohjelmistot eivät kuitenkaan ole vapaita, eikä niihin liity parannetun luotettavuuden lisäksi muita todellisen vapaan ohjelmiston etuja.

Vapaat ja kaupalliset ohjelmistot opetuksessa

Nykyään tietotekniset valmiudet liittyvät tavalla tai toisella lähes kaikkeen tieto- ja informaatiovirtoja käsittelevään toimintaan. Monet oppilaitosten sisäiset toiminnot vaativat tietotekniikan käyttöä, opiskelijoille tarjotaan tietoa ja opetusta tietotekniikan käytössä ja opiskelijat käyttävät sitä edelleen hyväkseen itsenäisessä työskentelyssään. Oppilaitoksissa käytettävien ohjelmistojen valinnassa on otettava huomioon seuraavat näkökohdat.

Ensinnäkin, julkisen, verovaroilla ylläpidetyn instituution olisi käytettävä varoja mahdollisimman tehokkaasti ja vältettävä turhia investointeja. Tieto- ja viestintäteknologian, laitteiden ja ohjelmistojen hinta on huomattava menoerä ja lisäksi jatkuvassa kasvussa. Vapailla ohjelmistoilla saavutettaan huomattavia säästöjä ja lisäksi niiden käyttäminen vapauttaa päivityskierteen aiheuttamista jatkuvista kustannuksista. Vaikka siirtyminen aiheuttaisikin välittömiä kustannuksia, pitkällä aikavälillä se on melko varmasti halvempi ratkaisu. Tämä on etenkin huomioitava, jos kaupallista ohjelmistoa tarjotaan ilmaiseksi tai edulliseen oppilaitoshintaan; etu ei välttämättä päde päivityksiin.

Toiseksi, opetuksessa käytettäviin ohjelmistoihin sisältyy merkittävä yhteiskunnallinen valinta. Opiskelijat todennäköisimmin hankkivat tulevaisuudessa juuri niitä tuotteita, joiden käyttöä heille on opetettu. Käyttämällä opetuksessa tiettyä kaupallista tuotetta oppilaitos subventoi yleensä ulkomaista ohjelmistovalmistajaa ja sitouttaa opiskelijansa tämän tuotteisiin. Vapaan ohjelmiston käytössä tätä ongelmaa ei esiinny, koska tuote on vapaasti kaikkien saatavilla. Jos opiskelija katsoo, että jonkin kaupallisen ohjelmiston tarjoamat edut ovat hänen kohdallaan kustannuksia suuremmat ja haluaa siirtyä tämän käyttäjäksi, hänellä on siihen täysi mahdollisuus. On kaupallisen ohjelmistoyrityksen markkinoinnin, ei opettajan, velvollisuus vakuuttaa ostaja siitä, että tuotteen käyttöarvo on hintaa suurempi. Erityisen suuri tämä ongelma on, jos opetuksessa käytettävä kaupallinen ohjelmisto on ehdoton markkinajohtaja. Tällöin voi helposti syntyä sellainen käsitys, että tietokoneen käyttöön vaaditaan nimenomaan tiettyjen kaupallisten ohjelmistojen ostamista. Tämä on tietenkin syy useiden ohjelmistovalmistajien halukkuuteen tarjota tuotteitaan edullisesti oppilaitosten käyttöön.

Tunnettuja vapaita ohjelmistoja

Erilaisia vapaiden ohjelmistojen kehitysprojekteja on tällä hetkellä käynnissä useita satoja tai tuhansia. Ehdottomasti tunnetuin näistä on suomalaisen Linus Torvaldsin johdolla kehitetty Linux-käyttöjärjestelmä. Koska useimmat lukijat lienevät ainakin kuulleet tästä ohjelmistosta, en katso aiheelliseksi käsitellä sitä tarkemmin tässä yhteydessä. Linuxista kiinnostuneille on internetissä tarjolla runsaasti tietoa. Haluankin tuoda erityisesti esille sen, että vapaat ohjelmistot ovat paljon muutakin kuin Linux. Niihin siirtymisen ei tarvitse olla mikään hyppy pimeään, jossa tietotekniikan käyttö opetellaan uudestaan vieraassa ympäristössä alusta lähtien. Eräs vapaiden ohjelmistojen etu onkin se, että useimmat niistä ovat saatavissa monille eri laitteistoalustoille. Siten niiden käyttämisen voi aloitaa vaikkapa nettisivujen selailusta tai tekstinkäsittelystä, ja sitten siirtyä esimerkiksi Linux-käyttöjärjestelmään tärkeimmät sovellusohjelmat valmiiksi tuntien. Seuraavassa esitellään muutamia tunnettuja vapaita ohjelmistoja, joille kaikille on yhteistä se, että niitä voi käyttää sujuvasti eri käyttöjärjestelmien yhteydessä.

OpenOffice.org

Tekstinkäsittely, taulukkolaskenta, yms. ohjelmista koostuva ohjelmistopaketti OpenOffice.org tunnettiin aikaisemmin nimellä StarOffice. OpenOffice.org syntyi, kun suuri tietotekniikkavalmistaja Sun Microsystems havaitsi, että sillä rahamäärällä, jonka yritys vuodessa maksaa lisenssimaksuina pahimmalle kilpailijalleen, voisi itseasiassa kehittää vastaavan ohjelmiston. Niinpä Sun osti oikeudet saksalaiseen StarOfficeen, joka oli jo pitkään kehittänyt ohjelmistoa ilman suurta taloudellista menestystä. Sun päätti jakaa ohjelmistoa ilmaiseksi ja sijoittaa sen kehittelyyn vuodessa aikaisemmin Microsoftin ohjelmista maksamansa summan rahaa. Myöhemmin myös ohjelmiston lähdekoodi julkistettiin ja vapaa versio sai nimekseen OpenOffice.org. Ohjelmistosta tarjotaan edelleen myös kaupallista (joskin edullista) versiota vanhalla nimellä StarOffice. StarOffice sisältää joitakin sellaisia ominaisuuksia, joita vapaasta versiosta ei löydy, kuten lisäfontteja sekä asennus- ja käyttötukea. Sun tarjoaa myös ohjelmiston kaupallista versiota ilmaiseksi oppilaitoksille. Useimpien käyttäjien tarpeiden kannalta ohjelmisto tarjoaa samat ominaisuudet kuin Microsoft Office, ja myös sen käyttö on hyvin samankaltaista.

Mozilla

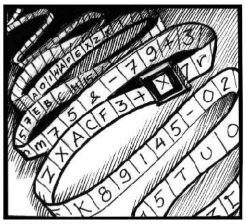
Myös Mozilla perustuu alunpitäen kaupalliseen ohjelmistoon (Netscape Navigator). Hävittyään kaupallisessa kilpailussa Microsoftin Internet Exporerille (pääasiassa siksi, että Microsoft liitti tuotteensa osaksi käyttöjärjestelmäänsä), Netscape päätti vapauttaa ohjelmansa lähdekoodin. Uusi ohjelmisto nimettiin Mozillaksi, ja myös tämä ohjelmisto on saatavissa erillisenä kaupallisena versiona vanhalla nimellään Netscape Navigator. Mozilla tarjoaa yhteensopivuudeltaan erinomaisen web-selaimen sekä sähköpostiohjelman. Tärkein syy siirtymiseen Internet Explorerista ja Outlookista Mozillan käyttäjäksi on tietoturva. Molemmissa edellä mainituista kaupallisista ohjelmistoista on ollut jatkuvia tietoturva-aukkoja, jotka ovat ilmenneet mm. sähköpostivirusten leviämisenä. Vaikka ei olekaan poissuljettua, että tilanne tulevaisuudessa muuttuu, toistaiseksi Mozillan käyttäjät ovat kuitenkin välttyneet näiltä ongelmilta. Lisäsyynä Mozillan käyttämiseen on se, että vapaana ohjelmistona sen kehitystä säätelevät vain käyttäjien toiveet ja siten siinä on kaupallisista ohjelmistoista ilmeisistä syistä puuttuvia ominaisuuksia, kuten mahdollisuus estää uusia ikkunoita avaavien mainosten toiminta.

GNU Octave

Octave on kaupallisen MATLAB:in kaltainen numeerisen matematiikan ohjelmisto. Octave kehitettiin alunpitäen prosessikemian opetusta varten. Octave sisältää korkean tason ohjelmointikielen ja tulkin, joka tulkitsee käyttäjän kirjoittamia ohjelmia. Sillä voi ratkaista erilaisia numeerisen matematiikan ongelmia, piirtää funktioiden kuvaajia sekä kirjoittaa matemaattisia ohjelmia. Octaven ohjelmointikieli sisältää nimenomaan matemaattisten ohjelmien kirjoittamiseen tarkoitettuja ominaisuuksia, kuten matriisioperaatioita. Paitsi tieteellisen laskimen korvikkeena ja laajennuksena, ohjelmaa voi käyttää esimerkiksi opetuksessa käytettävien kuvien tuottamiseen sekä erilaisten matemaattisten ilmiöiden demonstroimiseen.

Linkkejä

- Free Software Foundation
  `http://www.gnu.org`
- Open Source Initiative (OSI) – tietoa avoimen lähdekoodin ohjelmistoista
  `http://www.opensource.org/`
- Linux Online
  `http://www.linux.org/`
- Suomen Linux-käyttäjien yhdistys
  `http://www.mpoli.fi/flug/`
- Verkkolehti Linux Today
  `http://linuxtoday.com/`
- Verkkolehti Slashdot
  `http://slashdot.org`
- OpenOffice.org -toimisto-ohjelmisto
  `http://www.openoffice.org`
- StarOffice-toimisto-ohjelmisto
  `http://fi.sun.com/staroffice/`
- Mozilla web-selain
  `http://www.mozilla.org`
- Octave matematiikkaohjelmisto
  `http://www.octave.org/`
- SchoolNet Namibia – vapaisiin ohjelmistoihin perustuva projekti, joka pyrkii tarjoamaan Namibian koululaisille mahdollisuuden internetin käyttämiseen
  `http://www.schoolnet.na/`
- SchoolNet Thailand – edellistä vastaava projekti Thaimaassa
  `http://www.school.net.th/`
- LinEx – Espanjalaisen Extremaduran maakunnan kehittämä oma Linux-versio
  `http://www.linex.org/`



Matkapuhelinverkon solujen geometria

Robert Piché
Professori
Matematiikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto

Tukiasemien solut

Kun soitat matkapuhelimella bussista, puhelusi välittyy verkkoon lähimmän tukiaseman kautta (kuva 1). Vaikka bussi kulkee ja vie sinut kauas siitä ensimmäisestä tukiasemasta, puhelu ei katkea, koska järjestelmä siirtää sen käsittelyn tukiasemasta toiseen. Tukiaseman "hoitoaluetta" kutsutaan soluksi; matkapuhelin onkin englanniksi *cellular phone*. Tässä artikkelissa tutkitaan tukiasemien solujen geometriaa.

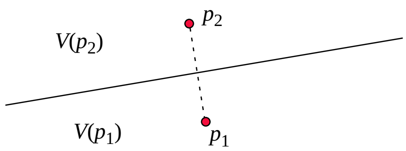
Kuva 1: Minkä muotoinen on tämän tukiaseman solu?

Aloitetaan sillä, että asemat ovat n eri pistettä tasossa. Määritellään jokaisen aseman p_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ ympärille sellainen alue, että alueen jokaisen pisteen lähin asema on p_i. Aseman p_i aluetta kutsutaan soluksi ja merkitään $V(p_i)$. Jos kahden paikan välistä etäisyyttä merkitään $d(p, q)$:lla, niin solu on pistejoukko

$$V(p_i) = \{q \mid d(q, p_i) < d(q, p_j), 1 \leq j \leq n, i \neq j\}.$$

Solujen reunalla ollaan yhtä lähellä kahta tai useampaa asemaa. Nämä raja-alueet eivät kuulu mihinkään soluun. Solujen kokoelmaa kutsutaan *solukaavioksi*.

Miltä näyttää solu? Tarkastellaan ensin kahden aseman tapausta.



Kuva 2: Kahden aseman solukaavio

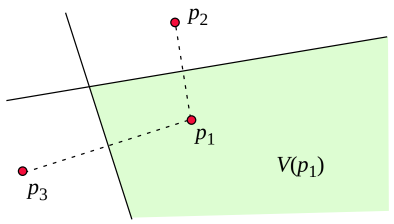
Solut $V(p_1)$ ja $V(p_2)$ ovat silloin puolitasoja (kuva 2). Solujen yhteinen raja on suora, joka puolittaa asemat yhdistävän janan (katkoviiva kuvassa 2). Jokaisen suoran pisteen etäisyys asemaan p_1 on sama kuin sen etäisyys asemaan p_2.

Jos merkitään symbolilla $h(p_1, p_2)$ asemalle p_1 kuuluvaa puolitasoa aseman p_2 suhteen, eli

$$h(p_1, p_2) = \{q \mid d(q, p_1) < d(q, p_2)\},$$

niin kahden aseman tapauksessa voidaan todeta, että $V(p_1) = h(p_1, p_2)$ ja $V(p_2) = h(p_2, p_1)$.

Lisätään kolmas asema. Silloin huomataan, että solu $V(p_1)$ (kuva 3)

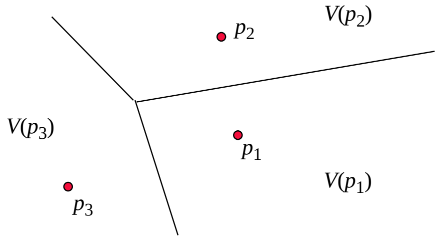


Kuva 3: Aseman p_1 solu, kun tasossa on kolme asemaa, on kahden puolitason leikkaus.

on leikkaus kahdesta asemalle p_1 kuuluvasta puolitasosta: sen puolitasosta aseman p_2 suhteen sekä puolitasosta aseman p_3 suhteen. Kaava on siis

$$V(p_1) = h(p_1, p_2) \cap h(p_1, p_3). \tag{1}$$

Kahden puolitason leikkaus on suorien rajaama alue, eli monikulmio. Puolitasot ovat kuperia alueita, joten niiden leikkaus on kupera. Kun muodostamme vastaavalla tavalla solut $V(p_2)$ ja $V(p_3)$, saadaan kaavio, jonka muodostaa kolme kuperaa monikulmiota (kuva 4).



Kuva 4: Kolmen aseman solukaavio

Reunat ovat tässä tapauksessa kaikki puolisuoria.

Kun lisätään asemia, voimme todeta, että solu $V(p_1)$ on leikkaus kaikista puolitasoista, joita se hallitsee muiden asemien suhteen. Näin kaavasta (1) tulee

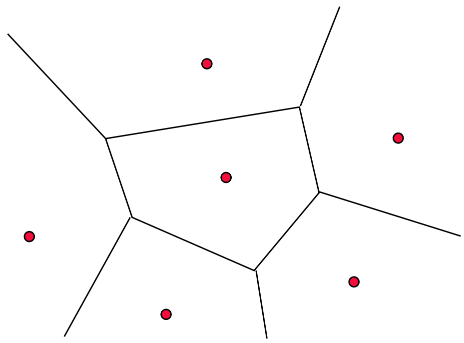
$$\begin{aligned} V(p_1) &= h(p_1, p_2) \cap h(p_1, p_3) \cap \cdots \cap h(p_1, p_n) \\ &= \bigcap \{h(p_1, p_j) \,|\, 2 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

Muut solut muodostetaan samalla tavalla, eli puolitasojen leikkauksena:

$$V(p_i) = \bigcap \{h(p_i, p_j) \,|\, 1 \leq j \leq n,\, j \neq i\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

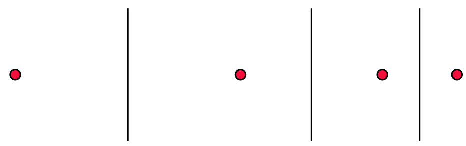
Tästä kaavasta seuraa, että solut ovat kaikki kuperia monikulmioita.

Koska puolitasojen lukumäärä on $n - 1$, niin monikulmion särmien ja kärkien lukumäärä on korkeintaan $n - 1$. Tämä maksimiarvo saavutetaan solussa, jonka asema on muiden asemien piirittämä (kuva 5).



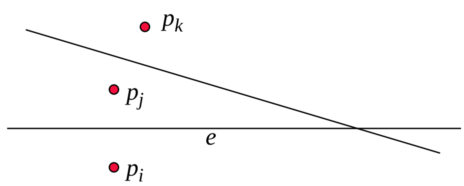
Kuva 5: Kuuden aseman solukaavio.

Jos asemat ovat suorassa rivissä, niin solukaavion särmät ovat yhdensuuntaisia suoria (kuva 6).



Kuva 6: Rivissa olevien asemien solukaavio.

Tämä on erikoistapaus. Jos asemat eivät ole rivissä, niin solukaavion särmät ovat janoja tai puolisuoria, eikä kaaviossa ole yhtäkään (täys-)suoraa. Tämä väite voidaan todistaa seuraavasti. Olkoon suora e solujen $V(p_i)$ ja $V(p_j)$ yhteinen reunaviiva. Koska suoran e pisteet ovat solun $V(p_j)$ reunalla, niin ei ole olemassa muuta asemaa, joka olisi niitä lähempänä. Oletetaan nyt, että on olemassa sellainen asema p_k, että asemat p_i, p_j, p_k eivät ole rivissä. Tällöin puolitason $h(p_k, p_j)$ reunaviiva ei ole yhdensuuntainen suoran e kanssa, joten se leikkaa e:n (kuva 7).



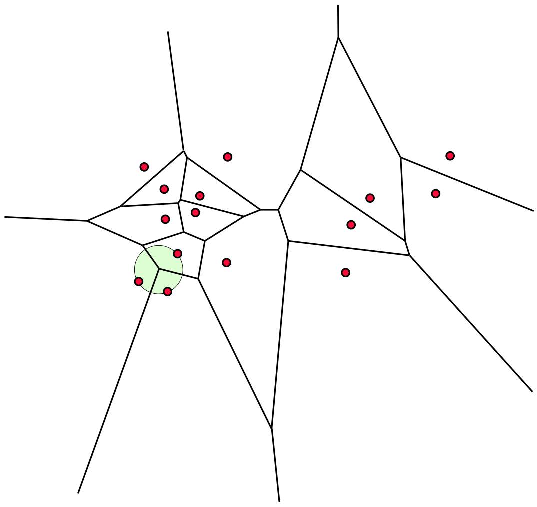
Kuva 7: Todistuksen geometria.

Ne suoran e pisteet, jotka ovat puolitason $h(p_k, p_j)$ sisällä, ovat lähempänä asemaa p_k kuin asemaa p_j. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että e on suora, ja todistus päättyy tähän.

Tason pisteille q, jotka eivät ole asemia, voidaan määritellä *suurin tyhjä ympyrä*, joka on suurin q-keskinen ympyrä, joka ei sisällä asemaa. Suurimman tyhjän ympyrän avulla voidaan luokitella tason pisteet:

ei asemassa oleva piste on ...	jos ja vain jos sen suurimman tyhjän ympyrän reunalla on ...
solun sisällä	yksi asema
särmässä	kaksi asemaa
kärjessä	kolme tai useampi asemaa (kuva 8).

Neljän tai useamman aseman läpi kulkevä ympyrä vaatii asemien erikoista asettelua. Siksi solukaavion kärjessä on melkein aina kolme särmää.



Kuva 8: Kärjen suurin tyhjä ympyrä.

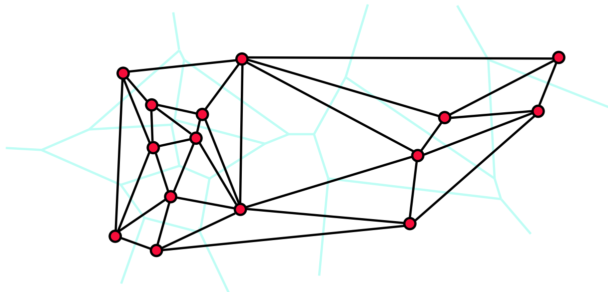
Pohdittavaa

Solu voidaan myös määritellä vastaanotettujen signaalien mukaan. Matkapuhelimen tietoliikenteen hoitaisi se tukiasema, jonka signaali on voimakkain. Jos asemilla on eri lähetysteho ja signaalin voimakkuus vähenee etäisyyden neliön mukaan, niin minkä näköisiä ovat solut?

Lisää tietoa

Solukaaviot tunnetaan yleisesti nimellä Voronoin kaavio (englanniksi *Voronoi diagram*). Soluja kutsutaan Voronoin soluiksi, Dirichlet:n monikulmioiksi, Thiessenin monikulmioiksi, Wignerin ja Seitzin alueiksi, ja moneksi muuksikin, koska idea keksittiin monta kertaa.

Läheinen käsite on Delaunayn kolmiointi, joka saadaan, kun piirretään jana niiden asemien väliin, joiden soluilla on yhteinen reuna (kuva 9).



Kuva 9: Kuvan 8 asemien Delaunayn kolmiointi.

Voronoin kaaviota ja Delaunayn kolmiointia käytetään monissa eri sovellusalueissa luonnontieteissä ja yhteiskuntatieteissä. Ohjelmistotekniikassa moni algoritmi pohjautuu Voronoin diagrammeihin.

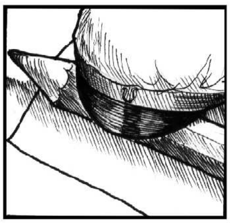
Kattava Voronoin kaavioista kertova kirja on *Spatial Tesselations* [1]. Algoritmejä Voronoin kaavion laskemiseen esitetään kaikissa laskennallisen geometrian oppikirjoissa, esimerkiksi [2]. Verkosta löytyy hienoja Voronoin kaavioita piirtäviä demoja [3].

Viitteet

[1] A. Okabe *et al.*, *Spatial Tesselations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, 2nd edition, Wiley, 2000.

[2] J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, 1994.

[3] `www.cs.cornell.edu/Info/People/chew/Delaunay.html`
`cage.rug.ac.be/~dc/alhtml/Delaunay.html`
`www.msi.umn.edu/~schaudt/voronoi/voronoi.html`
`www.voronoi.com/DelaunayApplet.html`
`www.diku.dk/hjemmesider/studerende/duff/Fortune/`



PISA-tutkimuksesta ja suomalaisten itsenäisestä ajattelusta

Marjatta Näätänen
Dosentti
Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Kuten kaikki tiedämme, suomalaiset sijoittuivat hyvin PISA-tutkimuksen lukutaidossa. Matematiikan osaamisena uutisoitu tulos oli kuitenkin suurelta osalta tekstien ymmärtämistulos. Varsinainen matematiikan testaus on vasta tulossa. Melko vähäiselle uutisoinnille jäi myös se, että Suomen ruotsinkielisten oppilaiden tulos oli huonompi kuin suomenkielisten. Koululaitoksen pitäisi olla molemmille kieliryhmille jokseenkin samanlainen, ryhmäkootkaan tuskin ovat suuremmat ruotsinkielisellä puolella. Olisiko tuloksella yhteyttä siihen, että suomenkieliset saavat paljon enemmän lukuharjoitusta TV:n lasten- ja muidenkin ohjelmien tekstityksen lukemisessa? Suomenkielellä on tehty vain vähän ohjelmia ja vieraskieliset ohjelmat tekstitetään suomeksi, ruotsinkieliset sen sijaan voivat katsoa Ruotsin ohjelmia ja kuunnella niitä äidinkielellään.

Alla on lyhennelmiä PISA-tutkimusta sivuavista tai käsittelevistä kirjoituksista. Samalla ulkomaalaiset ihmettelevät, miksi suomalaiset ovat niin auktoriteettiuskoisia ja alistuvia. Miksi heillä ei ole omia mielipiteitä – ei ainakaan sellaisia, joita he osaisivat perustella? Matemaatikolle tulee mieleen, että näihin ongelmiin voi liittyä Suomessa perin yleinen virheellinen käsitys matematiikasta ja sen opetuksen merkityksestä. Täällähän luullaan, että matematiikka on koneilla korvattavaa laskemista. Ei tunneta ja tunnusteta matematiikan tärkeää merkitystä loogisen, itsenäisen ja joustavan, erilaisia ratkaisuja etsivän ja niitä perustelemaan kykenevän ajattelun opettajana.

Leena Itkonen kirjoittaa Universitas Helsingiensis -lehden numerossa 1/2002 otsikolla

Argumentaatio vaikeaa suomalaisille?

”Mielipiteen muodostus ja kriittinen lukutaito vaatii argumentointitaidon kehittämistä. Suurin puute on se, ettei perustelua eroteta selityksestä, äidinkielen ja kirjallisuuden lehtori Väinö Kuukka pohtii. Meillä syntyy paljon erilaisia myyttejä, joihin yksinkertaisesti uskotaan, koska siltä tuntuu... Suomessa joku muu tietää asiat aina paremmin – isä, äiti, pomo ja poliitikot.”

Yliopistolla tanskaa opettava ja Suomessa jo usean vuoden asunut Karin Guldbaek-Ahvo on huomannut saman asian: – Suomalaiset ovat hierarkisia ja auktoriteettiuskoisia. Tanskassa asia on taas ihan päinvastoin. Tanskalaiset voisivat kyllä joskus uskoa jotain asiantuntijaakin. Mutta siellä ei riitä, että on professori tai pääministeri. Auktoriteetti on ansaittava.

– Tanskassa pitää aina olla kriittinen, Guldbaek-Ahvo jatkaa. – Kysymyksiä pitää asettaa koko ajan. Kirjoja luetaan pienestä pitäen analysoiden. Niitä katsotaan ikään kuin ylhäältä päin kyseenalaistaen. Suomalaisten lukutapa on erilainen. Suomalaiset lukevat saadakseen tietoa. Tanskassa pitää ymmärtää kokonaisuuksia, kun Suomessa korostuu yksityiskohtien tunteminen. Molempia taitoja tarvitaan, mutta niitä tarvitaan eri tarkoituksiin.

Pahimmillaan suomalainen lukutapa johtaa kuitenkin siihen, että luettua ei osata analysoida vaan ainoastaan referoida.

Guldbaek-Ahvolla on myös kokemuksia siitä, että suomalaisnuoret ovat välillä kovin epävarmoja mielipiteiden muodostamisessa: – Kun oppilaalta Suomessa kysyy, ”mitä sä luulet”, niin saa vastauksen ”emmä tiedä”. Kun uudestaan kysyy ”no mitä sä luulet?”, niin vastaus on edelleen ”emmä tiedä”, Guldbaek- Ahvo kertoo ja toteaa samaan hengenvetoon kaipaavansa ihanneoppilaakseen tanskalaisen ja suomalaisen yhdistelmää...

Kirjallisuuden tuntemusta oppilailta ei PISA-tutkimuksessa testattu, mutta sitäkin on Suomessa myös tässä yhteydessä pohdittu.

Opetushallituksen arviointitutkimuksen mukaan 43 prosenttia peruskoulun päättöluokan oppilaista ei lue vapaa-aikanaan yhtä ainutta kirjaa vuodessa. Lukeminen onkin vähentynyt dramaattisesti. Yksi syy siihen on se, että kirjoja ehditään nykyisessä oppiaineita vuorottelevassa jaksojärjestelmässä lukemaan hyvin vähän.

”Tämä näkyy myös yliopiston saksalaisen laitoksen lehtorin Helmut Diekmannin työssä: – Ensimmäisen lukuvuoden opiskelijoilla on nykyään katastrofaalisen huono yleissivistys. Sitä tulee kysyneeksi itseltään, mitä he ovat tähän asti lukeneet. Myös suomalaisessa kirjakulttuurissa on mielestäni todella toivomisen varaa. Kirjat ovat täällä kausitavaraa. Ne ovat esillä kirjakaupoissa ehkä vuoden, sen jälkeen ne joutuvat alennusmyyntiin ja niitä saa enää vain antikvariaateista, Diekmann ihmettelee.”

”Opetusneuvos Pirjo Sinko muistuttaa: – Lukuharrastus on kaikkein merkittävin tekijä kielen kehityksenkin kannalta. Paljon lukevat ovat yleensä hyviä kirjoittajia. Nämä taidot kulkevat käsi kädessä. Lause- ja virketajun opettamalla opettaminen on todella vaikeaa. Lukeminen vaikuttaa ajattelutaitoihin, tekstitaitoihin, rakenteiden ymmärtämiseen, Sinko listaa, mutta muistuttaa kuitenkin, että tässä mielessä kaikki lukeminen on arvokasta.”

Osavastuu lukuharrastukseen houkuttelemiseksi onkin nyt annettu tiedotusvälineille. Suomen äidinkielen opettajien liitto on haastanut tiedotusvälineet mukaan kasvatusvastuuseen. Järjestö odottaa tiedotusvälineiltä yhä monipuolisempia sisältöjä, kriittistä pohdintaa, kysymyksiä ja keskustelun avauksia toivoen, että Suomeen kasvaisi kriittisempi ja argumentoinnin hallitseva sukupolvi.

Myös PISA-tutkimuksessa tuli esille, että suomalaisnuorilla olisi parantamisen varaa mielipiteiden ja kritiikin muodostamisessa. Leena Itkonen kirjoittaa Universitas Helsingiensis -lehden numerossa 1/2002 PISA-tutkimuksesta otsikolla

Suomalaisilla lukutaidon maailmanmestaruus – Mikä siivitti voittoon?

Kirjoituksessa löydetään menestykseen monia syitä, kuten TV:n tekstitetyt lastenohjelmat – joita tutkimusten mukaan katsotaan viikottain aika monta tuntia:

– Kansankeskustelussa on veikattu tekstitettyjä televisio-ohjelmia yhdeksi syyksi lukutaidon kehittymiseen. Televisiossa on paljon ulkomaisia ohjelmia, joten lapset ja nuoret lukevat televisiota katsoessaan. Lukunopeus kehittyy ja pienemmät lapset haluavat oppia itse seuraamaan television ohjelmia.

– Suomen kielen kirjoitus- ja äänneasun täydellinen vastaavuus auttaa lukemaan oppimista.

– Tärkeä syy on myös hyvät opettajat, joilla on hyvä koulutus. Suomessa kaikilla opettajilla on nykyään yliopistollinen, maisteritason tutkinto ja koulutus on houkutellut korkeatasoisia hakijoita. Tosin tilanne voi tulevaisuudessa myös muuttua. Hyvien hakijoiden halukkuuteen hakeutua alalle vaikuttaa opettajien palkkaus ja työolot, joihin monet opettajat ovat toivoneet parannusta.

– Suomalaisessa kulttuurissa lukemista arvostetaan. Kirjastolaitos on erittäin tärkeä. Snellmanilainen kansansivistysaate on ollut vahvana 1800-luvulta alkaen. Pohjoismaissa lukutaito on perinteisesti korkea, ja muun muassa lupa avioliittoon on ollut sidoksissa lukutaitoon.

– Maahanmuuttajalasten vähyys suomalaisissa koululuokissa.

Ongelmina mainittiin kirjoituksessa:

– Kaikkialla maailmassa tytöt lukivat paremmin kuin pojat. Suomessa ero oli maailman suurin. Suomessa ei näytä olevan lukevan miehen mallia. Miehen malli on Suomessa kovempi kuin esimerkiksi Tanskassa, jossa tyttöjen ja poikien välinen lukutaidon ero oli huomattavasti pienempi.

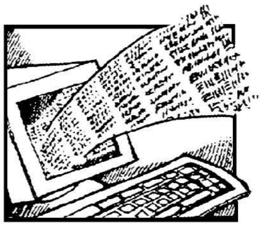
– Huippuosaajia oli Suomessa tutkimuksen mukaan selvästi vähemmän kuin hyvä kokonaistulos antaisi olettaa, niinpä lahjakkailta voisi koulussa vaatia enemmän.

Peruskoulun periaatteisiin on kuulunut vahvasti heikompien osaamisen kehittymisestä huolehtiminen. Siinä voikin olla yksi syy huippuosaajien vähäiseen määrään. Näin hyvillä tuloksilla kärjenkin pitäisi olla vahvempi, lahjakkailta voisi koulussa vaatia enemmän.

– PISA-tutkimuksen mukaan suomalaisnuorilla olisi parantamisen varaa mielipiteiden ja kritiikin muodostamisessa.

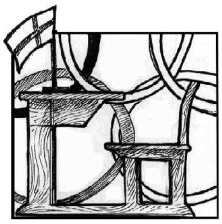
Kummallisen kuuliainen kansa

Suomessa vieraillutta ympäristöekologi Leila Shuttonia haastateltiin Yliopisto 3/2002 -lehdessä. Shutton korosti, että tekemättä jättäminen – tyytyminen – on valinta ja löysi kulttuuristamme paljon korjattavaa. Suomalaiset ovat niin kauhean auktoriteettiuskoisia, hän puisteli päätään. ”Vaikka Tasmaniassa ei tunneta suomalaista kansanluonnetta, sielläkin tiedetään, että täällä kaukana pohjoisessa ihmiset on saatu suostumaan esimerkiksi sellaisiin lääkekokeisiin, joita Amerikassa tai Australiassa ei voitaisi ikinä tehdä. – Australialaiset tietävät suomalaiset hyviksi tieteen koekaniineiksi ja kaupan päälliseksi tiedemaailmassa vielä puhutaan loistavaa englantia. Hyvä kauppa. Aina ei voi olla ylpeä juuristaan.” Vaikeneminen ja alistuminen tuntui Shuttonin puheen mukaan olevan pikemmin kansalaisyhteiskunnan kuin tiedemaailman ongelma.



Verkkosolmusta poimittua

- WWW-linkkejä lukion matematiikan opetukseen (koonnut Ossi Hyyti)
  `http://solmu.math.helsinki.fi/2003/hyyti/`
- WWW-linkkejä yläasteen matematiikan opetukseen (koonnut Riitta Snellman)
  `http://solmu.math.helsinki.fi/2001/linkit/`
- Opas matematiikan alkuopetukseen Varga-menetelmällä (ensimmäinen luokka)
  `http://solmu.math.helsinki.fi/2000/alkuopetus/amr.html`
- Opas matematiikan alkuopetukseen Varga-menetelmällä (toinen luokka)
  `http://solmu.math.helsinki.fi/2001/unkari/luokka2/`
- Prof. István Hortobágyin kurssi Unkarilaisesta matematiikan opetuksesta
  `http://solmu.math.helsinki.fi/2001/unkari/kurssit.html`



Keskustelua Suomi-Ruotsi-Unkari opettajankoulutuksen LUMA-vertailun lopuksi

Marjatta Näätänen
Dosentti
Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Suomalaisia, ruotsalaisia ja unkarilaisia yliopistotason tutkijoita ja opettajia oli kokoontunut keskustelemaan hiljattain näissä kolmessa maassa tehdyn opettajankoulutusvertailun jälkeen. Tässä on joitain keskustelusta poimimiani ajatuksia.

Ruotsalainen professori Widman toi esiin kaksi vallitsevaa paradoksia:

1) Kaikki puhuvat tietoyhteiskunnasta, mutta niiden henkilöiden, jotka tätä tietoa välittävät seuraavalle sukupolvelle, ts. opettajien arvostus ja asema yhteiskunnassa heikkenee.

2) Tiede matematisoituu kovaa vauhtia, mutta samanaikaisesti matematiikan osaamisen ja aseman tärkeyden ymmärtämisen taso yhteiskunnassa laskee.

Widman puhui myös oppimisen iloista, aikaisempien sukupolvien tekemien keksintöjen valtavan merkityksen tuomisesta esille myös opetuksessa (esim. differentiaali- ja integraalilaskenta).

Keskustelussa käsiteltiin nykyistä massakoulutusta. Ranska on maa, jossa on onnistuttu säilyttämään myös elliittiopetus, vaikka maa on tasa-arvokäsitteessä perinteisesti ollut edelläkävijä. Prof. Widman kertoi esimerkin: Emme tarvitse kymmentä insinööriä, jotka osaavat rakentaa sillan suurinpiirtein, vaan yhden, joka tietää täsmälleen, miten se tehdään jotta sillasta tulee turvallinen. Kansainvälisessä kilpailussa ei riitä, että on paljon insinöörejä, on oltava myös hyviä insinöörejä. Kaikki insinöörit eivät tarvitsisi kovin paljoa matematiikkaa, monet heistä siirtyvät muihin ammatteihin. Kenties teknisissä korkeakouluissa tulisi tehdä ryhmittelyä, jossa tämä otettaisiin huomioon.

Suomessa ja Ruotsissa yliopistojen laitosten rahallinen tulos riippuu tavalla tai toisella määrästä. Matematiikassa ei Suomessa makseta sivuaineopintoja suorittavien opintoviikoista, joten esim. Helsingin yliopistossa on ollut pakko leikata tästä opetuksesta – ironista kyllä samanaikaisesti korostetaan juhlapuheissa poikkitieteellisyyttä. Matematiikan laitoksella on liian vähän opettajia, ryhmät ovat suuret, eikä rahoitus riitä ainakaan Helsingissä edes laitoksen perusopetukseen. Rahoituskertoimet eivät ole oikein.

Median valtava merkitys käsitteenmuokkaajana tuli esille keskustelussa. Keskustelijat kaipasivat toimittajia, joilla olisi omakohtaiset opinnot tieteessä. Hyviä tiedepelejä kaivattiin verkkoon.

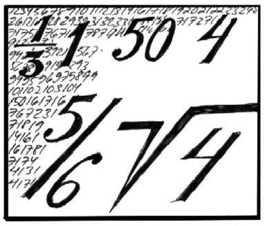
Ruotsalaiset edustajat tekivät mm. tällaisia huomioita: Unkarissa opettajilla on paljon vahvempi aineenosaamispohja kuin Ruotsissa. Varsinaisia opetustunteja on Unkarin opettajankoulutuksessa paljon enemmän kuin Ruotsissa. Ruotsissa opiskelijat haluaisivatkin enemmän opetusta. Todellinen ongelmanratkaisu eli harjaantuminen matemaattiseen ajatteluun on Unkarissa vahvalla sijalla. Peruskoulun opettajankoulutuksen päävastuu on Ruotsissa didaktikoilla, Unkarissa matemaatikoilla. Kemian edustaja kertoi, että kemian opetukseen tulee ongelmia Suomessa puutteellisesta matematiikan osaamisesta. Yleinen ilmiö on, että kouluja varten koulutetut opettajat menevät muille, houkuttelevammille aloille kuin kouluihin; Suomessa tämä pätee erityisesti miehiin.

Suomalainen didaktikko kertoi tutkimuksesta, jonka mukaan ryhmäjako tasoerojen mukaan ei ole tarpeellinen. Hyvät oppivat joka tapauksessa ja sekaryhmä on hyväksi keskinkertaisille ja heikoille. Tähän prof. Wallin vastasi: ”En usko, mitä sanot.” Hän kertoi Uumajan ryhmittelykokeilusta, jossa heikommille on suositeltu hitaammin etenevää ryhmää. Tulokset ovat hyviä.

Koulukirjojen muuttuminen kuvaileviksi oli keskustelijoiden mielestä erittäin huono asia. Oppikirjoista tulisikin käydä rakentavaa kriittistä keskustelua. Mitä koulukirjat oikeastaan kertovat matematiikasta?

Yliopisto-opettajien didaktisten kykyjen merkityksestä oltiin yksimielisiä. Didaktisten opintojen tulisi olla vapaaehtoisia ja niitä tulisi tarjota oikeassa älyllisessä ympäristössä ja hengessä ainelaitoksilla.

Ruotsalainen prof. Wallin kertoi hotelliketju Hiltonin luojasta. Hiltonin koulunkäynti takkusi aluksi, mutta parikymppisenä hän alkoi opiskella algebraa, geometriaa, differentiaali- ja integraalilaskentaa. Tällä oli merkittävä vaikutus hänen älylliseen kehitykseensä: ”En väitä, että differentiaali- ja integraalilaskenta, algebra ja geometria olisivat välttämättömiä hotellialalla. Ne eivät kuitenkaan ole hyödyttömiä koristuksia ihmisten koulutuksessa.” Hilton jatkoi muistelmiaan kertomalla, että korkeamman matematiikan opinnot olivat olleet parasta mahdollista harjoitusta hänen uralleen. Hilton loi hotelliketjun, lama-aikana ketjulla oli vaikeuksia, mutta hän rakensi hotelliketjunsa uudelleen laman jälkeen. Tällaisia esimerkkejä tulisi saada julkisuuteen. Matematiikan historiaa voisi tuoda esille, matemaattiset mallit esim. biologiassa olisivat kiinnostavia. Koneellisia kokeiluja luonnon prosesseista voisi esittää. Jos mallin toiminnassa on ongelmia, on matematiikka tarpeen.

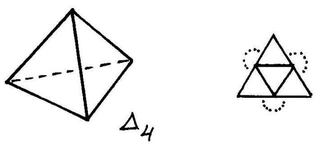


Deltaedrit

Virpi Kauko
Tutkija
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Solmussa 3/2002 ilmestyneessä artikkelissa *Monitahokkaiden topologiaa* määriteltiin *deltaedri* monitahokkaaksi, jonka kaikki tahkot ovat tasasivuisia kolmioita. Tehtäväksi annettiin selvittää montako sellaista on olemassa. Lisäksi kysyttiin, montako *kuperaa* deltaedriä on.

Vastaus on, että deltaedrejä on äärettömän monta; kuperia deltaedrejä sen sijaan on vain kahdeksan.



Yksinkertaisin deltaedri on säännöllinen *tetraedri*, joka koostuu neljästä kolmiosta. Liittämällä kaksi tetraedriä tahkoistaan yhteen saadaan *kolmikulmainen kaksoispyramidi*, joka koostuu kuudesta kolmiosta. Tetraedrejä voidaan liittää tällä tavoin yhteen miten pitkäksi ketjuksi tahansa, joten deltaedrejä on äärettömän monta. Ketjut voivat myös haarautua tai muodostaa silmukoita...

Monitahokkaan kuperuus tarkoitti, ettei mikään kahta kärkeä yhdistävä jana jää kappaleen ulkopuolelle. Kuperan vastakohta on kovera. Kuperuuden asettaminen lisävaatimukseksi rajoittaa mahdollisten tahokkaiden määrää. Esimerkiksi kolmen tetraedrin muodostama deltaedri nimittäin onkin kovera. Tämä perustellaan kohta.

19 ehdokasta

Deltaedrejä voi keksiä lisää käyttäen mielikuvitusta sekä tarvittaessa sen tukena esimerkiksi paperia ja liimaa, tai lankaa ja mehupillejä... Mutta jos halutaan osoittaa, ettei muita mahdollisuuksia ole kuin jo keksityt, on käytettävä teoreettisia apuneuvoja. *Monitahokkaiden topologiaa* -artikkelissa todistettiin kaksi käyttökelpoista tulosta:

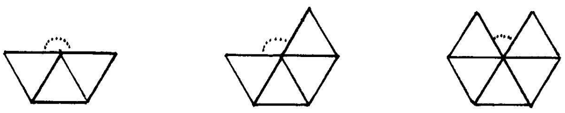
- Eulerin monitahokaslause: $K - S + T = 2$
- Kulmavajelause: $\sum_{k=1}^{K} \mathrm{vaje}(k) = 720°$

(missä K, S, T ovat monitahokkaan kärkien, särmien ja tahkojen lukumäärät ja vaje(k) täyskulman ja kärjessä k kohtaavien tahkojen kulmasumman erotus).

Deltaedrissä jokaisella tahkolla on tasan kolme särmää. Toisaalta missä tahansa monitahokkaassa kukin särmä on aina yhteinen kahdelle tahkolle. Siksi pätee $3T = 2S$, joka Eulerin lauseeseen sijoitettuna antaa

$2K - T = 4$ eli $T = 2(K-2)$. Näin ollen kärkien lukumäärä määrää myös särmien ja tahkojen lukumäärän.

Tasasivuisen kolmion jokainen kulma on $60°$, joten jos kärkipisteessä k kohtaa p kolmiota, niin sen kulmavaje on $\text{vaje}(k) = (360 - p \cdot 60)°$. Koska deltaedrin piti olla kupera, on kulmavajeen oltava positiivinen (Mieti, miksi näin on!). Niinpä p voi olla vain $3, 4$ tai 5 ja kulmavaje siis vastaavasti $180°, 120°$ tai $60°$.



Merkitään symbolilla K_p deltaedrin niiden kärkien lukumäärää, joissa kohtaa p kolmiota. Silloin kaikkien kärkien lukumäärä on $K = K_3 + K_4 + K_5$, ja kulmavajelauseen mukaan pätee

$$K_3 \cdot 180° + K_4 \cdot 120° + K_5 \cdot 60° = 720°, \text{ eli}$$
$$3K_3 + 2K_4 + K_5 = 12.$$

Nyt olemme johtaneet joukon yhtälöitä, jotka monitahokkaan kärkien, särmien ja tahkojen lukumäärien on toteutettava jotta kyseessä olisi kupera deltaedri:

(2) $3K_3 + 2K_4 + K_5 = 12$

(3) $K_3 + K_4 + K_5 = K$

(4) $S = 3(K-2)$

(5) $T = 2(K-2)$

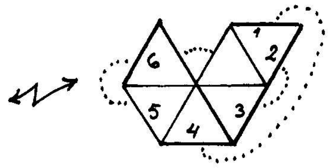
Koska K_p:t ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, yhtälöllä (1) on vain äärellinen määrä ratkaisuja. Luku K_3 voi olla korkeintaan 4, jolloin $K_4 = K_5 = 0$. Vastaavasti $K_4 \leq 6$ ja $K_5 \leq 12$. Ratkaisuja (eli kolmikkoja K_3, K_4, K_5) on yhteensä 19, joka on myös yläraja erilaisten kuperien deltaedrien lukumäärälle. Seuraava taulukko esittää kaikki yhdeksäntoista ehdokasta:

K_3	K_4	K_5	K	S	T
4	0	0	4	6	4
3	1	1	5	9	6
3	0	3	6	12	8
2	3	0	5	9	6
2	2	2	6	12	8
2	1	4	7	15	10
2	0	6	8	18	12
1	4	1	6	12	8
1	3	3	7	15	10
1	2	5	8	18	12
1	1	7	9	21	14
1	0	9	10	24	16
0	6	0	6	12	8
0	5	2	7	15	10
0	4	4	8	18	12
0	3	6	9	21	14
0	2	8	10	24	16
0	1	10	11	27	18
0	0	12	12	30	20

On kuitenkin huomattava, että yhtälöt (1)...(4), joiden mukaan taulukko on laadittu, ovat vain *välttämättömiä* ehtoja sille että tahokas on kupera deltaedri, eivät *riittäviä*. Kaikki kuperat deltaedrit siis esiintyvät taulukossa, mutta kaikki taulukon esittämät lukukolmikot eivät tuotakaan kuperaa deltaedriä.

Ei monitahokas

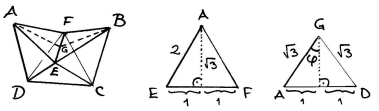
Tarkastellaan taulukossa toisena olevaa lukukolmikkoa $(3, 1, 1)$. Koska yhden kärjen ympärillä pitäisi olla viisi tahkoa ($K_5 = 1$), voi rakentamisen aloittaa viidellä kolmiolla. Kolmioita on toisaalta yhteensä vain kuusi, joten tahokas olisi rakennettava kuvan mukaisesta yhdistelmästä liittämällä numeroidut vapaat särmät pareittain yhteen. Tällöin särmä 2 on liitettävä 3:een, mikä pakottaa 1:n ja 4:n yhteen. Jäljelle jää 5 ja 6, mutta niiden yhteenliittäminen tuottaisi kärjen, jossa kohtaa vain kaksi kolmiota. Tämä on mahdotonta, joten tästä ei synny monitahokasta lainkaan.



Deltaedri vaan ei kupera

Alussa mainittu kolmiopohjainen kaksoispyramidi $(2, 2, 2)$ löytyy taulukon viidenneltä riviltä. Merkitään kolmen tahkon kärkipisteitä A, B, neljän tahkon kärkiä C, D ja viiden tahkon kärkiä E, F. Kappale on symmetrinen kärkien A, B, C, D kautta kulkevan tason suhteen; samassa tasossa on myös janan EF keskipiste G.

Jotta jana AB ei joutuisi kappaleen ulkopuolelle, pitäisi kulman $\sphericalangle AGB$ olla kupera eli alle 180° kappaleen puolella (siis pisteiden C, D kautta mitattuna).

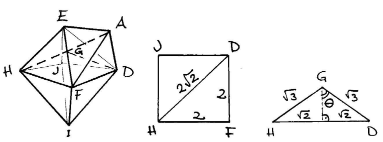


Yhden tetraedrin tahkojen välinen kulma $\sphericalangle AGD =: 2\varphi$ saadaan Pythagoraan lauseen ja trigonometrian avulla kolmioista AFE ja AGD. Koska kolmiot ovat tasasivuisia, kaikki särmät AF, AE jne. ovat yhtä pitkiä; olkoon pituus 2. Tällöin janan AG pituus on $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Nyt kulman $\sphericalangle AGD$ puolikkaan sini ja kosini ovat

$$\sin\varphi = \sqrt{1/3}, \cos\varphi = \sqrt{2/3},$$

mistä saadaan likiarvoksi $2\varphi \approx 70.53°$. Kaikilla kolmella tetraedrillä on yhteinen särmä EF, jossa särmäkulmien summa on $\sphericalangle AGB = 6\varphi \approx 211.6° > 180°$. Koska se siis on yli oikokulman, niin jana AB jää kappaleen ulkopuolelle eli kappale on kovera.

Kupera vaan ei deltaedri



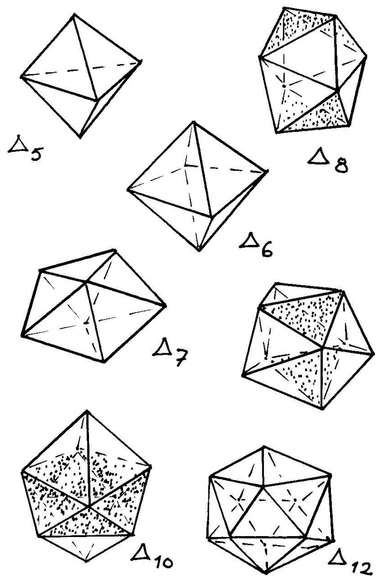
Taulukon keskivaiheilla oleva kolmikko $(1, 3, 3)$ tuottaa seitsenkärkisen monitahokkaan, joka saadaan yhdistämällä tetraedri $(4, 0, 0)$ ja *oktaedri* $(0, 6, 0)$. Kuperuuden testaamiseksi pitää taas laskea yhteisen särmän EF ympäriltä särmäkulmien summa. Tetraedrille $AEFD$ se on äsken laskettu $\sphericalangle AGD = 2\varphi$, oktaedrille saadaan vastaavasti $\sphericalangle DGH = 2\theta$ ja

$$\sin\theta = \sqrt{2/3}, \cos\theta = \sqrt{1/3}.$$

Likiarvoksi tulee $2\theta \approx 109.47°$, joten summa $\sphericalangle AGH = 2(\varphi + \theta)$ on lähellä oikokulmaa. Käyttämällä sinin summakaavaa saadaan lasketuksi summakulman sinin tarkka arvo:

$$\sin(\varphi + \theta) = 1/\sqrt{3} \cdot 1/\sqrt{3} + \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{2/3} = 1.$$

Siispä $\varphi + \theta$ on *täsmälleen* suora kulma ja $\sphericalangle AGH$ oikokulma. Tämä merkitsee, että jana AH on samassa tasossa kuin EF. Se siis ei joudu kappaleen ulkopuolelle (kuten eivät muutkaan kärkiä yhdistävät janat), joten kappale on kupera. Mutta koska kaksi vierekkäistä tahkoa (AEF ja EFH) ovat samassa tasossa, ne ovatkin yksi ja sama tahko $AEHF$, ja se on nelikulmio eikä kolmio. Siksi tämä kappale ei ole deltaedri.



Kuperat deltaedrit

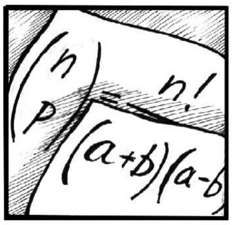
Lukijalle jätetään tehtäväksi käydä läpi taulukon ehdokkaat ja tutkia, mitkä niistä eivät kelpaa ja miksi. Karsinnasta selviytyy kahdeksan kuperaa deltaedriä Δ_K. Löydätkö ne taulukosta?

Δ_4	Tetraedri
Δ_5	Kolmikulmainen kaksoispyramidi
Δ_6	Oktaedri (nelikulmainen kaksoispyramidi)
Δ_7	Viisikulmainen kaksoispyramidi
Δ_8	Vino kaksoiskiila l. siamilainen dodekaedri
Δ_9	Kolmesti pyramidikohotettu kolmioprisma
Δ_{10}	Kahdesti pyramidikohotettu nelikulmainen vinoprisma eli kiertovenytetty nelikulmainen kaksoispyramidi
Δ_{12}	Ikosaedri

Linkkejä

Lisää luettavaa englanniksi löytyy mm. alla olevalta hakuteoksen tapaan järjestetyltä internet-sivustolta (valitse D). Siellä mm. lasketaan deltaedrien kärkipisteiden koordinaatteja ja esitellään muutamia koveria deltaedrejä.

`http://hades.ph.tn.tudelft.nl/Internal/PHServices/Documentation/MathWorld/math/math.htm`



Sattuman matematiikkaa II – todennäköisyyslaskennan aksioomat

Terhi Kaarakka
Assistentti
Matematiikan laitos, Joensuun yliopisto

Solmu-lehden numerossa 2/2002 olleessa todennäköisyyslaskentaa käsittelevässä jutussa tarkasteltiin klassista ja geometrista todennäköisyyttä. Nyt mietitään sitä, miksi tarvitaan matemaattisesti täsmällisempi järjestelmä ja minkälainen sen pitäisi olla. Teksti pohjautuu pääosin teoksiin Todennäköisyyslaskenta osa 1 (Tuominen ja Norlamo)[2], Todennäköisyyslaskennan alkeita (Juve) [1] ja Todennäköisyyslaskenta (Tuominen)[3].

A. N. Kolmogorov

Frekvenssitulkinta

Koska klassinen todennäköisyys soveltuu vain pieneen ilmiöjoukkoon, niin käyttöön otettiin frekvenssitulkinta. Tarkastellaan satunnaisilmiöitä, joita on mahdollista toistaa rajattoman monta kertaa olosuhteiden pysyessä samanlaisina. Tällainen tulkinta soveltuu hyvin useisiin fysiikan ilmiöihin, joissa tarkastellaan suurta määrää olioita tai esimerkiksi uhkapeleihin, jotka ovat toistettavissa.

Määritellään suhteellinen frekvenssi olemaan tapahtuman esiintymiskertojen lukumäärän suhde toistojen lukumäärään, eli jos A on tapahtuma ja $F_n(A)$ tapahtuman A esiintymiskertojen lukumäärä n toistossa, niin suhteellinen frekvenssi on

$$f_n(A) = \frac{F_n(A)}{n}.$$

Todennäköisyyteen saadaan suhteellinen frekvenssi liitettyä seuraavasti

$$\mathbf{P}(A) = {}'' \lim_{n\to\infty} {}'' f_n(A).$$

Tämä on toistokokeissa aivan riittävä tapa ja näin saamme intuitiivisen todennäköisyyden. Kyseinen raja-arvo ei kuitenkaan täytä matemaattisen analyysin raja-arvon määritelmää, koska ei tiedetä onko se olemassa vai ei, joten se ei silloin matemaattisesti voi olla todennäköisyyden määritelmä.

Jossain tilanteessa pelkkä frekvenssitulkinta on intuitiivisestikin riittämätön. Mietitään tilannetta, jossa tietystä sairaudesta paranee todennäköisyydellä 0,99. Tämä tarkoittaa sitä, että kun tarkastellaan suurta (ideaalitilanteessa jopa rajatonta) määrää sairastuneita, niin parantumatta jää 1% sairastuneista. Käytännössä sairastuneelle ainoa merkittävä kerta on juuri oma sairastuminen, paraneeko hän vai ei. Tähän ei frekvenssitulkinta anna mitään vastausta.

Aksioomajärjestelmän tarpeellisuus ja vaatimukset

Klassisen todennäköisyyden vaatima symmetrisyys, geometrisen ja klassisen todennäköisyyden soveltuminen vain pieneen ilmiöjoukkoon ja frekvenssitulkinnan tarkan todennäköisyyden määrittelyn mahdottomuus johtivat keskusteluihin ja todennäköisyyslaskennan kehittymiseen.

Aksiomatisoinnissa halutaan pitää mielessä seuraavat tavoitteet

- Matemaattinen teoria käsittelee käsitteiden välisiä suhteita. Perusolettamusten eli aksioomien ja joidenkin erityisolettamusten pohjalta päätellään deduktiivisesti näitä suhteita. Matematiikkaan ei suoranaisesti liity se, kuinka hyvin nämä teoriat sopivat empiirisiin ilmiöihin.
- Mallin täytyy olla niin yleinen, että sen avulla voidaan kattaa mahdollisimman paljon erilaisia ilmiöitä. Eli näissä aksioomissa saa olla vain sellaisia piirteitä, jotka ovat ilmiöille yhteisiä, ei mitään yhteen tilanteeseen liittyviä erityispiirteitä.
- Malli ei saa rakentua empiiristen tulosten varaan. Empiiriset tulokset auttavat mallin luomisessa ja suunnittelussa, mutta mallin täytyy olla abstrakti.

Toisin sanoen perustan täytyy sisältää vain mahdollisimman yksinkertaisia faktoja, joiden pohjalta lähdetään loogisesti päättelemään ja rakentamaan teoriaa. Perusolioille annetaan nimet, mutta muuten ne jätetään määrittelemättä, sillä muutoin jouduttaisiin ikuiseen kierteeseen: perusoliot pitäisi kuvailla ja kuvailuun tarvittaisiin olioita jne.

Matemaattisissa aksiomatisoinneissa peruskäsitteet otetaan usein käyttöön määrittelemättä. Geometriassa ei määritellä pistettä tai joukko-opissa joukkoa. Vastaavalla tavalla aksiomaattinen todennäköisyyslaskenta jättää määrittelemättä käsitteen *todennäköisyys*. Aksiomaattista todennäköisyyslaskentaa suunnitellessa oletetaan joukko-opin ja reaalilukujen ominaisuuksineen olevan käytettävissä, koska on lähes välttämätöntä käyttää niiden kieltä ja käsitteistöä hyväksi.

Aksioomat antavat tarkoituksella paljon vapauksia, koska niiden avulla halutaan mallintaa mahdollisimman monia ilmiöitä. Aksioomia voitaisiin ajatella esimerkiksi pelisääntöinä, joiden avulla matemaattisia pelejä pelataan, mutta pelejä on useita eikä haluta rajoittua ainoastaan yhteen peliin.

Teoriaa, aksioomien valinnan jälkeen, muodostetaan ja kasvatetaan loogisin päättelysäännöin. Esimerkiksi: Jos joukon kaikilla alkioilla on ominaisuus A, niin millä tahansa joukon alkiolla on ominaisuus A. Esim. "nisäkäs on eläin, koira on nisäkäs, siis koira on eläin". Eteenpäin mentäessä valitaan uusia oletuksia, suhteita ja selityksiä, ja näiden perusteella johdetaan taas uusia ominaisuuksia.

Aksiomatisoinnin taustalla on kauniin ja voimakkaan matemaattisen teorian luominen. Ihan puhtaalta pöydältä ei tietenkään aksiomatisointia kannata aloittaa, vaan on hyvä, että todennäköisyyksiä ja satunnaisilmiöitä on tutkittu jo aiemminkin sillä teorian luominen vaatii matemaattisen alueen tuntemusta, jolloin saadaan valittua mahdollisimman sopivat aksioomat.

Viime vuosisadan alussa mittateoria [säännöstö joukkojen mittaamiselle] oli kirjoitettu jo muotoon, jota pidetään matemaattisesti kauniina ja arvokkaana sekä sovelluskelpoisena. Tässä kirjoitelmassa joudutaan valitettavasti ohittamaan tämä teoria ja keskittymään vain siihen nojaavaan todennäköisyyslaskentaan. Mittateorian perusteella venäläinen Kolmogorov teki todennäköisyyslaskennan aksiomatisoinnin vuonna 1933. Kolmogorovia kutsutaankin usein, ja aivan oikeutetusti, todennäköisyyslaskennan isäksi.

Aksiomatisoinnin jälkeen rakennettiin todennäköisyyslaskennan teoriaa puhtaasti loogisen tiedon nojalla, ei kokemuksien tai intuition mukaan. Todennäköisyyslaskennan tarkoitus on kuitenkin mallintaa reaalimaailman ilmiöitä, niin kokonaan ei voida tai saadakaan unohtaa kokemuksia ja empiirisiä kokeita.

Todennäköisyyslaskennan aksioomat

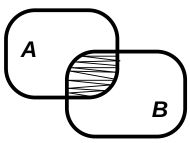
Määrittelemme seuraavana todennäköisyysavaruuden eli matemaattisen mallin, johon pohjautuen voimme käsitellä erilaisia *satunnaiskokeita*. Satunnaiskokeet ovat kokeita, joiden tulos on varmasti tiedossa vasta kokeen tekemisen jälkeen.

Tarkastellessamme satunnaiskoetta täytyy ensimmäisenä päättää, mitkä ovat kokeen tulosmahdollisuudet eli alkeistapaukset. Kaikki alkeistapaukset yhdessä muodostavat *perusjoukon* Ω.

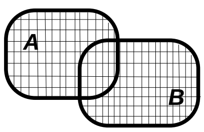
Otetaan esimerkkinä kahden nopan heitto. Alkeistapauksiksi on järkevää valita kaikki järjestetyt parit (i, j), missä sekä i että j saavat arvot yhdestä kuuteen eli $(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,5),(6,6)$. Yhteensä näitä alkeistapauksia on 36 ja ne muodostavat perusjoukon.

Toiseksi tarvitsemme kokoelman tapahtumia eli perusjoukon Ω osajoukkojen muodostaman kokoelman, jota merkitään kirjaimella $\mathcal{F}$. Näitä joukkoja, jotka muodostavat kokoelman $\mathcal{F}$, kutsutaan tapahtumiksi. Tapahtuman A sattumisella tarkoitetaan, että kokeen tulos ω kuuluu tähän valittuun joukkoon A eli $\omega \in A$. Erilaisia tapahtumia voidaan kuvata joukkojen joukko-operaatioina. Oheisessa kuvassa on esitetty joukkojen A ja B leikkaus $A \cap B$, yhdiste $A \cup B$ ja joukkoerotus $A \backslash B$.

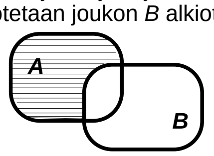
Joukkojen *A* ja *B* leikkaus on viivoitettu alue



Joukkojen *A* ja *B* yhdiste on ruudutettu alue



Joukkojen *A* ja *B* joukkoerotus, eli joukko *A*, josta erotetaan joukon *B* alkiot on viivotettu alue



Satunnaiskokeiden peruskäsitteitä voidaan kuvata matemaattisesti joukko-operaatioiden avulla artikkelin lopussa olevan taulukon mukaan.

Kun tarkastelemme joukkoa, jonka kaikki alkiot pystymme luettelemaan, kannattaa tapahtumien joukkona käyttää kaikkia niitä joukkoja, joita alkeistapauksista voidaan muodostaa yhdistelemällä. Usein tämä ei ole mahdollista: jos vaikka tarkastelemme hehkulapun elinikää, niin emme pysty numeroimaan kaikkia mahdollisia aikoja, jonka lamppu voi kestää. Tämän ongelman välttämiseksi määritellään käsite σ-algebra, jossa voimme käyttää tapahtumiin joukko-operaatioita. Tässä sivutaan nyt mittateoriaa, joka jätetään käsittelemättä, mutta yliopistossa pääsette tutustumaan siihenkin.

Perusajatuksena on, että tapahtumia halutaan olevan numeroituvat alkeistapauksien muodostamien joukkojen yhdisteet ja leikkaukset, näiden äärelliset yhdisteet ja leikkaukset sekä myös näiden kaikkien joukkojen erotukset. Seuraavana määritellään, milloin joukkojen kokoelma $\mathcal{F}$ on σ-algebra. Hakasuluissa on selitystä matemaattisessa muodossa oleville ehdoille.

Määritelmä. Kokoelma $\mathcal{F}$ perusjoukon Ω osajoukkoja on σ-algebra, jos

(σA_1) $\Omega \in \mathcal{F}$. [Koko perusjoukko Ω on mahdollinen tapahtuma.]

(σA_2) Jos $A \in \mathcal{F}$, niin $A^C \in \mathcal{F}$. [Jos A on mahdollinen tapahtuma, niin myös joukon A komplementti A^C eli tilanne, että A ei satu, on myös mahdollinen tapahtuma.]

(σA_3) Jos $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \cdots)$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. [Jos ääretön määrä joukkoja A_i ovat tapahtumia, niin myös $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ eli se, että jokin A_i tapahtuu, on tapahtuma.]

Seuraavana tarkastelemme todennäköisyyttä: Tapahtuman eli kokoelman $\mathcal{F}$ alkion A todennäköisyys $\mathbf{P}(A)$ on reaaliluku, jonka täytyy olla yksikäsitteisesti määrätty, kun tapahtuma $A \in \mathcal{F}$ on annettu. Toisin sanoen $\mathbf{P}$ on funktio $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ eli $\mathbf{P}$ on funktio kokoelmalta $\mathcal{F}$ reaalilukujen joukkoon. Tarvitsemme nyt kunnollisen määritelmän tälle kuvaukselle (=funktiolle) $\mathbf{P}$.

Määritelmä. Kuvaus $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on todennäköisyys, jos

(TN_1) $\mathbf{P}(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$. [Kaikkien tapahtumien todennäköisyydet ovat positiivisia tai nollia.]

(TN_2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. [Varman tapahtuman todennäköisyys on yksi.]

(TN_3) (täysadditiivisuus) Jos $A_i \in \mathcal{F}(i = 1, 2, \cdots)$ ja $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$, niin

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

[Jos ääretön määrä tapahtumia A_i on keskenään erillisiä, niin todennäköisyys, että joku tapahtumista A_i sattuu on sama kuin näiden kaikkien tapahtumien todennäköisyyksien summa.]

Nämä kolme ehtoa ovat ns. *Kolmogorovin aksioomat*. Viimeisestä aksioomasta eli täydellisestä additiivisuudesta seuraa, että sama on voimassa myös pienemmälle määrälle tapahtumia, eli

- Jos $A_i \in \mathcal{F}(i = 1, 2, \cdots, n)$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$, niin

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

[Jos n kappaletta tapahtumia A_i on keskenään erillisiä, niin todennäköisyys, että joku tapahtumista A_i sattuu on sama kuin näiden kaikkien tapahtumien todennäköisyyksien summa.]

Nyt olemme saaneet määriteltyä perusjoukon Ω, σ-algebran $\mathcal{F}$ ja todennäköisyyden $\mathbf{P}$. Kolmikko, johon nämä kaikki kolme kuuluvat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on todennäköisyysavaruus.

Tarkastellaan asiaa pienen esimerkin avulla. Tarkastelemme tilannetta, jossa olemme kiinnostuneita, saammeko voiton arpajaisissa. Tapahtuma A on voiton saaminen ja sen komplementtitapahtuma, eli tapahtuma, ettemme saa voittoa, on A^C. Olkoon perusjoukko Ω, tällöin $A \neq \Omega$ ja $A \neq \emptyset$. σ-algebra eli tapahtumien kokooma on $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$. Voit tarkastaa, että $\mathcal{F}$ toteuttaa σ-algebran ominaisuudet. Jos lisäksi p on reaaliluku $0 \leq p \leq 1$ ja $\mathbf{P}$ määritellään seuraavasti

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\emptyset) &= 0 \\ \mathbf{P}(A) &= p \\ \mathbf{P}(A^C) &= 1 - p \\ \mathbf{P}(\Omega) &= 1, \end{aligned}$$

niin voidaan myös todeta funktion $\mathbf{P}$ toteuttavan todennäköisyysfunktion ominaisuudet.

Nyt olemme käyneet läpi todennäköisyyslaskennan aksioomat ja tästä jatketaan eteenpäin seuraavissa numeroissa.

Viitteet

[1] Juve, Y. *Todennäköisyyslaskennan alkeet*. Suomalaisen kirjallisuuden kirjapaino, Helsinki. 1965.

[2] Norlamo, P.,Tuominen, P. *Todennäköisyyslaskenta, Osa I*. Limes ry, Helsinki. 1974.

[3] Tuominen, P. *Todennäköisyyslaskenta I*. Limes ry, Helsinki. 1990.

Satunnaiskokeen käsitteitä	**Merkintä**	**Todennäköisyysmalli**
alkeistapausten joukko	Ω	perusjoukko
alkeistapauksia	$\omega_1, \omega_2, ...$	perusjoukon alkioita
tapahtumia	$A, B, C, ...$	joukkoja joiden tn määriteltävissä
kaikkien tapahtumien joukko	$\mathcal{F}$	σ-algebra
varma tapahtuma	Ω	perusjoukko
mahdoton tapahtuma	$\emptyset$	tyhjä joukko
A tai B sattuu	$A \cup B$	yhdiste
A ja B sattuu	$A \cap B$	leikkaus
A ja B toisensa poissulkevia	$A \cap B = \emptyset$	tapahtumat A ja B ovat erillisiä
A ei satu	A^c	joukon A komplementti eli $\Omega \setminus A$
A sattuu mutta B ei satu	$A \setminus B$	joukkoerotus eli $(A \cap B^c)$
jos A sattuu, niin B sattuu	$A \subset B$	A on joukon B osajoukko
ainakin yksi A_i sattuu, $i \in \mathbb{N}$	$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$	numeroituva yhdiste
kaikki tapahtumat A_i sattuvat	$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$	numeroituva leikkaus

Kirja-arvio

John L. Casti ja Werner DePauli: Kurt Gödel – Elämä ja matematiikka

Suomentanut Risto Vilkko, Art House 2001. 234 sivua, 32,90 euroa.

Kurt Gödel on matematiikan kulttihahmoja. Kaikki alkoi oikeastaan Eukleideesta, 2300 vuotta sitten. Eukleides rakensi geometriasta loogisen järjestelmän, jossa tieto perustui käsitteiden määritelmiin, niistä tehtyihin muutamiin perusoletuksiin, aksioomiin, ja näihin pohjautuviin todistusketjuihin. 1800-luvulla oltiin niin pitkällä, että havaittiin Newtonin ja Leibnizin 1600-luvulla alkuun panema ja luonnonilmiöiden mallinnuksessa, selittämisessä ja ennustamisessa kauniita voittoja niittäneen matemaattisen analyysinkin tarvitsevan pitävän loogisen rakenteen. Sen pohjana piti olla kunnollinen käsitys lukujen olemuksesta. Reaaliluvut saatiinkin rakennetuiksi primitiivisemmistä rationaaliluvuista, jotka lepäsivät luonnollisten lukujen perustalla. Mutta mitä oikeastaan olivat luonnolliset luvut? Saksalainen Gottlob Frege rakensi 1800-luvun lopussa luonnolliset luvut luonnollisella tavalla "yhtämonisuuden" käsitteestä, joukoista, joiden kokoa voitiin verrata "alkio alkiolta".

Mutta paratiisissa oli käärme. Nuori Bertrand Russell huomasi vuonna 1902, että joukko on epäselvä käsite. Sisältääkö niiden joukkojen joukko, jotka eivät sisällä itseään alkiona, itsensä? Erilaisia yrityksiä pelastaa joukot, luonnolliset luvut ja matematiikka syntyi. Russell ja A.N. Whitehead kehittivät hyvät ja huonot joukot erottavan tyyppiteorian ja rakensivat suuressa ja esittivät ehdotuksensa matematiikan – olennaisesti luonnollisten lukujen joukon perustuksesta – sangen vaikealukuisessa teoksessaan Principia Mathematica. 1900-luvun alun matematiikan voimahahmo, David Hilbert, ryhtyi kehittämään ohjelmaa, jonka tarkoitus oli rakentaa matematiikka muusta todellisuudesta irrallisena formaalina järjestelmänä. Se olisi kelvollinen, kunhan se olisi ristiriidaton. Ja kaikki matemaattiset totuudet tulisivat tässä järjestelmässä ennen pitkää todistetuiksi.

Tässä astuu kuvaan böömINsaksalainen, Brnossa 1906 syntynyt mutta Wienissä vaikuttanut Kurt Gödel. Vuonna 1931 ilmestyi hänen artikkelinsa Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und vervandter Systeme I. Siinä hän todisti, että matemaattinen teoria, esimerkiksi luonnollisiin lukuihin perustuva lukuteoria, sisältää välttämättä sellaisia totuuksia, joita on mahdoton tämän järjestelmän omissa puitteissa pysytellen todistaa. Hiukan myöhemmin Gödel osoitti, että erityisesti yksi tällainen asia on järjestelmän ristiriidattomuus. Gödelin metodi oli numeroida käsitteet ja teoreemat ja todistukset. Näin hän ilmaisi luvuilla lukuja koskevia totuuksia ja johtui hengeltään hiukan samanlaisiin paradokseihin kuin Russell, joka käsitteli joukkoja, joiden alkiot ovat joukkoja.

Gödelin tulos ei ole käytännössä matematiikkaa tuhonnut. Matemaatikot todistavat teoreemoja eri keinoin. Monet luonnollisia lukuja koskevat tiedot ovat kautta aikojen perustuneet varsinaisen lukuteorian ulkopuolelta saatuihin menetelmiin. Mutta Gödelin tulokset ovat filosofisesti tärkeitä. Ne avartavat suuresti näkemystämme siitä, mitä matematiikka on ja mitä se ei ole.

Suomennetun Gödel-kirjan alkuperäinen nimi on suomennokseen hiukan muuttunut. Alkuteos on nimittäin *Kurt Gödel. A life of logic*. Kirjan tekijäkaksikko työskentelee Wienissä, vaikka Casti onkin amerikkalainen.

Kirja on lukijalle pieni pettymys. Gödelin elämä tulee aika pintapuolisesti esitellyksi. Gödel oli melko eksentrinen henkilö. Hän kärsi mielenterveysongelmista ja luulosairaudesta. Gödel ei ollut juutalainen, mutta hän pakeni Itävallasta vuonna 1940 Saksan, Latvian ja Venäjän kautta Yhdysvaltoihin. Junamatka talvisen Siperian halki on varmaan ollut melkoinen suoritus ulkomaailmasta yleensä melko vähän piitanneelle tiedemiehelle. (Gödelin vastaus, kun häneltä tiedusteltiin oloista Wienissä toisen maailmansodan alkuvaiheiden aikaan, on klassikko: ”Kahvi oli aika kurjaa”.) Loppuelämänsä Gödel vietti Institute for Advanced Studyssä Princetonissa. Sielläkään hän ei suinkaan heti saanut vakinaista virkaa, luultavasti ainakin osin eräänlaisen epäsosiaalisuutensa vuoksi. Kaikesta tästä olisi odottanut kirjan kertovan paljon elävämmin kuin se tekee.

Gödelin matemaattisten tulosten olemusta kirja pyrkii parhaansa mukaan kansantajuistamaan. Keino pyrkii hyödyntämään wieniläisyyttä kekseliästikin: lukuteorian teoreemoja mallinnetaan rinnastamalla ne Sachertortturesepteihin. Kirjoittajat ovat kuitenkin käyttäneet Gödelin nimeä hyväkseen sisällyttämällä teokseen melko pitkiä jaksoja ilmeisesti heitä itseään kiinnostavista, mutta vain marginaalisesti Gödeliä sivuavista aiheista kuten tekoälystä ja laskennallisesta kompleksisuudesta. Sen sijaan emme saa juuri tietoa Gödelin ajatusten kehittymisestä, hänen oivallustensa hetkistä, nerouden leimahduksista. Myös Gödelin Amerikanvuosien asiat kuten hänen työnsä Einsteinin yleisen suhteellisuusteorian parissa jäävät jotenkin irralleen.

Suomeksi ilmestyy nykyään aika paljon yleistajuisehkoa matemaattista kirjallisuutta. Silti sopii toivoa, että kielimuurien yli kammettaisiin mahdollisimman hyviä tekstejä. Olisi suonut, että suomennoksen kohteeksi olisi tullut John W. Dawson Jr.:n vuonna 1997 ilmestynyt vakava Gödel-elämäkerta *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel*. Se olisi ollut hyvä täydennys kahden Gödeliin eri tavoin liittyvän tutkijan esimerkillisiin suomennettuihin elämäkertoihin, nimittäin Terra Cognitan julkaisemiin Albrecht Fölsingin Albert Einstein -elämäkertaan ja Andrew Hodgesin Alan Turing -elämäkertaan.

Gödel-kirjan suomentaja Risto Vilkko ei saa kovin puhtaita papereita työstään. Lauseenvastikkeet ovat ihmeellisiä eivätkä termitkään aina ole ihan kohdallaan.

Vaikka tässä kritiikkiä tulikin, niin kyllä Castin ja DePaulin kirjasta sen verran oppii, että se lukea pitää!

Matti Lehtinen
Dosentti
Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto