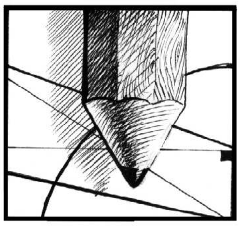

X-files

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Siriuksen ja Telluksen ensimmäinen matematiikan perusopetuksen symposium pidettiin elokuussa 2003 Sirius-X planeetalla. Symposiumin käytännön järjestelyistä vastasivat Sirius-X:n varaoppimisministeri `R@-UNI-LOOK-ONE` sekä Suomi-Sirius-ystävyysseuran toiminnanjohtaja Jii af Gee, joille suuret kiitokset onnistuneesta tapahtumasta. Matka tehtiin Sirius-X:n galaksimatkaministeriön Tellukselle rakentaman, salaisessa paikassa säilytettävän tähtiportin kautta.

Sirius-X on Sirius-A:n ja Sirius-B:n muodostaman kaksoistähtijärjestelmän ainoa asuttu planeetta. Planeetan rata on erittäin monimutkainen mutta ainakin toistaiseksi stabiili ja jaksollinen. Kaksoistähti kiertää yhteisen painopisteensä ympäri kerran 51 vuodessa ja tämä on myös planeetan jakson aika. Sääolosuhteet ja vuodenajat vaihtelevat erittäin suuresti johtuen planeetan liikkeistä kahden auringon vaikutuspiirissä. Siriuslaiset rakentavat yhteyksiä galaksimme asuttujen reuna-alueiden korkeakulttuureihin, ja myös meihin on jo jonkin aikaa kiinnitetty tiettyä huomiota, mistä osoituksena tämäkin symposium.

Matematiikan ja fysiikan tutkimuksen taso on Sirius-X:llä luonnollisesti erittäin korkea. Fysiikan tutkimuksen pääkohteeksi on suuren yhtenäisteorian keksimisen jälkeen tullut kompleksisten järjestelmien tutkiminen. Ala on suorassa yhteydessä planeetan radan stabiilisuuden tutkimiseen ja sään ennustamiseen. Kahden auringon planeettaan kohdistama säteilyteho vaihtelee sen mukaan, missä ratansa kohdassa planeetta sattuu olemaan, ja tämä tekee sääennusteen laatimisen paljon täkäläistä vaikeammaksi. Matematiikan tärkein tutkimuskohde on ratalaskelmissa ja sääennusteissa tarvittavien monimutkaisten epälineaaristen dynaamisten systeemien teoria. Matematiikka ja fysiikka ovat uusimman tutkimuksen tasolla niin kietoutuneet toisiinsa, että maallikon on vaikea tietää, mikä on matematiikkaa ja mikä on fysiikkaa. Delegaatiollemme olisi kernaasti esitelty myös alan uusinta tutkimusta sekä yliopisto-opetusta, mutta koska tämä olisi ylittänyt meikäläisten ymmärryskyvyn, päätettiin pitäytyä symposiumin alkuperäisessä aiheessa eli matematiikan alkeisopetuksessa.

Osoittautui, että matematiikan perusopetus on Sirius-X:llä täysin yksilöllistä. Oppiminen perustuu oppilaan ja opettajan väliseen oppimiskeskusteluun. Keskustelut käydään oppilaan kotona eräänlaisen aineettoman valotaulun välityksellä. Oppilas ja opettaja voivat siirtää langattomasti ajatuksensa valotaululle, tai oikeastaan he keskustelevat suoraan toistensa kanssa, mutta oppimistapahtuman yhteydessä keskustelu dokumentoituu valotaululle. Opettaja ja oppilas eivät näe toisiaan: oppilas tuntee opettajansa vain keskustelujen kautta. Jokaisen oppimistapahtuman aikana käyty keskustelu taltioituu planeetan tietojärjestelmiin, ja sekä oppilas että opettaja voivat halutessaan palata jonkin aikaisemman keskustelun teemaan tai yksityiskohtaan. Oppilas voi myös milloin tahansa kerrata oppimaansa katsastamalla käymiään keskusteluja. Myös yliopistot tarkkailevat näitä keskusteluja pyrkien löytämään luovasti ajattelevia opiskelijoita.

`R@-UNI-LOOK-ONE`:n mukaan langaton viestintä perustuu heti syntymässä asennettavaan bioelektroniseen aivolisäkkeeseen, jossa on mikrosiru sekä lähetin-vastaanotin. Tämän suoraan aivoihin kytketyn yhdeksännen sukupolven kännykän titaaniantennit sojottivat aikaisemmin siriuslaisten päissä kuin etanoilla tuntosarvet, mutta kun niiden havaittiin herättävän turhaa huomiota varsinkin Telluksella vierailtaessa, alettiin asentaa ihonalaisia antenneja.

Siriuksella lapset hallitsevat jo syntyessään reaalilukujen perusominaisuudet ja geometrian sekä lukuteorian alkeet. Matematiikan tietoinen oppiminen alkaa differentiaalilaskennasta noin viiden vuoden ikäisenä. Oppiminen etenee päinvastoin kuin meillä varsin yleisellä tasolla. Differentiaalilaskennan ohella opiskellaan logiikkaa, yleistä topologiaa, mittateoriaa sekä abstraktia algebraa. Aihepiirien synteesi tapahtuu meidän lukiotamme vastaavassa oppimisvaiheessa, kun ryhdytään tutkimaan yleisiä monistoja sekä differentioituvia rakenteita monistoilla. Todennäköisyyslaskentaa opiskellaan myös ja siitä viehättyneet muodostavat jo lukioikäisinä kiinteän ryhmän, jonka jäsenet jatkavat intensiivistä yhteistyötään yliopistoissa.

Delegaatio seurasi juuri opiskelunsa aloittaneen `CYYRUS-X-VAANCEN` matematiikan oppimistuntia. Hänen edessään olevassa valotaulussa näkyi meille aluksi käsittämättömiä merkkejä mutta `R@-UNI-LOOK-ONE`:n jakamien konvertointisilmälasien läpi katseltuna kirjoitus osoittautui ymmärrettäväksi. Oppimistunnin (Siriuksella oppituntia kutsutaan oppimistunniksi ja opetuskeskustelua oppimiskeskusteluksi!) aiheena oli perehdyttää oppilas eräisiin hyvin tuntemiimme alkeisfunktioihin. Seuraamme nyt oppilaan ja opettajan välistä oppimiskeskustelua yhden kokonaisen oppimistunnin ajan:

`ZZ/CYYRUS-X-VAANCE/MATH-5:S-OPPIMISTUNTI`
`/OPETTAJA/HAM-MU-RAB-BI/`

H1: Voisitko kertoa lyhyesti pääkohdat viime oppimistunnilla oppimistasi asioista.

C1: Tutkimme funktioiden potenssisarjakehitelmiä ja erityisesti yhden muuttujan funktion potenssisarjoja. Osoitimme, että äärettömän monta kertaa derivoituvat funktiot voidaan kehittää potenssisarjoiksi määrittelyjoukkoonsa kuuluvan pisteen $x = a$ ympäristössä. Jos sarja ei ole kaikkialla suppeneva mutta suppenee kuitenkin muuallakin kuin vain pisteessä $x = a$, on löydettävissä suurin positiivinen r niin, että sarja suppenee välissä $]a-r, a+r[$ ja hajaantuu välin $[a-r, a+r]$ ulkopuolella. Välin päätepisteissä sarja voi hajaantua tai olla suppeneva, mikä on kaikissa tapauksissa erikseen tutkittava. Sarjasta termeittäin derivoimalla tai integroimalla saadun sarjan suppenemisväli on sama kuin alkuperäisen sarjan suppenemisväli.

H2: Tänään sinulla on tilaisuus soveltaa oppimaasi, kun tutkimme yhtälöparin

$$\begin{cases} s' = c, & s(0) = 0, \\ c' = -s, & c(0) = 1, \end{cases}$$

määräämien funktioiden ominaisuuksia. Nämä funktiot ovat sinulle toistaiseksi täysin tuntemattomia, mutta telluslaiset vieraamme tuntevat ne erinomaisen hyvin. Kerro, mitä näet yhtälöistä ja minkälaisiin funktioiden s ja c ominaisuuksiin aiot kiinnittää huomiota.

C2: Differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisujen yleisistä olemassaololauseista seuraa, että kyseiset funktiot $s\colon R \to R$ ja $c\colon R \to R$ ovat olemassa. Funktiot ovat äärettömän monta kertaa derivoituvia ja derivaattojen arvot pisteessä $x = 0$ on helppo laskea, joten funktioiden potenssisarjat pisteen $x = 0$ ympäristössä voidaan muodostaa ja niiden avulla funktioiden ominaisuudetkin selviävät. Tämä kuitenkin vaikuttaa mielestäni tylsältä lähestymistavalta. Voinko tehdä kuten muinainen miehemme Telluksella, VAEI-NAE-MOEI-NEN, joka "teki tieolla venettä, laati purtta laulamalla"? Tutkisin siis funktioiden tärkeimpiä ominaisuuksia ratkaisematta funktioita yhtälöryhmästä.

H3: Ole hyvä, odotamme suurella mielenkiinnolla!

C3: Näen yhtälöryhmästä, että funktiot s ja c ovat jaksollisia, mutta tämän asian analyyttinen todistaminen ei ehkä ole aivan yksinkertaista. Kummankin funktion neljäs derivaatta on itse alkuperäinen funktio. Funktiot ovat myös lineaarisesti riippumattomia, sillä jos lineaarikombinaatio $A \cdot s(x) + B \cdot c(x)$ on identtisesti nolla, myös sen derivaatta $A \cdot c(x) - B \cdot s(x)$ on identtisesti nolla, mistä heti seuraa, että $A = B = 0$.

H4: Miten "näet" funktioiden jaksollisuuden?

C4: Selitän sen myöhemmin, jos sopii. Määrittelen funktion

$$k = s^2 + c^2.$$

Tämä on vakio, sillä $k' = 2ss' + 2cc' = 2sc - 2cs = 0$.

Kaikilla x:n arvoilla on $k(x) = k(0) = 1$.

Siis: $s^2 + c^2 = 1$.

Tästä seuraa välittömästi, että $|s(x)| \leq 1$ ja $|c(x)| \leq 1$ aina.

H5: Olet päässyt jonkinlaiseen alkuun. Jaksollisuuden analyyttiseen tutkimiseen tarvitset kuitenkin lisää työkaluja. Todista, että

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$

ja

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$

Nämä yhtälöt olisivat olleet vaikeita keksittäviä. Siksi annoin ne valmiina.

(Pienen miettimisen ja kokeilun jälkeen C:llä on todistus valmiina.)

C5: Määritellään funktio f:

$$f(x) = [s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y)]^2 + [c(x+y) - c(x)c(y) + s(x)s(y)]^2$$

ja todistetaan tämä vakioksi. Vakion arvo on 0, josta tulos.

H6: Hyvin keksitty! Entä jos summa $x+y$ vaihdetaan erotukseksi $x-y$?

C6: Ilmeisesti

$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)$$

ja

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y).$$

Jotenkin näen tai arvaan tämän. Todistaminen onnistuu samalla tavalla kuin edellä.

H7: Oikein tämäkin, ei tuhlata aikaa mekaaniseen todistamiseen. Mitä yhtälöitä löydät näiden yhteen- ja vähennyslaskuyhtälöiden seurauksina?

C7: Ainakin $s(2x) = 2s(x)c(x)$ ja $c(2x) = c(x)c(x) - s(x)s(x)$. Myös $c(2x) = 1 - 2s(x)s(x) = 2c(x)c(x) - 1$. Vähennyslaskuyhtälöistä saadaan

$$s(-x) = s(0-x) = \ldots = -s(x)$$

ja

$$c(-x) = c(0-x) = \ldots = c(x),$$

eli s on pariton ja c on parillinen funktio. Tässä toistaiseksi tärkeimmät. Lisää saadaan tarvittaessa.

H8: Nyt on aika arvioida tähänastisia tuloksia ja katsoa eteenpäin. Mitä ajattelet tuloksistasi?

C8: Jotakin tärkeää puuttuu. Funktiolla s on nollakohta, mutta c:n nollakohdista ei tiedetä toistaiseksi mitään. Ainakin s:llä on äärettömän monta nollakohtaa, jos jaksollisuus pitää paikkansa. Luultavasti c:lläkin on nollakohtia. Yritän löytää c:lle pienimmän positiivisen nollakohdan tai todistaa, että sellainen on olemassa. Koska c on jatkuva, on todistettava, että c:n merkki vaihtuu, ja siihen tarvitsen ilmeisesti joitakin epäyhtälöitä.

H9: Kuulostaa järkevältä. Yritä löytää c:n ja joidenkin polynomien välisiä epäyhtälöitä. Mistä saat sopivia polynomeja?

C9: Kehitän c:n origon ympäristössä potenssisarjaksi:

$$c(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \ldots.$$

Ilmeisesti voin sulkea c:n kahden eripituisen osasumman väliin. Riittäisikö jopa tuo näkyvissä oleva?!

H10: Saattaapa riittääkin. Aloita kuitenkin funktiosta $g(x) = x - s(x)$.

C10: Funktio g on aidosti kasvava, sillä sen derivaatta on $g'(x) = 1 - c(x) \geq 0$ ja $g'(x)$ voi olla 0 vain yksittäisissä pisteissä. Jos olisi väli I, jossa $g'(x) = 0$ kaikissa I:n pisteissä, olisi $c(x) = 1$ jokaisella I:hin kuuluvalla x:n arvolla ja tämä on mahdottomuus. Koska $g(0) = 0$, on $g(x) = x - s(x) > 0$, kun $x > 0$ ja $g(x) = x - s(x) < 0$, kun $x < 0$. Tämä voidaan pelkistää seuraavasti:

$$|s(x)| < |x|, \text{ kun } x \text{ ei ole nolla.}$$

Nyt voidaan arvioida c-funktion arvoja:

$$c(x) = 1 - 2s(x/2)s(x/2) > 1 - x^2/2,$$

kun x ei ole nolla. Tästä saadaan välittömästi, että nollasta eriävillä x:n arvoilla

$$c(x) < 1 - x^2/2 + x^4/24.$$

Siis, kun x ei ole nolla, on

$$1 - x^2/2 < c(x) < 1 - x^2/2 + x^4/24.$$

Kaksoisepäyhtälön vasen puoli osoittaa, että c:llä ei ole nollakohtia välissä $[0,1]$ ja $c(1) > 1/2$. Oikea puoli puolestaan osoittaa, että $c(2) < 1 - 2 + 2/3 = -1/3$. Koska c on jatkuva, on välissä $]1,2[$ oltava vähintään yksi c:n nollakohta. Siis c:n pienin positiivinen nollakohta on välissä $]1,2[$. Olkoon se ...

H11: Anteeksi, että keskeytän esityksesi. Mistä tiedät, että PIENIN positiivinen nollakohta on olemassa?

C11: Koska välissä $]1,2[$ on vähintään yksi nollakohta, ei alhaalta rajoitettu joukko $A = \{x | x > 1 \text{ ja } c(x) = 0\}$ ole tyhjä, joten sillä on suurin alaraja. Olkoon se a. Osoitan, että $c(a) = 0$. Jos $c(a)$ ei olisi 0, olisi olemassa a:n pieni ympäristö $]a-r, a+r[$, jonka kaikissa pisteissä c olisi nollasta eriävä, eikä a voisi olla A:n suurin alaraja. Luku a on siis c:n pienin positiivinen nollakohta.

H12: Testasin vain tietosi reaaliluvuista ja jatkuvien funktioiden perusominaisuuksista. Myöhemmin paljastuvasta syystä johtuen tästä pienimmästä positiivisesta nollakohdasta käytetään merkintää $p/2$. Voit jatkaa.

C12: Olkoon siis $p/2$ c:n pienin positiivinen nollakohta. Olisiko $p/2$ näiden funktioiden perusjakso? Ei voi olla, sillä $c(p/2) = 0$ ja $c(p) = c(p/2 + p/2) = 2c(p/2)c(p/2) - 1 = -1 < 0$. Funktioiden arvoja kohdissa $np/2$ kannattanee kuitenkin laskea. Saan seuraavat arvot:

$c(0) = 1$, $c(p/2) = 0$, $c(p) = -1$, $c(3p/2) = 0$, $c(2p) = 1$,

$s(0) = 0$, $s(p/2) = 1$, $s(p) = 0$, $s(3p/2) = -1$, $s(2p) = 0$.

Olisiko p s-funktion pienin positiivinen nollakohta? Välissä $]0, p/2]$ ei s:llä voi olla nollakohtia. Jos olisi olemassa luku v siten, että $p/2 < v < p$ ja $s(v) = 0$, niin

$$0 < v - p/2 < p/2, \text{ ja}$$

$$c(v - p/2) = c(v)c(p/2) + s(v)s(p/2) = 0 + 0 = 0,$$

eikä $p/2$ ei olisikaan c:n pienin positiivinen nollakohta. Siis: p on s:n pienin positiivinen nollakohta ja $s(x) > 0$, kun $0 < x < p$.

Jos olisi olemassa luku u siten, että $p < u < 2p$ ja $s(u) = 0$, niin $0 < u - p < p$ ja $s(u - p) = 0$, eikä p olisikaan s:n pienin positiivinen nollakohta. Tästä seuraa, että $s(x) < 0$, kun $p < x < 2p$. Samalla tavalla osoitetaan, että c:llä ei ole nollakohtia välissä $]p/2, 3p/2[$. Siis: funktioiden s ja c merkit vaihtuvat välillä $[0, 2p]$ seuraavasti:

```
s:|+++++++++++++|-------------|
c:|++++++|-------------|++++++|.
```

Näyttää siltä, että kummankin funktion perusjakso on $2p$. Todistusta varten olkoon v pienin positiivinen luku siten, että kaikilla x:n reaaliarvoilla $s(x + v) = s(x)$. Tällöin

$$s(x + v) = s(x)c(v) + c(x)s(v) = 1 \cdot s(x) + 0 \cdot c(x),$$

ja koska s ja c ovat lineaarisesti riippumattomia, on oltava $c(v) = 1$ ja $s(v) = 0$. Yllä tekemieni laskelmien mukaan pienin mahdollinen v:n arvo on $2p$. Vastaava laskelma voidaan tehdä myös c:lle.

H13: Varsin vaikuttavaa! Jaksollisuus on nyt todistettu ja jaksokin tunnetaan ainakin periaatteessa. Voitko nyt kertoa, miten näit jaksollisuuden suoraan yhtälöistä?

C13: Ajattelin tasokäyrää, jonka vektoriyhtälö on $r(x) = (s(x), c(x))$. Käyrän tangenttivektori $r'(x) = (c(x), -s(x))$ on kaikilla x:n arvoilla kohtisuorassa paikkavektoria $r(x)$ vastaan. Tällöin käyrän on oltava ympyrä tai sen osa. Tästä syystä keksin laskea heti aluksi s:n ja c:n neliöiden summan. Ylläolevat laskelmat kuitenkin osoittavat, että kyseinen tasokäyrä on kokonainen ympyrä, sillä koordinaatit ovat jatkuvia, jaksollisia parametrin x funktioita. Piste $(s(x), c(x))$ lähtee $(0, 1)$:stä ja palaa $(0, 1)$:een vektorin r pyörähtäessä yhden täyden kierroksen.

H14: Hyvin ajateltu. Meillä ei ole luonnonmukaista positiivista kiertosuuntaa, päivä kun nousee milloin mistäkin, mutta myöhemmin sellaisen kyllä määrittelemme. Totean tässä vain, että ympyrän vektoriyhtälöksi kannattaa valita $r = (c, s)$. Tällöin x:n kasvaessa 0:sta $2p$:hen, r:n kärki kiertyy $(1, 0)$:sta $(1, 0)$:aan vastapäiväisesti, kuten telluslaiset ystävämme sanoisivat. Haluatko nyt laskea joitakin ympyrään liittyviä asioita?

C14: Olen usein miettinyt, miten lasketaan ympyrän kehän pituus ja ympyrän pinta-ala. Nyt siihen on mahdollisuus. Parametriesityksestä saadaan kaarialkioksi

$$dS = (s^2 + c^2)^{1/2} \cdot dx = 1 \cdot dx$$

ja kun $dS = dx$ summataan yli parametrivälin, saadaan kehän pituudeksi $2p$. Kas, kehän pituuden ja halkaisijan suhde on p! Tämän vuoksi siis merkittiin c:n pienintä positiivista nollakohtaa $p/2$:lla. Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että R-säteisen ympyrän kehän pituus on $2pR$ ja p on siis kehän ja halkaisijan suhde missä tahansa ympyrässä. Mitä tästä luvusta tiedetään? Se on ilmeisesti varsin tärkeä luku. Voinko jotenkin laskea sen tai antaa sille analyyttisen määritelmän?

H15: Kyllä, mutta laske ensin R-säteisen ympyrän pinta-ala.

C15: Valitsen pinta-alkioksi x-säteisen, dx-levyisen ympyrärenkaan, jonka pinta-ala on $dA = 2pxdx$. Kun alkiot summataan 0:sta R:ään, saadaan alaksi pR^2. Voitko nyt antaa vihjeen, miten pääsen käsiksi lukuun p?

H16: Tässä vihje: Tutki funktiota $t(x) = s(x)/c(x)$ välissä $] - p/2, p/2[$.

C16: Antamasi funktio t on ko. välissä aidosti kasvava, sillä sen derivaatta

$$t' = 1 + t^2$$

on kaikilla muuttujan arvoilla positiivinen. Käänteisfunktio on olemassa, olkoon se nimeltään a. Siis $y = t(x)$ ja $-p/2 < x < p/2$ jos ja vain jos $x = a(y)$.

Helposti nähdään, että $s(p/4) = c(p/4)$, joten $t(p/4) = 1$ ja $a(1) = p/4$. Jos osaisin laskea a:n arvoja, saisin myös lasketuksi p:n. Funktio a on derivoituva ja sen derivaatta on

$$a'(x) = 1/(1 + x^2).$$

Derivaatta voidaan kehittää välissä $] - 1, 1[$ suppenevaksi geometriseksi sarjaksi:

$$a'(x) = 1/(1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

Jos a' kehitetään potenssisarjaksi pisteen $x = 0$ ympäristössä, saadaan juuri ylläoleva sarja, mistä seuraa, että

$$a(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots,$$

Integroimisvakio on nolla, koska $a(0) = 0$. Sarja suppenee ainakin välissä $] - 1, 1[$, mutta suppenemista on nyt tutkittava kohdassa $x = 1$: Saadaan siis sarja

$$a(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots.$$

Tämä vuorotteleva sarja suppenee, sillä osasumma

$$s_{2n} = (1-1/3)+(1/5-1/7)+\ldots+(1/(2n-1)-1/(2n+1))$$

kasvaa n:n mukana mutta toisaalta osasumma on ylhäältä rajoitettu, sillä

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1-(1/3-1/5)-\ldots \\ &\quad -(1/(2n-3)-1/(2n-1))-1/(2n+1)<1. \end{aligned}$$

Siis ainakin parillisten osasummien muodostama jono suppenee ja sen raja-arvo on 2/3:n ja 1:n välissä. Koska sarjan yleinen termi lähestyy nollaa n:n kasvaessa, suppenee myös parittomien osasummien jono kohti samaa raja-arvoa, jonka täten täytyy olla yhtäkuin $a(1) = p/4$. Eli siis

$$p = 4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots).$$

Voinko pyytää kvanttikonekeskusta laskemaan tämän likiarvon?

H17: Emme vaivaa heitä näin pienellä laskulla. Käytä omaa siruasi. Muutaman miljoonan termin osasumma riittää.

C17: Ok. Saan tuloksen $p = 3{,}1415926\ldots$. Tutkimmeko myöhemmin p:n mahdollista rationaalisuutta yms.?

H18: Kyllä ja kehitämme myös tehokkaampia algoritmeja p:n laskemiseksi. Voisitko itsenäisesti miettiä ennen seuraavaa tuntia yhtälöryhmän

$$\begin{cases} S' &= C, \quad S(0) = 0, \\ C' &= S, \quad C(0) = 1, \end{cases}$$

määräämien funktioiden ominaisuuksia. Tutki erityisesti näiden sekä äsken tutkimiesi funktioiden välisiä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia. Todella mielenkiintoisia yhteyksiä paljastuu, kun alamme tutkia näitä funktioita kompleksitasossa. Tulemme tällöin määrittelemään funktiot ylläolevista yhtälöpareista saatavina päättymättöminä potenssisarjoina. Mieti myös, mitä uusia mielenkiintoisia funktioita voi muodostaa C:stä ja S:stä. Kiitän sinua tämän oppimistuokion aikana tekemästäsi erinomaisesta työstä.

C18: Kiitos, tutkin antamaasi tehtävää.

`/CYYRUS-X-VAANCE/MATH-5:S-OPPIMISTUNTI`
`/OPETTAJA/HAM-MU-RAB-BI/ZZ`

Kiiruhtaessamme varaoppimisministerin ja Jii af Geen opastamina kohti Tellukseen johtavaa tähtiporttiasemaa keskustelimme mahdollisista jatkotapaamisista. Yksimielisesti totesimme, että ainakaan matematiikan perusopetusta ei siriuslaisten kannata tulla Tellukselle seuraamaan. Kaikentasoiset matematiikan konferenssit voidaan jatkossakin pitää Siriuksella. Varaoppimisministerillä oli vastavierailuista ilmeisesti korkeammalla tasolla valmisteltu esitys: vierailujen isäntinä voisivat toimia suomalaiset kansanrunouden tutkijat. Heillä on siriuslaisia kiinnostavaa yksityiskohtaista tietoa eräiden siriuslaisten siirtolaisten elämästä Telluksella sekä `ZAM-BO`-nimisen laitteen kohtalosta.

Kiitän professori Jorma Merikoskea kirjoitukseni matemaattiseen sisältöön liittyvistä huomautuksista sekä lehtori Pertti Heinosta kirjoitukseni kieliasua koskeneista kommenteista.