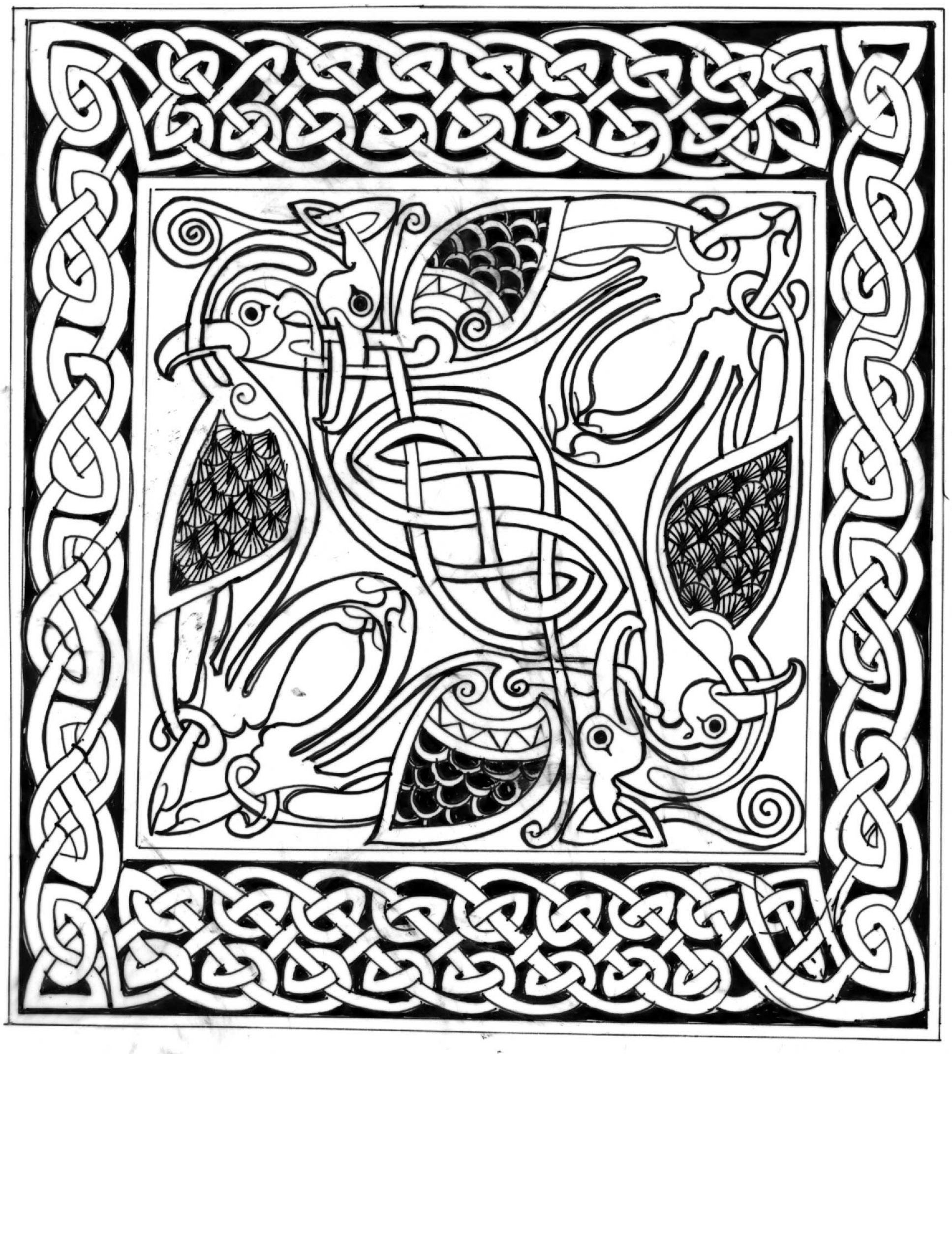
Solmu

Matematiikkalehti
3/2003

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 3/2003

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

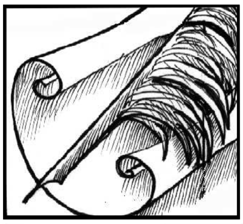
Numeroon 1/2004 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 1. helmikuuta 2004 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa sekä Suomen Kulttuurirahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys

Kannen kuvassa on lintuaiheinen druidi-ornamentti. Druidi-symboliikassa toistuvat päättymättämät solmukuvioinnit, myös linnut ovat hyvin yleinen käytetty symboli.



Shakki, taitoa vai laskemista?

Shakin ystävät seurasivat silmä kovana Garri Kasparovin ottelua Fritz-tietokonetta vastaan, joka päättyi tasapeliin 2–2.

En ole itse mikään erityinen shakin asiantuntija, mutta pelasin toki kouluaikoina shakkia joidenkin ystävieni kanssa. Ehkä mielenkiintoni lopahti siinä vaiheessa, kun olin hävinnyt viisi lyhyttä peliä peräkkäin eräälle luokkatoverilleni, joka sitten paljasti opiskelleensa erilaiset aloitussiirrot shakkikirjoista. Sehän tuntui melkein huijaukselta!

Olen kuitenkin seurannut mielenkiinnolla mestareiden, lähinnä siis Kasparovin, pelejä eri tietokoneita vastaan. Usein varsinaisia pelejä enemmän kiinnittävät huomiota ottelujen lopputuloksista syntyneet spekulaatiot siitä, voidaanko nyt tai lähitulevaisuudessa julistaa tietokone ihmisen voittajaksi lähes alalla kuin alalla, miten tämä muuttaa ihmisten suhtautumista koneisiin ja millaisia psykologisia vaikutuksia tällä ihmismielen alennustilalla on.

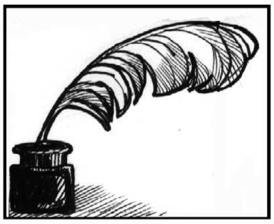
Koko kysymyksenasettelun lähtökohta tuntuu jotenkin väärältä. Shakki on peli, jossa on tarkat säännöt, eikä mitään sijaa sattumalle. Voittaja on kussakin pelissä pelannut paremmin, siinä kaikki. Toisaalta siirtojen vaikutusten ennakoiminen johtaa eri mahdollisuuksien eksponentiaaliseen kasvamiseen, mikä sopii huonosti ihmismielen hallittavaksi, mutta mitä täydellisimmin tietokoneelle. Kasparovin nykyinen vastustaja pystyy lehtitietojen perusteella tutkimaan kuusi miljoonaa siirtoa sekunnissa. Tässä valossa parempi kysymys voisikin olla: Miten on mahdollista, ettei vieläkään ole kehitetty shakki-ohjelmaa, joka voittaisi Kasparovin ja muut mestarit mennen tullen?

Kirjatietojen mukaan tyypillisessä asemassa on keskimäärin 38 siirtomahdollisuutta, ja koska 38^5 on n. 80 000 000, niin Fritz pystyy siirtoaikana arvioimaan kaikki mahdolliset asemat viiden siirron päähän. Käytännössä tällä laskentateholla voidaan sukeltaa huomattavasti syvemmällekin pelin uumeniin, kun eri vaihtoehtoja painotetaan sopivilla kertoimilla ja kaikkein huonoimmat hylätään.

Laskentateho ja shakki-koneet kehittyvät kuitenkin koko ajan, ja epäilemättä jonakin päivänä tilanne on se, ettei yksittäinen pelaaja saa konetta vastaan edes tasapeliä aikaiseksi. Mielestäni edes silloin ei tapahtumassa ole mitään sen dramaattisempaa, kuin että joukko ihmisiä on pystynyt yhdessä kehittämään pelistrategian, jolle mestaripelaaja ei yksin pärjää.

Pekka Alestalo

Pääkirjoitus



Kirjaesittely: Sukkia ja muuta matematiikkaa

Matematiikka on perinteisesti koettu tieteen popularisoinnin kannalta haasteelliseksi alaksi. Matematiikkaa käsittelevät yleistajuiset kirjoitukset keskittyvät useimmiten joko älypelien kaltaisiin ongelmiin tai jonkin matemaattisen ilmiön ja sitä tutkineiden matemaatikkojen historiaan. Itse matematiikan osuus sisällöstä on usein ollut vähäisempi.

Vuonna 2002 julkaistu *Sukkia ja muuta matematiikkaa* on suunnattu etenkin peruskouluikäisille koululaisille ja heidän opettajilleen. Tekijöiden tarkoituksena on ollut osoittaa, että matematiikan ei tarvitse olla kuivakkaa numeroiden pyörittämistä. Lopputuloksena on paljon totutusta poikkeava matematiikan kirja.

Kirjassa esitellään kuvien ja konkreettisten, lapsille tuttujen, esimerkkien avulla erilaisia tunnettuja matemaattisia ongelmia ratkaisuineen. Ongelmien ratkaisemisen lomassa tuodaan esille myös syvällisempiä matemaattisia ideoita, kuten esimerkiksi induktioperiaate. Useimmat käsitellyistä ongelmista ovat matematiikkaan perehtyneelle jo valmiiksi tuttuja, kuten esimerkiksi Zenonin paradoksit, Königsbergin sillat ja Hanoin tornit. Ongelmat on pyritty esittämään nuorillekin oppilaille helposti omaksuttavalla tavalla.

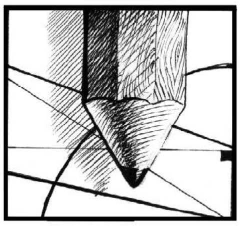
Useimmat tehtävät lienevät liian vaikeita oppilaiden ratkaistaviksi täysin itsenäisesti. Kirjan tehtävät sopivatkin esitettäviksi matematiikkakerhoissa tai lisämateriaaliksi asiasta kiinnostuneille oppilaille.

Kirjan Sukkia ja muuta matematiikkaa, MFKA-kustannus, ISBN 952-9656-79-3, tekijät ovat Jenni Björklund, Saara Lehto, Sampo Pasanen ja Meeri Viljanen. Kirjan hinta on 16 euroa.

Tietoa muusta suomenkielisestä yleistajuisesta matemaattisesta kirjallisuudesta löytyy osoitteesta `http://solmu.math.helsinki.fi/1998/2/alestalo.html`.

Antti Rasila

Toimitussihteerin palsta



X-files

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Siriuksen ja Telluksen ensimmäinen matematiikan perusopetuksen symposium pidettiin elokuussa 2003 Sirius-X planeetalla. Symposiumin käytännön järjestelyistä vastasivat Sirius-X:n varaoppimisministeri `R@-UNI-LOOK-ONE` sekä Suomi-Sirius-ystävyysseuran toiminnanjohtaja Jii af Gee, joille suuret kiitokset onnistuneesta tapahtumasta. Matka tehtiin Sirius-X:n galaksimatkaministeriön Tellukselle rakentaman, salaisessa paikassa säilytettävän tähtiportin kautta.

Sirius-X on Sirius-A:n ja Sirius-B:n muodostaman kaksoistähtijärjestelmän ainoa asuttu planeetta. Planeetan rata on erittäin monimutkainen mutta ainakin toistaiseksi stabiili ja jaksollinen. Kaksoistähti kiertää yhteisen painopisteensä ympäri kerran 51 vuodessa ja tämä on myös planeetan jakson aika. Sääolosuhteet ja vuodenajat vaihtelevat erittäin suuresti johtuen planeetan liikkeistä kahden auringon vaikutuspiirissä. Siriuslaiset rakentavat yhteyksiä galaksimme asuttujen reuna-alueiden korkeakulttuureihin, ja myös meihin on jo jonkin aikaa kiinnitetty tiettyä huomiota, mistä osoituksena tämäkin symposium.

Matematiikan ja fysiikan tutkimuksen taso on Sirius-X:llä luonnollisesti erittäin korkea. Fysiikan tutkimuksen pääkohteeksi on suuren yhtenäisteorian keksimisen jälkeen tullut kompleksisten järjestelmien tutkiminen. Ala on suorassa yhteydessä planeetan radan stabiilisuuden tutkimiseen ja sään ennustamiseen. Kahden auringon planeettaan kohdistama säteilyteho vaihtelee sen mukaan, missä ratansa kohdassa planeetta sattuu olemaan, ja tämä tekee sääennusteen laatimisen paljon täkäläistä vaikeammaksi. Matematiikan tärkein tutkimuskohde on ratalaskelmissa ja sääennusteissa tarvittavien monimutkaisten epälineaaristen dynaamisten systeemien teoria. Matematiikka ja fysiikka ovat uusimman tutkimuksen tasolla niin kietoutuneet toisiinsa, että maallikon on vaikea tietää, mikä on matematiikkaa ja mikä on fysiikkaa. Delegaatiollemme olisi kernaasti esitelty myös alan uusinta tutkimusta sekä yliopisto-opetusta, mutta koska tämä olisi ylittänyt meikäläisten ymmärryskyvyn, päätettiin pitäytyä symposiumin alkuperäisessä aiheessa eli matematiikan alkeisopetuksessa.

Osoittautui, että matematiikan perusopetus on Sirius-X:llä täysin yksilöllistä. Oppiminen perustuu oppilaan ja opettajan väliseen oppimiskeskusteluun. Keskustelut käydään oppilaan kotona eräänlaisen aineettoman valotaulun välityksellä. Oppilas ja opettaja voivat siirtää langattomasti ajatuksensa valotaululle, tai oikeastaan he keskustelevat suoraan toistensa kanssa, mutta oppimistapahtuman yhteydessä keskustelu dokumentoituu valotaululle. Opettaja ja oppilas eivät näe toisiaan: oppilas tuntee opettajansa vain keskustelujen kautta. Jokaisen oppimistapahtuman aikana käyty keskustelu taltioituu planeetan tietojärjestelmiin, ja sekä oppilas että opettaja voivat halutessaan palata jonkin aikaisemman keskustelun teemaan tai yksityiskohtaan. Oppilas voi myös milloin tahansa kerrata oppimaansa katsastamalla käymiään keskusteluja. Myös yliopistot tarkkailevat näitä keskusteluja pyrkien löytämään luovasti ajattelevia opiskelijoita.

`R@-UNI-LOOK-ONE`:n mukaan langaton viestintä perustuu heti syntymässä asennettavaan bioelektroniseen aivolisäkkeeseen, jossa on mikrosiru sekä lähetinvastaanotin. Tämän suoraan aivoihin kytketyn yhdeksännen sukupolven kännykän titaaniantennit sojottivat aikaisemmin siriuslaisten päissä kuin etanoilla tuntosarvet, mutta kun niiden havaittiin herättävän turhaa huomiota varsinkin Telluksella vierailtaessa, alettiin asentaa ihonalaisia antenneja.

Siriuksella lapset hallitsevat jo syntyessään reaalilukujen perusominaisuudet ja geometrian sekä lukuteorian alkeet. Matematiikan tietoinen oppiminen alkaa differentiaalilaskennasta noin viiden vuoden ikäisenä. Oppiminen etenee päinvastoin kuin meillä varsin yleisellä tasolla. Differentiaalilaskennan ohella opiskellaan logiikkaa, yleistä topologiaa, mittateoriaa sekä abstraktia algebraa. Aihepiirien synteesi tapahtuu meidän lukiotamme vastaavassa oppimisvaiheessa, kun ryhdytään tutkimaan yleisiä monistoja sekä differentioituvia rakenteita monistoilla. Todennäköisyyslaskentaa opiskellaan myös ja siitä viehättyneet muodostavat jo lukioikäisinä kiinteän ryhmän, jonka jäsenet jatkavat intensiivistä yhteistyötään yliopistoissa.

Delegaatio seurasi juuri opiskelunsa aloittaneen `CYYRUS-X-VAANCEN` matematiikan oppimistuntia. Hänen edessään olevassa valotaulussa näkyi meille aluksi käsittämättömiä merkkejä mutta `R@-UNI-LOOK-ONE`:n jakamien konvertointisilmälasien läpi katseltuna kirjoitus osoittautui ymmärrettäväksi. Oppimistunnin (Siriuksella oppituntia kutsutaan oppimistunniksi ja opetuskeskustelua oppimiskeskusteluksi!) aiheena oli perehdyttää oppilas eräisiin hyvin tuntemiimme alkeisfunktioihin. Seuraamme nyt oppilaan ja opettajan välistä oppimiskeskustelua yhden kokonaisen oppimistunnin ajan:

`ZZ/CYYRUS-X-VAANCE/MATH-5:S-OPPIMISTUNTI`
`/OPETTAJA/HAM-MU-RAB-BI/`

H1: Voisitko kertoa lyhyesti pääkohdat viime oppimistunnilla oppimistasi asioista.

C1: Tutkimme funktioiden potenssisarjakehitelmiä ja erityisesti yhden muuttujan funktion potenssisarjoja. Osoitimme, että äärettömän monta kertaa derivoituvat funktiot voidaan kehittää potenssisarjoiksi määrittelyjoukkoonsa kuuluvan pisteen $x = a$ ympäristössä. Jos sarja ei ole kaikkialla suppeneva mutta suppenee kuitenkin muuallakin kuin vain pisteessä $x = a$, on löydettävissä suurin positiivinen r niin, että sarja suppenee välissä $]a-r, a+r[$ ja hajaantuu välin $[a-r, a+r]$ ulkopuolella. Välin päätepisteissä sarja voi hajaantua tai olla suppeneva, mikä on kaikissa tapauksissa erikseen tutkittava. Sarjasta termeittäin derivoimalla tai integroimalla saadun sarjan suppenemisväli on sama kuin alkuperäisen sarjan suppenemisväli.

H2: Tänään sinulla on tilaisuus soveltaa oppimaasi, kun tutkimme yhtälöparin

$$\begin{cases} s' &= c, & s(0) &= 0, \\ c' &= -s, & c(0) &= 1, \end{cases}$$

määräämien funktioiden ominaisuuksia. Nämä funktiot ovat sinulle toistaiseksi täysin tuntemattomia, mutta telluslaiset vieraamme tuntevat ne erinomaisen hyvin. Kerro, mitä näet yhtälöistä ja minkälaisiin funktioiden s ja c ominaisuuksiin aiot kiinnittää huomiota.

C2: Differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisujen yleisistä olemassaololauseista seuraa, että kyseiset funktiot $s\colon R \to R$ ja $c\colon R \to R$ ovat olemassa. Funktiot ovat äärettömän monta kertaa derivoituvia ja derivaattojen arvot pisteessä $x = 0$ on helppo laskea, joten funktioiden potenssisarjat pisteen $x = 0$ ympäristössä voidaan muodostaa ja niiden avulla funktioiden ominaisuudetkin selviävät. Tämä kuitenkin vaikuttaa mielestäni tylsältä lähestymistavalta. Voinko tehdä kuten muinainen miehemme Telluksella, VAEI-NAE-MOEI-NEN, joka ”teki tieolla venettä, laati purtta laulamalla”? Tutkisin siis funktioiden tärkeimpiä ominaisuuksia ratkaisematta funktioita yhtälöryhmästä.

H3: Ole hyvä, odotamme suurella mielenkiinnolla!

C3: Näen yhtälöryhmästä, että funktiot s ja c ovat jaksollisia, mutta tämän asian analyyttinen todistaminen ei ehkä ole aivan yksinkertaista. Kummankin funktion neljäs derivaatta on itse alkuperäinen funktio. Funktiot ovat myös lineaarisesti riippumattomia, sillä jos lineaarikombinaatio $A \cdot s(x) + B \cdot c(x)$ on identtisesti nolla, myös sen derivaatta $A \cdot c(x) - B \cdot s(x)$ on identtisesti nolla, mistä heti seuraa, että $A = B = 0$.

H4: Miten ”näet” funktioiden jaksollisuuden?

C4: Selitän sen myöhemmin, jos sopii. Määrittelen funktion

$$k = s^2 + c^2.$$

Tämä on vakio, sillä $k' = 2ss' + 2cc' = 2sc - 2cs = 0$.

Kaikilla x:n arvoilla on $k(x) = k(0) = 1$.

Siis: $s^2 + c^2 = 1$.

Tästä seuraa välittömästi, että $|s(x)| \leq 1$ ja $|c(x)| \leq 1$ aina.

H5: Olet päässyt jonkinlaiseen alkuun. Jaksollisuuden analyyttiseen tutkimiseen tarvitset kuitenkin lisää työkaluja. Todista, että

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$

ja

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$

Nämä yhtälöt olisivat olleet vaikeita keksittäviä. Siksi annoin ne valmiina.

(Pienen miettimisen ja kokeilun jälkeen C:llä on todistus valmiina.)

C5: Määritellään funktio f:

$$f(x) = [s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y)]^2 + [c(x+y) - c(x)c(y) + s(x)s(y)]^2$$

ja todistetaan tämä vakioksi. Vakion arvo on 0, josta tulos.

H6: Hyvin keksitty! Entä jos summa $x+y$ vaihdetaan erotukseksi $x-y$?

C6: Ilmeisesti

$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)$$

ja

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y).$$

Jotenkin näen tai arvaan tämän. Todistaminen onnistuu samalla tavalla kuin edellä.

H7: Oikein tämäkin, ei tuhlata aikaa mekaaniseen todistamiseen. Mitä yhtälöitä löydät näiden yhteen- ja vähennyslaskuyhtälöiden seurauksina?

C7: Ainakin $s(2x) = 2s(x)c(x)$ ja $c(2x) = c(x)c(x) - s(x)s(x)$. Myös $c(2x) = 1 - 2s(x)s(x) = 2c(x)c(x) - 1$. Vähennyslaskuyhtälöistä saadaan

$$s(-x) = s(0-x) = \ldots = -s(x)$$

ja

$$c(-x) = c(0-x) = \ldots = c(x),$$

eli s on pariton ja c on parillinen funktio. Tässä toistaiseksi tärkeimmät. Lisää saadaan tarvittaessa.

H8: Nyt on aika arvioida tähänastisia tuloksia ja katsoa eteenpäin. Mitä ajattelet tuloksistasi?

C8: Jotakin tärkeää puuttuu. Funktiolla s on nollakohta, mutta c:n nollakohdista ei tiedetä toistaiseksi mitään. Ainakin s:llä on äärettömän monta nollakohtaa, jos jaksollisuus pitää paikkansa. Luultavasti c:lläkin on nollakohtia. Yritän löytää c:lle pienimmän positiivisen nollakohdan tai todistaa, että sellainen on olemassa. Koska c on jatkuva, on todistettava, että c:n merkki vaihtuu, ja siihen tarvitsen ilmeisesti joitakin epäyhtälöitä.

H9: Kuulostaa järkevältä. Yritä löytää c:n ja joidenkin polynomien välisiä epäyhtälöitä. Mistä saat sopivia polynomeja?

C9: Kehitän c:n origon ympäristössä potenssisarjaksi:

$$c(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \ldots .$$

Ilmeisesti voin sulkea c:n kahden eripituisen osasumman väliin. Riittäisikö jopa tuo näkyvissä oleva?!

H10: Saattaapa riittääkin. Aloita kuitenkin funktiosta $g(x) = x - s(x)$.

C10: Funktio g on aidosti kasvava, sillä sen derivaatta on $g'(x) = 1 - c(x) \geq 0$ ja $g'(x)$ voi olla 0 vain yksittäisissä pisteissä. Jos olisi väli I, jossa $g'(x) = 0$ kaikissa I:n pisteissä, olisi $c(x) = 1$ jokaisella I:hin kuuluvalla x:n arvolla ja tämä on mahdottomuus. Koska $g(0) = 0$, on $g(x) = x - s(x) > 0$, kun $x > 0$ ja $g(x) = x - s(x) < 0$, kun $x < 0$. Tämä voidaan pelkistää seuraavasti:

$$|s(x)| < |x|, \text{ kun } x \text{ ei ole nolla.}$$

Nyt voidaan arvioida c-funktion arvoja:

$$c(x) = 1 - 2s(x/2)s(x/2) > 1 - x^2/2,$$

kun x ei ole nolla. Tästä saadaan välittömästi, että nollasta eriävillä x:n arvoilla

$$c(x) < 1 - x^2/2 + x^4/24.$$

Siis, kun x ei ole nolla, on

$$1 - x^2/2 < c(x) < 1 - x^2/2 + x^4/24.$$

Kaksoisepäyhtälön vasen puoli osoittaa, että c:llä ei ole nollakohtia välissä $[0,1]$ ja $c(1) > 1/2$. Oikea puoli puolestaan osoittaa, että $c(2) < 1 - 2 + 2/3 = -1/3$. Koska c on jatkuva, on välissä $]1,2[$ oltava vähintään yksi c:n nollakohta. Siis c:n pienin positiivinen nollakohta on välissä $]1,2[$. Olkoon se ...

H11: Anteeksi, että keskeytän esityksesi. Mistä tiedät, että PIENIN positiivinen nollakohta on olemassa?

C11: Koska välissä $]1,2[$ on vähintään yksi nollakohta, ei alhaalta rajoitettu joukko $A = \{x | x > 1 \text{ ja } c(x) = 0\}$ ole tyhjä, joten sillä on suurin alaraja. Olkoon se a. Osoitan, että $c(a) = 0$. Jos $c(a)$ ei olisi 0, olisi olemassa a:n pieni ympäristö $]a-r, a+r[$, jonka kaikissa pisteissä c olisi nollasta eriävä, eikä a voisi olla A:n suurin alaraja. Luku a on siis c:n pienin positiivinen nollakohta.

H12: Testasin vain tietosi reaaliluvuista ja jatkuvien funktioiden perusominaisuuksista. Myöhemmin paljastuvasta syystä johtuen tästä pienimmästä positiivisesta nollakohdasta käytetään merkintää $p/2$. Voit jatkaa.

C12: Olkoon siis $p/2$ c:n pienin positiivinen nollakohta. Olisiko $p/2$ näiden funktioiden perusjakso? Ei voi olla, sillä $c(p/2) = 0$ ja $c(p) = c(p/2 + p/2) = 2c(p/2)c(p/2) - 1 = -1 < 0$. Funktioiden arvoja kohdissa $np/2$ kannattanee kuitenkin laskea. Saan seuraavat arvot:

$c(0) = 1$, $c(p/2) = 0$, $c(p) = -1$, $c(3p/2) = 0$, $c(2p) = 1$,

$s(0) = 0,\ s(p/2) = 1,\ s(p) = 0,\ s(3p/2) = -1,\ s(2p) = 0.$

Olisiko p s-funktion pienin positiivinen nollakohta? Välissä $]0, p/2]$ ei s:llä voi olla nollakohtia. Jos olisi olemassa luku v siten, että $p/2 < v < p$ ja $s(v) = 0$, niin

$$0 < v - p/2 < p/2, \text{ ja}$$

$$c(v - p/2) = c(v)c(p/2) + s(v)s(p/2) = 0 + 0 = 0,$$

eikä $p/2$ ei olisikaan c:n pienin positiivinen nollakohta. Siis: p on s:n pienin positiivinen nollakohta ja $s(x) > 0$, kun $0 < x < p$.

Jos olisi olemassa luku u siten, että $p < u < 2p$ ja $s(u) = 0$, niin $0 < u - p < p$ ja $s(u - p) = 0$, eikä p olisikaan s:n pienin positiivinen nollakohta. Tästä seuraa, että $s(x) < 0$, kun $p < x < 2p$. Samalla tavalla osoitetaan, että c:llä ei ole nollakohtia välissä $]p/2, 3p/2[$. Siis: funktioiden s ja c merkit vaihtuvat välillä $[0, 2p]$ seuraavasti:

```
s:|+++++++++++++|-------------|
c:|++++++|-------------|++++++|.
```

Näyttää siltä, että kummankin funktion perusjakso on $2p$. Todistusta varten olkoon v pienin positiivinen luku siten, että kaikilla x:n reaaliarvoilla $s(x + v) = s(x)$. Tällöin

$$s(x + v) = s(x)c(v) + c(x)s(v) = 1 \cdot s(x) + 0 \cdot c(x),$$

ja koska s ja c ovat lineaarisesti riippumattomia, on oltava $c(v) = 1$ ja $s(v) = 0$. Yllä tekemieni laskelmien mukaan pienin mahdollinen v:n arvo on $2p$. Vastaava laskelma voidaan tehdä myös c:lle.

H13: Varsin vaikuttavaa! Jaksollisuus on nyt todistettu ja jaksokin tunnetaan ainakin periaatteessa. Voitko nyt kertoa, miten näit jaksollisuuden suoraan yhtälöistä?

C13: Ajattelin tasokäyrää, jonka vektoriyhtälö on $r(x) = (s(x), c(x))$. Käyrän tangenttivektori $r'(x) = (c(x), -s(x))$ on kaikilla x:n arvoilla kohtisuorassa paikkavektoria $r(x)$ vastaan. Tällöin käyrän on oltava ympyrä tai sen osa. Tästä syystä keksin laskea heti aluksi s:n ja c:n neliöiden summan. Ylläolevat laskelmat kuitenkin osoittavat, että kyseinen tasokäyrä on kokonainen ympyrä, sillä koordinaatit ovat jatkuvia, jaksollisia parametrin x funktioita. Piste $(s(x), c(x))$ lähtee $(0, 1)$:stä ja palaa $(0, 1)$:een vektorin r pyörähtäessä yhden täyden kierroksen.

H14: Hyvin ajateltu. Meillä ei ole luonnonmukaista positiivista kiertosuuntaa, päivä kun nousee milloin mistäkin, mutta myöhemmin sellaisen kyllä määrittelemme. Totean tässä vain, että ympyrän vektoriyhtälöksi kannattaa valita $r = (c, s)$. Tällöin x:n kasvaessa 0:sta $2p$:hen, r:n kärki kiertyy $(1, 0)$:sta $(1, 0)$:aan vastapäiväisesti, kuten telluslaiset ystävämme sanoisivat. Haluatko nyt laskea joitakin ympyrään liittyviä asioita?

C14: Olen usein miettinyt, miten lasketaan ympyrän kehän pituus ja ympyrän pinta-ala. Nyt siihen on mahdollisuus. Parametriesityksestä saadaan kaarialkioksi

$$dS = (s^2 + c^2)^{1/2} \cdot dx = 1 \cdot dx$$

ja kun $dS = dx$ summataan yli parametrivälin, saadaan kehän pituudeksi $2p$. Kas, kehän pituuden ja halkaisijan suhde on p! Tämän vuoksi siis merkittiin c:n pienintä positiivista nollakohtaa $p/2$:lla. Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että R-säteisen ympyrän kehän pituus on $2pR$ ja p on siis kehän ja halkaisijan suhde missä tahansa ympyrässä. Mitä tästä luvusta tiedetään? Se on ilmeisesti varsin tärkeä luku. Voinko jotenkin laskea sen tai antaa sille analyyttisen määritelmän?

H15: Kyllä, mutta laske ensin R-säteisen ympyrän pinta-ala.

C15: Valitsen pinta-alkioksi x-säteisen, dx-levyisen ympyrärenkaan, jonka pinta-ala on $dA = 2pxdx$. Kun alkiot summataan 0:sta R:ään, saadaan alaksi pR^2. Voitko nyt antaa vihjeen, miten pääsen käsiksi lukuun p?

H16: Tässä vihje: Tutki funktiota $t(x) = s(x)/c(x)$ välissä $]-p/2, p/2[$.

C16: Antamasi funktio t on ko. välissä aidosti kasvava, sillä sen derivaatta

$$t' = 1 + t^2$$

on kaikilla muuttujan arvoilla positiivinen. Käänteisfunktio on olemassa, olkoon se nimeltään a. Siis $y = t(x)$ ja $-p/2 < x < p/2$ jos ja vain jos $x = a(y)$.

Helposti nähdään, että $s(p/4) = c(p/4)$, joten $t(p/4) = 1$ ja $a(1) = p/4$. Jos osaisin laskea a:n arvoja, saisin myös lasketuksi p:n. Funktio a on derivoituva ja sen derivaatta on

$$a'(x) = 1/(1 + x^2).$$

Derivaatta voidaan kehittää välissä $]-1, 1[$ suppenevaksi geometriseksi sarjaksi:

$$a'(x) = 1/(1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots.$$

Jos a' kehitetään potenssisarjaksi pisteen $x = 0$ ympäristössä, saadaan juuri ylläoleva sarja, mistä seuraa, että

$$a(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots,$$

Integroimisvakio on nolla, koska $a(0) = 0$. Sarja suppenee ainakin välissä $]-1, 1[$, mutta suppenemista on nyt tutkittava kohdassa $x = 1$: Saadaan siis sarja

$$a(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots.$$

Tämä vuorotteleva sarja suppenee, sillä osasumma

$$s_{2n} = (1-1/3)+(1/5-1/7)+\ldots+(1/(2n-1)-1/(2n+1))$$

kasvaa n:n mukana mutta toisaalta osasumma on ylhäältä rajoitettu, sillä

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1-(1/3-1/5)-\ldots \\ &\quad -(1/(2n-3)-1/(2n-1))-1/(2n+1)<1. \end{aligned}$$

Siis ainakin parillisten osasummien muodostama jono suppenee ja sen raja-arvo on 2/3:n ja 1:n välissä. Koska sarjan yleinen termi lähestyy nollaa n:n kasvaessa, suppenee myös parittomien osasummien jono kohti samaa raja-arvoa, jonka täten täytyy olla yhtäkuin $a(1) = p/4$. Eli siis

$$p = 4\cdot(1-1/3+1/5-1/7+\ldots).$$

Voinko pyytää kvanttikonekeskusta laskemaan tämän likiarvon?

H17: Emme vaivaa heitä näin pienellä laskulla. Käytä omaa siruasi. Muutaman miljoonan termin osasumma riittää.

C17: Ok. Saan tuloksen $p = 3{,}1415926\ldots$. Tutkimmeko myöhemmin p:n mahdollista rationaalisuutta yms.?

H18: Kyllä ja kehitämme myös tehokkaampia algoritmeja p:n laskemiseksi. Voisitko itsenäisesti miettiä ennen seuraavaa tuntia yhtälöryhmän

$$\begin{cases} S' = C, & S(0)=0, \\ C' = S, & C(0)=1, \end{cases}$$

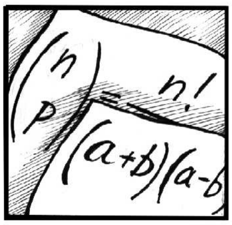
määräämien funktioiden ominaisuuksia. Tutki erityisesti näiden sekä äsken tutkimiesi funktioiden välisiä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia. Todella mielenkiintoisia yhteyksiä paljastuu, kun alamme tutkia näitä funktioita kompleksitasossa. Tulemme tällöin määrittelemään funktiot ylläolevista yhtälöpareista saatavina päättymättöminä potenssisarjoina. Mieti myös, mitä uusia mielenkiintoisia funktioita voi muodostaa C:stä ja S:stä. Kiitän sinua tämän oppimistuokion aikana tekemästäsi erinomaisesta työstä.

C18: Kiitos, tutkin antamaasi tehtävää.

`/CYYRUS-X-VAANCE/MATH-5:S-OPPIMISTUNTI`
`/OPETTAJA/HAM-MU-RAB-BI/ZZ`

Kiiruhtaessamme varaoppimisministerin ja Jii af Geen opastamina kohti Tellukseen johtavaa tähtiporttiasemaa keskustelimme mahdollisista jatkotapaamisista. Yksimielisesti totesimme, että ainakaan matematiikan perusopetusta ei siriuslaisten kannata tulla Tellukselle seuraamaan. Kaikentasoiset matematiikan konferenssit voidaan jatkossakin pitää Siriuksella. Varaoppimisministerillä oli vastavierailuista ilmeisesti korkeammalla tasolla valmisteltu esitys: vierailujen isäntinä voisivat toimia suomalaiset kansanrunouden tutkijat. Heillä on siriuslaisia kiinnostavaa yksityiskohtaista tietoa eräiden siriuslaisten siirtolaisten elämästä Telluksella sekä `ZAM-BO`-nimisen laitteen kohtalosta.

Kiitän professori Jorma Merikoskea kirjoitukseni matemaattiseen sisältöön liittyvistä huomautuksista sekä lehtori Pertti Heinosta kirjoitukseni kieliasua koskeneista kommenteista.



Mihin muotoon asettuu päistään kiinnitetty köysi?

Pekka Alestalo
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Tarkoitukseni on esittää vastaus otsikossa mainittuu kysymykseen, joka aina silloin tällöin nousee esiin. Ongelmalla on pitkä historia: ilmeisesti ensimmäinen henkilö, joka yritti selvittää asian matemaattisin keinoin oli Galileo Galilei. Hän päätyi laskuissaan kuitenkin paraabeliin, joka on väärä vastaus. Virheen havaitsi hollantilainen Christiaan Huygens v. 1646, ja oikeaan ratkaisuun päätyivät 1600-luvun lopussa Huygens, Johan Bernoulli ja G.W. Leibniz. Kyseisen käyrän nimi on ketjukäyrä eli katenaari (*catena* = ketju), ja sen yhtälössä esiintyykin yllättäen eksponenttifunktioita.

Lähtökohta

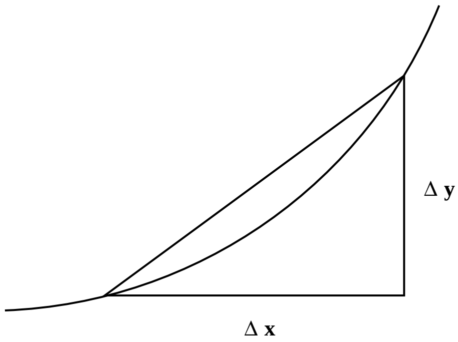
Ongelma on siis seuraava: On annettu pätkä narua, jonka pituus on ℓ, sekä ripustuspisteet $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$. Tehtävänä on määrittää sen käyrän $y = f(x)$ yhtälö, jonka muotoiseksi naru asettuu, kun sen päät kiinnitetään pisteisiin P ja Q.

Tutkitaan aluksi tähän muotoiluun sisältyviä oletuksia. Ratkaisun olemassaolon varmistamiseksi täytyy ainakin olettaa, että naru yltää pisteestä P pisteeseen Q, ts. $\ell \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Lisäksi tehtävään sisältyy ajatus siitä, että narun muoto voidaan esittää jonkin funktion kuvaajana; jos narussa olisi silmukoita tai se asettuisi osittain välin $[x_1, x_2]$ ulkopuolelle, ei sen esittäminen funktion kuvaajana olisi mahdollista. Tämän kirjoituksen lähtökohtana on kuitenkin käytännön havainto: ongelmalla on muotoa $y = f(x),\ x \in [x_1, x_2]$, oleva ratkaisu.

Jotta kysymyksestä ei tulisi liian hankalaa heti kättelyssä, oletetaan, että naru on tasapaksua ja sen pituustiheys ρ on vakio. Pituustiheyden yksikkö on kg/m ja s:n pituisen narun massa on silloin ρs.

Ensimmäinen yritys

Köyden muoto määräytyy siitä vaatimuksesta, että sen potentiaalienergia on pienin mahdollinen, joten on muodostettava potentiaalienergiaa kuvaava lauseke. Tarkastellaan sen vuoksi lyhyttä narun pätkää Δs. Sen pituutta voidaan approksimoida lausekkeella $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, missä merkinnät selviävät kuviosta.



Tämän osan massa on likimäärin muotoa

$$\rho\Delta s = \rho\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\ \Delta x,$$

ja sen korkeus x-akselista (potentiaalienergian nollakohta) mitattuna on $f(x)$. Narunpätkän potentiaalienergiaa approksimoi siis lauseke (muista "mgh")

$$(\rho\Delta s)gf(x) = g\rho f(x)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\ \Delta x,$$

joka on voimassa sitä tarkemmin, mitä pienempi on Δx. Kun $\Delta x \to 0$, niin lauseke $\Delta y/\Delta x$ lähestyy funktion kuvaajan kulmakerrointa pisteessä x, joka on $f'(x)$. Koko narun potentiaalienergia on tällaisten termien summa, jota rajalla $\Delta x \to 0$ vastaa integraali

$$J[f] = \int_{x_1}^{x_2} g\rho f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx.$$

Nyt voimme muotoilla ongelman pelkästään matemaattisin käsittein:

- Määritä se jatkuvasti derivoituva funktio $f\colon [x_1,x_2] \to R$, joka toteuttaa ehdot
  1. $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$,
  2. $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx = \ell$,
  3. lausekeella $J[f]$ on pienin mahdollinen arvo.

Toisessa kohdassa oleva integraali esittää funktion kuvaajan pituutta ja se voidaan johtaa samanlaisella päättelyllä kuin yllä. Kolmannessa kohdassa pienintä arvoa tarkastellaan kaikkien niiden funktioiden joukossa, jotka toteuttavat kaksi ensimmäistä ehtoa.

Tämän tyyppisiä minimointiongelmia tutkiva matematiikan haara on nimeltään variaatiolaskenta. Se tarjoaa yleisen menetelmän minimointi- ja maksimointiongelmien käsittelyyn, joka tietyssä mielessä vastaa tavallisen funktion ääriarvojen etsimistä: ne löytyvät derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä. Yleisessä tapauksessa tilanne on kuitenkin hankalampi, sillä esimerkiksi yllä lauseke J täytyy tulkita funktioksi, jonka arvot ovat reaalilukuja, mutta muuttujan paikalla voi olla mikä tahansa jatkuvasti derivoituva funktio, joka toteuttaa ehdot 1 ja 2.

Johdatus variaatiolaskennan saloihin jää kuitenkin tämän kirjoituksen ulkopuolelle, sillä, ehkä hieman yllättäen, naruongelman ratkaisu saadaankin vaihtoehtoisella tavalla tutkimalla aivan tavallisia derivaattoja!

Toinen yritys

Lähestymme ongelmaa toista kautta tutkimalla köyteen vaikuttavia voimia: jos köysi on tasapainossa, on sen kuhunkin osaan vaikuttavien voimien summa nolla. Tämä on voimassa erikseen voimien pysty- ja vaakasuorille komponenteille.

Tilanteen yksinkertaistamiseksi oletetaan narun olevan niin pitkä, että sen alin kohta on ripustuspisteiden alapuolella. Yleinen tapaus voidaan joko käsitellä samalla periaatteella erikseen tai johtaa tästä erikoistapauksesta kuvitteellisen pitemmän narun ja ylimääräisten kiinnityspisteiden avulla.

Köyden jännitysvoima vaikuttaa kussakin kohdassa köyden tangentin suuntaan, jolloin minimikohdassa jännitysvoima T_0 on vaakasuora. Valitaan xy-koordinaatisto siten, että minimikohdassa on $x = 0$. Oletetaan, että köyden muotoa kuvaa käyrä $y = f(x)$ ja lasketaan y-akselin ja käyrän pisteen $(x, f(x))$ rajoittamaan köyden palaseen vaikuttavat voimat. Olkoon T köyden jännitysvoima ja α köyden tangentin suuntakulma tässä pisteessä.

Koska köyden palanen ei liiku vaakasuorassa, on kaikkien voimien vaakakomponenttien summa nolla:

$$-T_0 + T\cos\alpha = 0.$$

Tämä yhtälö kertoo vain sen, että jännitysvoiman vaakasuora komponentti on vakio T_0 kaikissa pisteissä. Toisaalta myös pystykomponenttien summa on sekin nolla:

$$T\sin\alpha - g\rho s = 0,$$

missä s on kyseessä olevan köyden palasen pituus. Aikaisempien tarkastelujen perusteella $s = \int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}\ dt$, ja koska $T\sin\alpha = T_0\tan\alpha = T_0 f'(x)$, niin saamme yhtälön

$$T_0 f'(x) = g\rho\int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}\ dt.$$

Tästä yhtälöstä seuraa, että $f'(x)$ on derivoituva, sillä tämä pätee oikean puoleiselle lausekkeelle. Koska yhtälö on voimassa kaikilla muuttujan $x > 0$ arvoilla, voimme derivoida yhtälön molemmat puolet, jolloin saadaan differentiaaliyhtälö

$$f''(x) = a\sqrt{1 + f'(x)^2}, \quad a = \frac{g\rho}{T_0} = \text{ vakio} > 0.$$

Sijoitetaan yhtälöön $g(x) = f'(x)$ ja yritetään ratkaista ensin funktio $g(x)$. Yhtälö tulee muotoon $g'(x) = a\sqrt{1 + g(x)^2}$, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\frac{g'(x)}{\sqrt{1 + g(x)^2}} = a.$$

Tämä näyttää hankalalta, mutta vasen puoli voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(g(x) + \sqrt{1 + g(x)^2}\,)\right), \quad \text{(tarkista derivoimalla!)}$$

jolloin voimme integroida yhtälön molemmat puolet välillä $[0, x]$ ja saamme

$$\ln(g(x) + \sqrt{1 + g(x)^2}\,) - \ln(g(0) + \sqrt{1 + g(0)^2}\,) = ax.$$

Käyttämällä tietoja $g(0) = f'(0) = 0$ (koordinaatiston valinta!) ja $\ln 1 = 0$ yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned} &\ln(g(x) + \sqrt{1 + g(x)^2}\,) = ax \\ &\quad\Leftrightarrow g(x) + \sqrt{1 + g(x)^2} = e^{ax} \\ &\quad\quad\Leftrightarrow \sqrt{1 + g(x)^2} = e^{ax} - g(x). \end{aligned}$$

Korottamalla neliöön ja ratkaisemalla $g(x)$ saadaan

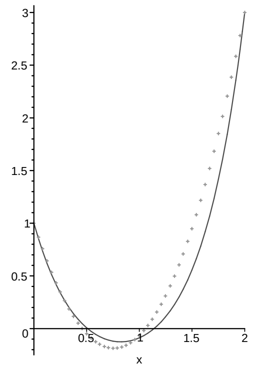
$$f'(x) = g(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}),$$

joten integroimalla vielä kerran saadaan lopullinen tulos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\int (e^{ax} - e^{-ax})\,dx \\ &= \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax}) + C = \frac{1}{a}\cosh(ax) + C. \end{aligned}$$

Tässä esiintyvä funktio $\cosh t$, hyperbolinen kosini, määritellään kaavalla $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

Yleisessä tapauksessa ratkaisukäyrä on muotoa $y = \frac{1}{a}\cosh(a(x - x_0)) + C$, ja siinä esiintyvät kolme vakiota a, x_0, C määräytyvät kirjoituksen alussa esillä olleista ehdoista 1. ja 2. Käytännössä ehtoja täytyy käsitellä numeerisesti, ja esimerkiksi tapauksessa $f(0) = 1, f(2) = 3, \ell = 5$ saadaan vakioille arvot $a \approx 2{,}4$, $x_0 \approx 0{,}82$ ja $c \approx -0{,}54$.



Kuviossa yhtenäinen viiva kuvaa katenaaria ja pisteviiva puolestaan paraabelia $y = 2{,}07x^2 - 3{,}14x + 1$, joka toteuttaa samat kolme ehtoa (likimäärin).

Miksei paraabeli käy?

Paraabeli ja katenaari eivät siis ole samoja käyriä. Miksi köysi kuitenkin näyttää ainakin likimääräisesti paraabelilta?

Syy liittyy eksponenttifunktion sarjakehitelmään. Eksponenttifunktiolle on voimassa arvio

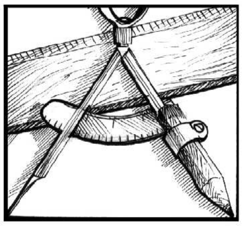
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \text{korjaustermi} \approx 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

joka on voimassa sitä tarkemmin, mitä pienempi on $|x|$. Sijoittamalla muuttujan paikalle $-x$ saadaan $e^{-x} \approx 1 + (-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 = 1 - x + \frac{1}{2}x^2$, joten hyperboliselle kosinille saadaan approksimaatio

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ &\approx \frac{1}{2}(1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2}) = 1 + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa sitä, että katenaari näyttää paraabelilta sitä tarkemmin, mitä lähempänä huippua ollaan. Kauempana huipusta ero katenaarin ja paraabelin välillä tulee kuitenkin selvemmäksi.

Paraabeli on kuitenkin köysiongelman ratkaisu siinä tapauksessa, että köysi kannattaa kuormaa, josta syntyy vaakasuorassa suunnassa tasainen painojakauma. Tällainen tilanne voi syntyä esimerkiksi riippusiltojen rakenteissa, koska siltaa kannattavien vaijerien massa on mitätön itse sillan massaan verrattuna. Tässä mielessä Galilei ei ehkä sittenkään ollut aivan väärässä!



Suorat, käyrät ja kaarevuus

Jukka Tuomela
Professori
Matematiikan laitos, Joensuun yliopisto

Suora?

Tämä kirjoitus on eräänlainen jatko Timo Tossavaisen suoran määritelmää koskevaan kirjoitukseen Solmun numerossa 2/2002. Tossavainen oli löytänyt monia erilaisia yrityksiä selittää suoran syvintä olemusta. Ehkäpä eräs syy suoran määrittelemisen vaikeuteen on ollut ajatus, että on vain yksi ”oikea” tapa määritellä suora. Historiallisesti tämä on ymmärrettävää: pitkäänhän pidettiin selvänä, että Eukleideen geometria kuvaa tarkasti fysikaalista avaruutta, joten tuntui kenties luonnolliselta, että pitäisi olla olemassa yksikäsitteinen ”fysikaalisesti” oikea määritelmä.

Kun sitten 1800-luvulla keksittiin/löydettiin ”vaihtoehtoisia” geometrioita,[1] niin luonnollisesti suoran käsite näissä eri geometrioissa oli erilainen, eivätkä suorien ominaisuudet aina vastanneet tavallisen intuition odotuksia. Tämä on nykyisin tuttua matemaatikoille, jotka ovat tottuneet määrittelemään asioita aksiomien avulla. On kuitenkin vahinko, jos kouluissa tai tietosanakirjoissa ei voida ymmärrettävästi selittää mikä on suora.

Lähestyn seuraavassa asiaa differentiaalilaskennan avulla. Kirjoituksen loppuun olen kerännyt muutamia lisäselityksiä tietyistä asioista. Nämä kuitenkin vain täydentävät tekstiä, eivätkä ole välttämättömiä kirjoituksen yleisidean ymmärtämisen kannalta.

Kirjoituksen toisessa osassa sitten katsotaan mihin päädytään, kun tarkastellaan suoria ”kaarevissa” (epäeuklidisissa) avaruuksissa.

Hilbert ja Eukleides

Selvitetään aluksi muutama asia, jotka voivat aiheuttaa sekaannusta. Eukleideen kirjan [3] alussa on *määritelmiä* (definitions), *oletuksia* (postulates) ja *aksiomia* (axioms). Tämä jako on jossain mielessä mielivaltainen eikä aina vastaa nykyistä kielenkäyttöä. Esimerkiksi määritelmässä 12 todetaan, että jos kulma on pienempi kuin suora kulma, niin sitä sanotaan teräväksi kulmaksi. Kyseessä on siis vain erään termin käyttöönotto. Suoraa kuvaillaan 4. määritelmässä [3, s. 3]:[2]

[1] Tosin Desargues ennakoi projektiivisen geometrian tuloa jo 1600-luvulla:
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Desargues.html
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Desargues.html

[2] Verkosta löytyy erilaisia versioita Eukleideen kirjasta:

(m) *A straight line is that which lies evenly between its extreme points.*[3]

Mutta tämä ”määritelmä” on itse asiassa turha: tähän ei koskaan vedota myöhemmin kirjassa. Toisin sanoen sen voisi poistaa tarpeettomana.[4] Todellinen suoran määritelmä on esitetty oletuksissa [3, s. 5]:

(e1) *Let it be granted,*
1. That a straight line may be drawn from any one point to any other point.

Kriittinen lukija huomaa, että tässä oikeastaan puhutaan janasta. Eukleideen aikaan ei käsitelty äärettömän pitkiä suoria, vaan jokaisella suoralla/janalla oli alku- ja loppupiste (tämä käy ilmi jo määritelmästä (m)). Suoria/janoja pystyttiin kuitenkin jatkamaan mielivaltaisen pitkiksi. Tästä piti huolen toinen oletus:

(e2) *[Let it be granted,]*
2. That a terminated straight line may be produced to any length in a straight line.

Näihin sitten vedotaan kun myöhemmin todistetaan lauseita.

Hilbertin kuvaus Eukleideen geometriasta lähtee siitä, että taso on eräs joukko, pisteet ovat tämän joukon alkioita ja suorat tämän joukon eräitä osajoukkoja. Tämän jälkeen Hilbert antaa listan aksiomia, jotka pisteet, suorat ja taso toteuttavat. Hyvä (= luettava) esitys tästä lähestymistavasta löytyy Hartshornen kirjasta [1]. Eräs Hilbertin aksiomista on [1, s. 66]:

(h) *For any two distinct points A, B, there exists a unique line l containing A, B.*

Voitaisiin siis sanoa, että (e1) (tai (e1) ja (e2) yhdessä) vastaa määritelmää (h). Koska (m) on tarpeeton, ei Hilbertin tarvitse yrittääkään sel(v)ittää mitä se tarkoittaa.

Luonnollisesti Hilbert ei pyrkinytkään suurelle yleisölle tarkoitettuun esitykseen, vaan tavoitteena oli esittää Eukleideen geometria siten, että otetaan vain ne aksiomat jotka ovat todella välttämättömiä, ja lisäksi pyritään osoittamaan, että aksiomat eivät johda ristiriitaan. Toisaalta, jos otetaan vain osa Hilbertin aksiomista, niin saadaan Eukleideen geometriasta poikkeavia geometrioita, esimerkiksi *äärellisiä geometrioita*, joissa ”tasossa” on vain äärellinen määrä pisteitä. Myös tätä on selvitetty edellä mainitussa Hartshornen kirjassa.

Vaikka Hilbertin aksiomaattinen lähestymistapa geometriaan oli omalla tavallaan tärkeä, niin asiaa voisi lähestyä toisinkin. Lähtökohtana on, ettei tarvitse yrittää löytää määritelmää, jonka Eukleides periaatteessa olisi voinut keksiä, vaan voidaan vapaasti käyttää mitä tahansa sopivia työkaluja. Toisin sanoen yritetään *mallittaa* intuitiivisia käsitteitä piste, suora ja taso jollain tavalla, eikä murehdita (ainakaan liikaa!) sitä vastaako tämä Eukleideen geometriaa vai ei. Tämä lienee järkevää myös matematiikan opetuksen kannalta.

Lukija voi esimerkiksi todeta, että Eukleideen toisen kirjan 7. lause todistaa, että

$$(a+b)^2 + b^2 = a^2 + 2(a+b)b$$

Myös monet 5. luvun lauseet ovat helppoja kun ne ensin algebrallistaa, mutta jo geometrisen muotoilun ymmärtäminen (saati sitten pitkän todistuksen läpikahlaaminen) on vaivalloista.

Katsotaan seuraavassa mihin päädytään, kun otetaan differentiaalilaskenta käyttöön.

Piste, käyrä ja taso

Joukko-opista ei pääse mihinkään: taso on jokin joukko, ja pisteet kyseisen joukon alkioita. Ensin siis pitää päättää, mikä on se joukko missä pisteet asustavat, eli missä joukossa kaikki toiminta tapahtuu. Valitaan perusavaruudeksi *karteesinen taso* $\mathbb{R}^2$. Jokainen piste voidaan siis esittää kahden *koordinaatin* avulla: merkitään $p = (p_x, p_y)$. Määritellään seuraavaksi yleinen käyrän käsite, ja tämän jälkeen pyritään määrittelemään suora käyränä, jolla on tiettyjä erikoisominaisuuksia. Asetetaan:

Käyrä on (sileä) kuvaus $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Siis ”hetkellä” t ollaan pisteessä $c(t) = \big(c_1(t), c_2(t)\big)$, ja sileys tarkoittaa, että koordinaattifunktiot c_1 ja c_2 ovat riittävän monta kertaa jatkuvasti derivoituvia.[5] Tämähän on oleellisesti Tossavaisen siteeraama Neovius-Nevanlinnan määritelmä:

http://thales.vismath.org/euclid/vee/
http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/byrne.html
http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/java/elements/elements.html

[3] Vanhoissa englanninkielisissä geometrian kirjoissa ”line” tarkoitti käyrää (nykyisin ”curve”). Suora/jana oli sitten ”straight line”.

[4] Muistelen, että on kiistelty siitä, onko tämä määritelmä todella Eukleideelta, vai onko se lisätty siihen myöhemmin.

[5] Luonnollisesti usein riittää vaikkapa yksi jatkuva derivaatta, mutta tämän kirjoituksen kannalta ei ole oleellista ruveta laskemaan kuinka monta jatkuvaa derivaattaa tarvitaan.

> Liikkeessä olevan pisteen muodostamaa uraa sanotaan viivaksi.[6]

Luonnollisesti usein käyrää ajatellaan kyseisen kuvauksen kuvajoukkona eli ”kuvauksen muodostamana urana”, mutta nykyisin on tapana määritellä käyrä nimenomaan kuvauksena. Kuvauksen määrittelyjoukko voi myös olla jokin sopiva reaaliakselin osajoukko, esimerkiksi väli $[0,1]$. Huomattakoon, että Eukleideen geometrian tai Hilbertin systeemin yhteydessä ei voida puhua yleisen käyrän käsitteestä.

Nyt voidaankin jo antaa ensimmäinen suoran määritelmä

(i) *Olkoon annettu kaksi tason pistettä p ja q. Näitten kautta kulkeva suora on*

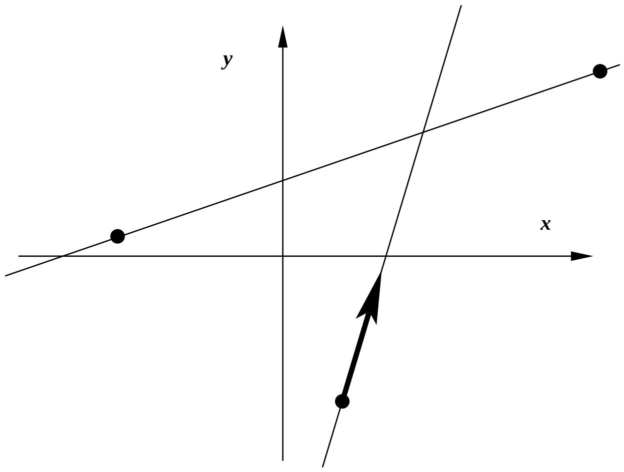
$$c(t) = (1-t)p + t\,q$$

Siis kahden mielivaltaisen pisteen kautta voidaan ”piirtää” suora.

(ii) *Olkoon annettu tason piste p ja vektori v. Pisteen p kautta kulkeva vektorin v suuntainen suora on*

$$c(t) = p + t\,v$$

Siis annetusta pisteestä voidaan ”piirtää” suora mielivaltaiseen suuntaan.



Kuva 1. Suora voidaan määritellä joko kahden pisteen tai pisteen ja suunnan avulla.

Selvästi molemmat versiot määrittelevät saman kuvausjoukon. Erona on vain, mikä ”data” kiinnittää yhden kuvauksen tässä joukossa. Määritelmä (i) on luonteeltaan reuna-arvotehtävä: on annettu kaksi pistettä, ja halutaan suora näiden välille. Määritelmä (ii) on taas alkuarvotehtävä: on annettu alkupiste ja alkusuunta. Eukleideen muotoilu (e1) ei ole selkeästi kumpikaan näistä.

Nyt voitaisiin jana määritellä suorana, jonka määrittelyjoukko olisi jokin suljettu väli $[a,b]$. Jatkossa en kuitenkaan jää pohtimaan, olisiko jossain kohtaa ”jana” parempi termi kuin ”suora”, vaan käytän vain sanaa suora.

Määritelmissä (i) ja (ii) identifioidaan tavalliseen tapaan tarpeen mukaan pisteet ja vektorit.[7] Selvästi siis määritelmä ei ole Eukleideen geometrian hengen mukainen, vaan tässä vedotaan vektorien yhteenlaskuun ja skalaarilla kertomiseen, siis vektoriavaruuden rakenteeseen.

Huomattakoon, että Neovius-Nevanlinnan määritelmä

> suoraksi sanotaan semmoista viivaa, joka ei muuta asemaansa pyöriessään siten, että sen kaksi pistettä pysyy paikallaan

vetoaa myös vektorilaskentaan: tässähän suora on avaruuden kierron (siis lineaarikuvauksen) pyörähdysakseli (kuvauksen invariantti aliavaruus)! Tarkempi muotoilu löytyy Lemmasta 1.

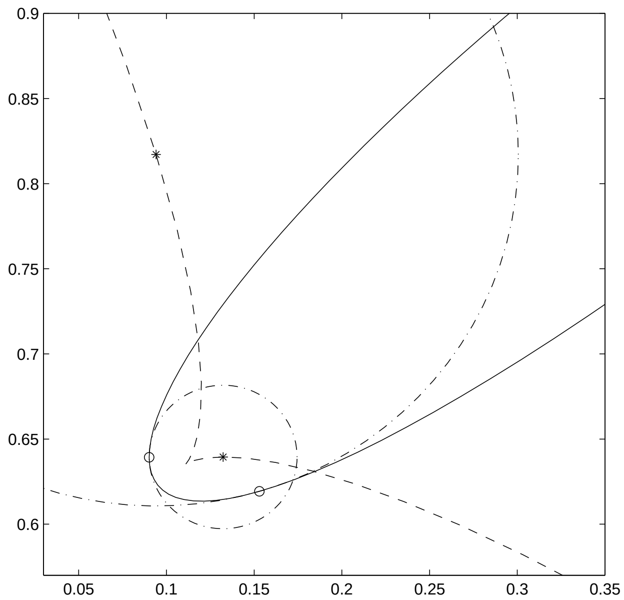
Määritelmät (i) ja (ii) yleistyvät sellaisenaan useampiulotteisiin avaruuksiin: $\mathbb{R}^2$ vain korvataan avaruudella $\mathbb{R}^n$. Suorat voidaan kuitenkin karakterisoida toisellakin tavalla. Tätä karakterisointia voidaan käyttää paljon muissakin tapauksissa kuin avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Suorin tie

Jos kaksi käyrää/polkua lähtee pisteestä p, niin miten voidaan sanoa kumpi niistä on ”suorempi”? Jotta tähän voisi vastata, pitäisi voida mitata käyrän kaareutumista jollain tavalla. Tähän on (ainakin) kaksi erilaista lähestymistapaa. Ensinnäkin ympyrä kaareutuu sitä ”jyrkemmin” mitä pienempi sen säde on. Voitaisiin siis annetun käyrän tietyn pisteen ympäristössä etsiä sellainen ympyrä, joka ”mahdollisimman tarkasti” yhtyisi kyseiseen käyrään. Näin saatua ympyrää kutsutaan oskuloivaksi ympyräksi, joka Spivakin [2, s. 7] mukaan tarkoittaa suutelevaa ympyrää, katso Lemma 3. Suutelevan ympyrän säde puolestaan antaa sitten tietoa käyrän kaareutumisesta.

[6] Ennen käytettiin sanaa viiva eikä käyrä.

[7] Jätän lukijan pohdittavaksi, olisiko tämän ”kaksoistulkinnan” eliminoiminen opetuksen kannalta toivottavaa, järkevää tai mahdollista.



Kuva 2. Eräs käyrä ja sen kaksi suutelevaa ympyrää. Katkoviivalla on merkitty suutelevien ympyröitten keskipisteitten muodostamaa käyrää eli *evoluuttaa*.

Toinen tapa on tarkastella tangenttivektorin suunnan muuttumista. Molemmat johtavat samaan lopputulokseen; seurataan tässä jälkimmäistä strategiaa. Tarvitaan siis tangentin käsitettä. Jos käyrää ajatellaan Neovius–Nevanlinnan mukaisesti liikkeessä olevana pisteenä, niin tangentti(vektori) on silloin pisteen nopeus(vektori). Tämä antaa aiheen uskoa, että käyrän tangentti voidaan määritellä derivaatan avulla. Tässä tarvitaan kuitenkin sileyden lisäksi seuraava oletus:

Käyrä on säännöllinen, jos $c'(t) \neq 0$ kaikilla t. Tällöin $c'(t)$ on käyrän tangentti(vektori)[8] *pisteessä $c(t)$.*

Palautetaan tässä välissä mieliin muutamia merkintöjä. Kahden vektorin $u = (u_1, u_2)$ ja $v = (v_1, v_2)$ pistetulo on

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

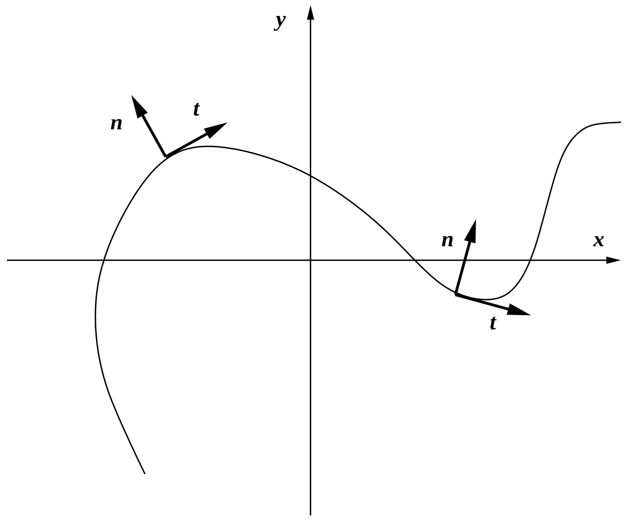
Muistetaan edelleen, että vektorit ovat kohtisuorassa (ortogonaalisia), jos niitten välinen pistetulo on nolla. Vektorin $v = (v_1, v_2)$ pituus on $|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Seuraava tekninen oletus on usein hyödyllinen:

Käyrä on parametrisoitu kaarenpituudella, jos $|c'(s)| = 1$ kaikilla s.

Voidaan osoittaa, ettei tämä rajoita yleisyyttä: kaikki säännölliset käyrät voidaan parametrisoida uudelleen siten, että ne toteuttavat ylläolevan ehdon, katso Lemma 2. Merkitään edelleen $\mathbf{t}(s) = c'(s)$: tämä on siis käyrän (yksikkö)tangentti. Käyrän (yksikkö)normaaliksi valitaan

$$\mathbf{n}(s) = \big(-c_2'(s), c_1'(s) \big)$$

Nyt on sekä tangentti että normaali normalisoitu: $|\mathbf{t}(s)| = |\mathbf{n}(s)| = 1$ kaikilla s. Tangentti ja normaali muodostavat ortonormaalin koordinaatiston, joka liikkuu käyrän mukana: tällaista liikkuvaa koordinaatistoa sanotaan joskus *kehykseksi* (engl. frame tai moving frame).



Kuva 3. Käyrän mukana liikkuva koordinaatisto eli kehys.

Tavoitteena on siis tarkastella tangentin suunnan muutoksia, ja sitä kautta mitata käyrän kaareutumista. Koska derivaatta kuvaa muutosta, niin derivoidaan yhtälö $|\mathbf{t}(s)|^2 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1$ puolittain:

$$\tfrac{d}{ds}\, \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = 2\,\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$$

Koska $\mathbf{t}'(s)$ ja $\mathbf{t}(s)$ ovat kohtisuorassa, niin vektorin $\mathbf{t}'(s)$ täytyy olla normaalin suuntainen. On siis olemassa jokin funktio κ siten, että

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

Yllä määriteltyä funktiota κ sanotaan käyrän c kaarevuudeksi.

Harjoitustehtäväksi lukijalle jätän sen osoittamisen, että $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s)$. Huomaa, että kaarevuus voi olla sekä positiivinen että negatiivinen. Merkki kuvaa sitä kääntyykö käyrä vasemmalle vai oikealle. Laskemalla pituudet saadaan

$$|c''(s)| = |\mathbf{t}'(s)| = |\kappa(s)\mathbf{n}(s)| = |\kappa(s)||\mathbf{n}(s)| = |\kappa(s)|$$

[8] Luonnollisesti tangentista puhuttiin jo kauan ennen differentiaalilaskennan keksimistä, joten tässä voisi pohtia, onko vektorin $c'(t)$ kutsuminen tangentiksi määritelmä vai lause.

Käyrän kaarevuus määriteltiin käyttämällä tason koordinaatteja. Lopputulos on kuitenkin riippumaton koordinaateista siinä mielessä, että tason siirrot ja kierrot[9] eivät muuta kaarevuutta. Toiseenkin suuntaan voidaan mennä: jos on annettu jokin funktio κ, alkupiste p (siirto), alkusuunta v (kierto), niin tätä vastaa yksikäsitteinen (kaarenpituudella parametrisoitu) käyrä, jonka kaarevuus on κ.

Joka tapauksessa nyt voidaan määritellä:

(iii) *Suora on käyrä, jonka kaarevuus on nolla.*

Antaako tämä saman suorajoukon kuin määritelmät (i) ja (ii)? Yhtälön (7) mukaan

$$|\kappa(s)| = \sqrt{c_1''(s)^2 + c_2''(s)^2} = 0 \;\Rightarrow\; c_1''(s) = c_2''(s) = 0$$

Saatiin siis kaksi lineaarista toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä. Näitten ratkaisut saadaan integroimalla yhtälöitä $c_i''(s) = 0$ kaksi kertaa:

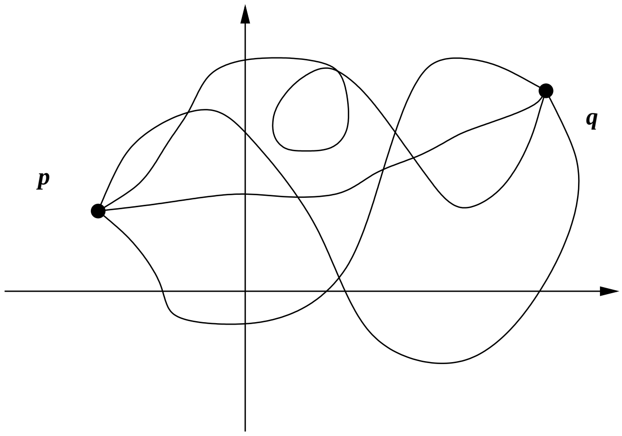
$$c_1(s) = a_1 + b_1 s \quad \text{ja} \quad c_2(s) = a_2 + b_2 s$$

Tässä a_i ja b_i ovat mielivaltaisia vakioita. Merkitsemällä $a = (a_1, a_2)$ ja $b = (b_1, b_2)$ voidaan ratkaisu esittää vektorimuodossa $c(s) = a + bs$. Ratkaisu on siis samaa muotoa kuin määritelmässä (ii), joten on luonnollista kiinnittää jokin tietty ratkaisu valitsemalla alkupiste a ja alkusuunta b.

Aivan samoin voidaan tutkia käyriä myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$: tässäkin tapauksessa kaarevuuden häviämisestä seuraa, että käyrä onkin suora. Suorat voidaan kuitenkin määritellä vielä eräällä tavalla.

Lyhin tie

Olkoon annettu kaksi tason pistettä p ja q. Selvästi on äärettömän monta polkua pisteestä p pisteeseen q, toisin sanoen käyrää, jonka alkupiste on p ja loppupiste on q.



Kuva 4. Polkuja pisteestä p pisteeseen q.

Rajoitutaan seuraavassa yksinkertaisuuden vuoksi käyriin, jotka voidaan esittää yhtälönä $y = f(x)$, siis käyriin jotka ovat muotoa $c(t) = \big(t, f(t)\big)$. Olkoon edelleen $p = (a, y_0)$ ja $q = (b, y_1)$, missä $a < b$. Merkitään edelleen V_{pq}:llä kaikkien välillä $[a, b]$ määriteltyjen sileitten funktioitten joukkoa, joille pätee $f(a) = y_0$ ja $f(b) = y_1$.

Halutaan löytää lyhin polku p:n ja q:n välillä. Olkoon $f \in V_{pq}$; tällöin siis

$$c(a) = (a, f(a)) = (a, y_0) = p$$

ja

$$c(b) = (b, f(b)) = (b, y_1) = q$$

Käyrän pituus saadaan kaavalla

$$J(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx, \quad J : V_{pq} \to \mathbb{R}$$

Huomaa, että J on kuvaus funktiojoukolta V_{pq} reaaliluvuille; tässä mielessä f on joukon V_{pq} "piste". Halutaan löytää f jolla J saa minimiarvon. Differentiaalilaskennasta tiedämme, että kun tutkitaan maksimija minimitehtäviä, niin kannattaa etsiä derivaatan nollakohdat. Kirjoituksen lopussa on tarkemmin johdettu tämä, mutta lopputuloksena on, että

$$\frac{dJ}{df} = 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0$$

Merkintä $\frac{dJ}{df}$ ei ole standardi, vaan on tarkoitettu ilmaisemaan sitä, että tässä todellakin on kyse tavallisen derivoinnin yleistyksestä.[10]

Joka tapauksessa lopputulos on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Yllä jo nähtiin, että yhtälön $f''(x) = 0$ ratkaisut ovat muotoa $f(x) = d_1 + d_2 x$, missä d_1

[9] siis tason isometriat.

[10] Kriittinen lukija muistaa, että derivaatan nollakohta voi antaa myös maksimeja ja satulapisteitä. Ääriarvon laatu saadaan selville vasta kun tarkastellaan toista derivaattaa.

ja d_2 ovat vakioita. Vakiot kiinnittyvät reunaehtojen $f(a) = y_0$ ja $f(b) = y_1$ avulla. Pienen laskun jälkeen saamme siis vastaukseksi, että lyhin polku pisteitten p ja q välillä voidaan esittää yhtälönä

$$y = \frac{y_1 - y_0}{b-a}x + \frac{by_0 - ay_1}{b-a}$$

Siis jälleen päädyttiin suoriin, joten saamme uuden määritelmän:

(iv) *Suora on lyhin polku kahden pisteen välillä.*

Tossavainen lainasi tietosanakirja-artikkelia vuodelta 1910, jonka kirjoittaja, Uno Saxén, väitti, että

> Epätyydyttävä on esim. määritelmä: suora on kahden pisteen lyhin väli, koska suoran mittaaminen edellyttää, että käsite suora on edeltäpäin selvitetty.

Tässä Saxén kuitenkin on hakoteillä: oleellista on, että *käyrän* ja käyrän pituuden käsite on selvitetty. Tämän jälkeen sitten *määritellään* suora lyhimpänä käyränä/polkuna.

Alustava tilinpäätös

Olemme nähneet, että ainakin tasossa, ja myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$, suorimmat polut ja lyhimmät polut ovat samoja, eli lyhyesti suoria. Kaikki määritelmät (i) – (iv) johtavat siis oleellisesti samaan lopputulokseen. Tilanne ei kuitenkaan ole enää niin yksinkertainen, kun (tasainen) Eukleideen geometria yleistetään (kaarevaksi) *Riemannin geometriaksi*. Tällöin määritelmät (i) ja (ii) eivät enää ole mielekkäitä, mutta määritelmät (iii) ja (iv) ovat edelleen käyttökelpoisia. Kirjoituksen toisessa osassa perehdytään hiukan Riemannin geometriaan, ja pohditaan ovatko (iii) ja (iv) edelleen ekvivalentteja.

Muutamia lisähuomioita

Käyriä ja matriiseja

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ kierrot voidaan esittää ortogonaalisten matriisien avulla. Kaikille ortogonaalisille matriiseille pätee: $|\det(A)| = 1$.

Lemma 1. Olkoon A ortogonaalinen 3×3–matriisi ja olkoon $\det(A) = 1$. Tällöin sillä on ominaisarvo $\lambda = 1$.

Ominaisarvoa $\lambda = 1$ vastaavaa ominaisavaruutta voidaan kutsua A:n pyörähdysakseliksi. Tämä ominaisavaruus on siis Neovius-Nevanlinnan määritelmän mukainen suora.

Todistus. Tämän jätän harjoitustehtäväksi. Tarvittavat asiat löytyvät mistä tahansa matriisilaskun oppikirjasta. □

Lemma 2. Jokainen säänöllinen käyrä voidaan parametrisoida kaarenpituudella.

Todistus. Olkoon $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ säännöllinen. Olkoon edelleen

$$g(t) = \int_a^t |c'(u)|du$$

ja merkitään $g(b) = L$. Siis g on kuvaus $[a, b] \to [0, L]$. Edelleen g on bijektio, koska $g'(t) = |c'(t)| > 0$. Siis on olemassa käänteiskuvaus g^{-1}. Asetetaan $\tilde{c} = c \circ g^{-1}$. Nyt on helppo tarkistaa, että $|\tilde{c}'(t)| = 1$ kaikilla t. □

Kuvausta g^{-1} ei useinkaan tunneta eksplisiittisesti, mutta osoittautuu, ettei sitä tarvitakaan: riittää tieto, että se on olemassa.

Lemma 3. Olkoon c kaarenpituudella parametrisoitu käyrä ja $p = c(s_0)$. Käyrän suuteleva ympyrä tässä pisteessä p on

$$y(t) = a + r\big(\cos(t/r), \sin(t/r)\big)$$

missä $y(t_0) = p$, $r = 1/|\kappa(s_0)|$ ja

$$a = p + \tfrac{1}{|\kappa(s_0)|}\mathbf{n}(s_0)$$

Käyrän suutelevien ympyröitten keskipisteistä muodostuu uusi käyrä, alkuperäisen käyrän *evoluutta*.

Todistus. Tarkastellaan yhtälöitä

$$\begin{aligned} c(s_0) &= p = y(t_0) \\ c'(s_0) &= y'(t_0) \\ c''(s_0) &= y''(t_0) \end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö antaa:

$$\begin{aligned} y''(t_0) &= -\tfrac{1}{r}\big(\cos(t_0/r), \sin(t_0/r)\big) \\ &= -\tfrac{1}{r^2}\big(y(t_0) - a\big) \\ &= \tfrac{1}{r^2}\big(a - p\big) = c''(s_0) \end{aligned}$$

Koska $r = |a - p|$, niin tästä jo saadaan, että $r = 1/|c''(s_0)| = 1/|\kappa(s_0)|$. Pitää vielä laskea a. Toista yhtälöä ei ole vielä käytetty:

$$\big(c_1'(s_0), c_2'(s_0)\big) = \big(-\sin(t_0/r), \cos(t_0/r)\big)$$

Tämän avulla siis

$$\begin{aligned} a &= p - r\big(\cos(t_0/r), \sin(t_0/r)\big) \\ &= p + r\big(-c_2'(s_0), c_1'(s_0)\big) \\ &= p + \tfrac{1}{|\kappa(s_0)|}\mathbf{n}(s_0) \end{aligned}$$

□

Hiukan variaatiolaskua

Olkoon V kaikkien välillä $[a,b]$ määriteltyjen sileitten funktioitten joukko ja asetetaan

$$V_{pq} = \{f \in V \mid f(a) = y_0 \text{ ja } f(b) = y_1\}$$

ja

$$V_0 = \{f \in V \mid f(a) = f(b) = 0\}$$

Etsitään sellaista funktiota $f \in V_{pq}$, jolla seuraava kuvaus $J : V_{pq} \to \mathbb{R}$ saavuttaa minimiarvon:

$$J(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Lasketaan J:n suunnattu derivaatta. Olkoon $g(s) = f(t) + s\,h(t)$, missä $f \in V_{pq}$ ja $h \in V_0$. g on siis kuvaus $g : \mathbb{R} \to V_{pq}$, ja pikainen vilkaisu suoran määritelmään (ii) osoittaa, että g on suora avaruudessa V_{pq} (ja myös avaruudessa V, koska V_{pq} on avaruuden V osajoukko). Kiinnitetään "piste" f ja "suunta" h, ja olkoon

$$J_f(s) = (J \circ g)(s) = J(f + sh)$$

Tällöin siis $J_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jos f minimoi J:n, niin J_f:llä on minimi, kun $s = 0$. Tällöin pitää päteä $J'_f(0) = 0$. Lasketaan tämä derivaatta.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{ds}J(f+sh)\\
&= \tfrac{d}{ds}\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2+2sf'(x)h'(x)+s^2h'(x)^2}dx\\
&= \int_a^b \frac{f'(x)h'(x)+sh'(x)^2}{\sqrt{1+f'(x)^2+2sf'(x)h'(x)+s^2h'(x)^2}}dx
\end{aligned}$$

mistä edelleen osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned}
J'_f(0) &= \int_a^b \frac{f'(x)h'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}dx\\
&= \Big/_a^b \frac{f'(x)h(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} - \int_a^b \frac{f''(x)h(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}dx\\
&= -\int_a^b \frac{f''(x)h(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}dx
\end{aligned}$$

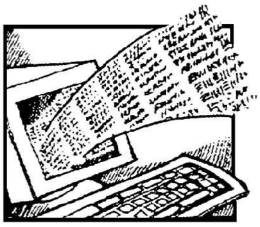
Nyt pitää olla voimassa, että $J'_f(0) = 0$ kaikilla $h \in V_0$, mikä on mahdollista vain, jos $f''(x) = 0$. Tätä toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä kutsutaan tehtävän Eulerin (tai Eulerin ja Lagrangen) yhtälöksi. Tässä tapauksessa ratkaisut ovat siis suoria, kuten aiemmin on jo nähty.

Viitteet

[1] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[2] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry, vol 2, 2nd ed.*, Publish or Perish, 1979.

[3] I. Todhunter (ed.), *The elements of Euclid*, J. M. Dent & Sons Ltd, London, 1862, uusi painos: Everyman's Library, Dutton, New York, 1933.



Matemaattisia tietojenkäsittelytehtäviä

Solmun tämänkertaiset tehtävät ovat matemaattisia tietojenkäsittelytehtäviä. Lähetä ratkaisusi vuoden 2003 loppuun mennessä Solmun toimitukseen joko sähköpostitse (`toimitus@solmu.math.helsinki.fi`) tai kirjeenä osoitteeseen

Solmun toimitus
Matematiikan laitos
PL 4
00014 Helsingin yliopisto.

Parhaat ratkaisuehdotukset julkaistaan vuoden 2004 ensimmäisessä numerossa.

1. Koira ui joen yli kohti kouluttajaansa, joka seisoo vastakkaisella rannalla. Mallinna ja tulosta ruudulla arvioitu koiran kulku joessa. Seuraavien reaalilukuparametrien tulee olla syötettävissä näppäimistöltä:

a) Joen leveys metreinä.

b) Kouluttajan etäisyys (metreinä) koiran lähtöpisteestä projisoituna joen vastarannalle. (Etäisyys on positiivinen, jos se on joen virtaaman suuntainen, ja muuten negatiivinen.)

c) Koiran vakionopeus (m/s).

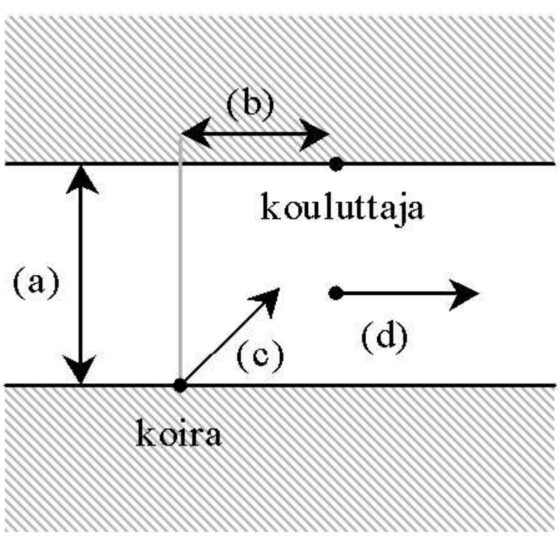
d) Joen virtauksen vakionopeus (m/s).

e) Arvion tarkkuus, eli sen aikavälin pituus (sekunteina), jonka aikana kuljetun matkan ohjelmasi voi korvata janalla.

Kahta joenrantaa voi pitää samansuuntaisina suorina. Mallinnuksen tulee loppua, kun koira on saavuttanut vastarannan metrin tarkkuudella.

Koiran liike riippuu sen suunnasta, sen nopeudesta ja joen virtauksen nopeudesta. Muista, että nämä ovat vakionopeuksia. Liikkeen suntaa ja koiran nopeuden x- ja y-komponentteja (riippuen sen suunnasta) voi pitää vakioina vain annetun aikavälin sisällä.

Piirrä joen sivut samansuuntaisina suorina, koiran ja kouluttajan lähtöasemat sekä koiran reitti.



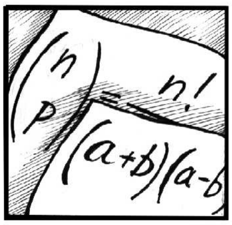
2. Binomikertoimet voidaan järjestää tavallisesta Pascalin kolmiosta oheisen kuvan osoittamalla tavalla. Lukuunottamatta kunkin rivin uloimpia alkioita jokainen luku on summa sen suoraan ja vasemmalla yläpuolella olevista luvuista.

1					$N = 6$	
1	*1*					
1	*2*	*1*				
1	*3*	*3*	*1*			
1	*4*	*6*	*4*	*1*		
1	*5*	*10*	*10*	*5*	*1*	
1	*6*	*15*	*20*	*15*	*6*	*1*

Tee Excel-taulukko, joka näyttää ensimmäiset $N+1$ riviä tällä tavalla järjestetystä Pascalin kolmiosta. N:n arvo ($1 \leqslant N \leqslant 20$) syötetään ensimmäisen rivin seitsemänteen sarakkeeseen. Taulukon tulee aina sisältää tasan $N+1$ riviä.

3. Funktio Kertoma$(N) = N!$ kasvaa hyvin nopeasti. Vaikka $5! = 120$, niin jo luvun $10! = 3628800$ tallentamiseen tarvitaan 4-tavuinen kokonaisluku. Tietokone ei voi tallentaa lukua 100! 4- tai edes 8-tavuisena kokonaislukuna. Kuitenkin tiedetään, että jokainen luonnollinen luku voidaan hajottaa alkutekijöihin. Esimerkiksi $5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ ja $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Tee ohjelma, joka lukee luvun $N (1 \leqslant N \leqslant 10000)$ näppäimistöltä ja tulostaa sen kertoman $N!$ alkutekijähajotelman.

Lähde: *KöMaL*, Volume 1, Number 1, December 2002, 66–69.
Käännös, kuva ja ladonta: ***Timo Metsälä***



Oktoniot, Fanon taso ja Kirkmanin koulutyttöongelma

Jorma Merikoski
Professori
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto

Johdanto

Kirjoitin viitteessä [5], että koska laajennuksessa kompleksilukujen joukosta $\mathbb{C}$ kvaternioiden joukkoon $\mathbb{H}$ menetetään kertolaskun vaihdantalaki, niin kvaternioilla ei ole kovin suurta merkitystä. Tällä en suinkaan vähätellyt kvaternioita (päinvastoin totesin niiden kiinnostavuuden), vaan lähinnä vertasin niiden merkitystä kompleksilukujen merkitykseen.

Kirjoitin myös, ettei lukukäsitettä kannata laajentaa $\mathbb{H}$:sta eteenpäin, sillä seuraavassa laajennuksessa, jolloin täytyy operoida $\mathbb{R}^8$:ssa, menetetään kertolaskun liitäntälakikin. Koska pidin tätä laajennusta mielenkiinnottomana, en viitsinyt mainita uusien lukujen nimeä. Ne ovat *oktonioita* ja niiden joukkoa merkitään $\mathbb{O}$:lla.

(Englanninkielisen sanan *octonion* sujuvampi käännös olisi *oktoni*. Tällöin olisi johdonmukaista kääntää *quaternion* sanaksi *kvaterni*, mutta ”kvaternio” on suomenkielessä melko vakiintunut. Siksi puhun kvaternioista ja oktonioista, vaikka mielestäni olisi parempi puhua kvaterneista ja oktoneista.)

Sittemmin saatuani käsiini Baezin erinomaisen artikkelin [1] huomasin olleeni liian pessimistinen. Oktonioilla voidaan nimittäin osoittaa monia sellaisia matematiikan sisäisiä yhteyksiä, joita olisi muulla tavalla vaikea selittää. Minun täytyy kylläkin myöntää, etten ajan, kärsivällisyyden ja oppineisuuden puutteen takia ymmärtänyt läheskään kaikkea, mitä Baez kirjoittaa. Kuitenkin katson ymmärtäneeni sen verran, että voin erittäin alkeellisesti tarkastella oktonioita ja ikään kuin jatkaa kirjoitustani [5] käsittelemällä laajennusta $\mathbb{H} \to \mathbb{O}$.

Oktoniot

Merkitsemme ”skalaareja” (eli tässä reaalilukuja) pienillä kreikkalaisilla kirjaimilla ja ”vektoreita” (eli tässä kompleksilukuja, kvaternioita ja oktonioita) pienillä latinalaisilla kirjaimilla. Merkitsemme 1:llä paitsi reaalilukua 1 myös sellaista vektoria, jonka ensimmäinen koordinaatti $= 1$ ja muut $= 0$.

Tarkastelemme vektoriavaruutta $\mathbb{R}^8$ (joka koostuu 8-alkioisista reaalilukujonoista). Määrittelemme *perusoktonioiden* $1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$, $e_1 = (0,1,0,0,0,0,0,0)$, $e_2 = (0,0,1,0,0,0,0,0)$, $\ldots$, $e_7 = (0,0,0,0,0,0,0,1)$ joukossa E kertolaskun seuraavalla taulukolla.

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Esimerkiksi $e_3 e_5 = e_2$. Tämä taulukko saattaa vaikuttaa kovin sekavalta, mutta säännönmukaisuuksia löytyy.

- *Neliöt* $e_1^2 = e_2^2 = \cdots = e_7^2 = -1$.
- *Vastavaihdannaisuus*[1] $e_r e_s = -e_s e_r \quad (r \neq s)$.
- *Indeksien kasvattaminen yhdellä* $e_r e_s = e_t \Rightarrow e_{r+1} e_{s+1} = e_{t+1}$.
- *Indeksien kaksinkertaistaminen* $e_r e_s = e_t \Rightarrow e_{2r} e_{2s} = e_{2t}$.

Kasvattamisessa ja kaksinkertaistamisessa käsittelemme indeksejä modulo 7; siis $e_8 = e_1$, $e_9 = e_2$ jne.

Määrittelemme yleisesti *oktonioiden* $(\xi_0, \ldots, \xi_7) = \xi_0 + \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_7 e_7$ ja $(\eta_0, \ldots, \eta_7) = \eta_0 + \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_7 e_7$ tulon vaatimalla, että skalaaritekijän siirtosääntö ja osittelulait ovat voimassa. (Osittelulakeja on kaksi, koska kertolasku ei ole vaihdannainen.) Toisin sanoen vaadimme, että tulo on *bilineaarinen* eli että se on *lineaarinen* (määritelmä, ks. esim. [8]) kummankin tekijän suhteen. Esimerkiksi

$$
\begin{aligned}
&(e_1 + 3e_2)(2e_5 - 4e_7) \\
&\quad = e_1(2e_5) - e_1(4e_7) + (3e_2)(2e_5) - (3e_2)(4e_7) \\
&\quad = 2e_1e_5 - 4e_1e_7 + 6e_2e_5 - 12e_2e_7 \\
&\quad = 2e_6 - 4(-e_3) + 6(-e_3) - 12(-e_6) \\
&\quad = 2e_6 + 4e_3 - 6e_3 + 12e_6 = 14e_6 - 2e_3.
\end{aligned}
$$

E ja $\mathbb{Z}_2^3$

Vektoriavaruudessa $\mathbb{Z}_2^3$ (missä $\mathbb{Z}_2$ tarkoittaa jäännösluokkien modulo 2 joukkoa, ks. esim. [6], [7]) on kahdeksan alkiota. (Vektoriavaruuden määritelmä, ks. esim. [8].) Tämän vektoriavaruuden *skalaarikunta* ei ole $\mathbb{R}$ vaan $\mathbb{Z}_2$. (Kunnan määritelmä, ks. esim. [9].) Yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään tavanomaisesti, mutta käytetään $\mathbb{Z}_2$:n yhteen- ja kertolaskua.

Myös perusoktonioita on kahdeksan, joten voimme asettaa ne vastaamaan $\mathbb{Z}_2^3$:n pisteitä. Teemme sen *bijektiolla* (määritelmä ks. esim. [6]) $f\colon E \to \mathbb{Z}_2^3$:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= (0,0,0), & f(e_1) &= (0,1,1), \\
f(e_2) &= (1,1,0), & f(e_3) &= (1,0,0), \\
f(e_4) &= (1,0,1), & f(e_5) &= (0,1,0), \\
f(e_6) &= (0,0,1), & f(e_7) &= (1,1,1).
\end{aligned}
$$

Määrittelemme joukossa E yhteenlaskun $\oplus$ laskemalla yhteen vastaavat $\mathbb{Z}_2^3$:n vektorit ja katsomalla, mitä perusoktoniota saatu summa vastaa. Toisin sanoen

$$e_r \oplus e_s = f^{-1}\big(f(e_r) + f(e_s)\big).$$

Esimerkiksi $e_2 \oplus e_4 = e_1$, koska vektorien $f(e_2) = (1,1,0)$ ja $f(e_4) = (1,0,1)$ summa $(0,1,1) = f(e_1)$. Kaikkiaan saamme taulukon

$\oplus$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	1	e_4	e_7	e_2	e_6	e_5	e_3
e_2	e_2	e_4	1	e_5	e_1	e_3	e_7	e_6
e_3	e_3	e_7	e_5	1	e_6	e_2	e_4	e_1
e_4	e_4	e_2	e_1	e_6	1	e_7	e_3	e_5
e_5	e_5	e_6	e_3	e_2	e_7	1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	e_7	e_4	e_3	e_1	1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	e_1	e_5	e_4	e_2	1

Tämä taulukko muistuttaa kiinnostavalla tavalla perusoktonioiden kertolaskutaulukkoa, josta se saadaan poistamalla miinusmerkit.

Määrittelemme joukossa E skalaarilla (eli $\mathbb{Z}_2$:n alkiolla) kertomisen niin, että skalaarilla 0 kertomalla saadaan E:n "nolla-alkio" 1, ja skalaarilla 1 kertomalla saadaan alkio itse. Näin E:stä tulee vektoriavaruus.

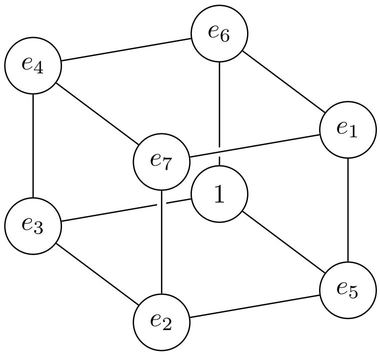
Laajennus $\mathbb{H} \to \mathbb{O}$

Jos yleisessä vektoriavaruudessa V määritellään bilineaarinen kertolasku, jolla on ykkösalkio (eli on olemassa sellainen $e \in V$, että kaikilla $x \in V$ on $xe = ex = x$), niin saatu struktuuri on nimeltään *algebra*. (Tämä nimitys ei ole hyvä, koska sanalla "algebra" tarkoitetaan myös tiettyä matematiikan alaa.)

Esimerkiksi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ja $\mathbb{O}$ ovat kukin vektoriavaruuksia, joiden skalaarikunnaksi voidaan ottaa $\mathbb{R}$. Näistä jokaisesta saadaan algebra, kun kertolasku määritellään tavanomaisesti. Myös samandimensioiset neliömatriisit muodostavat algebran, kun niiden laskutoimitukset (ks. esim. [8]) määritellään tavanomaisesti. Jos vektoriavaruuden V osajoukko on vektoriavaruus, niin se on V:n *aliavaruus*. Jos algebran V osajoukko on algebra, niin se on V:n *alialgebra*. Esimerkiksi $\mathbb{R}$ on $\mathbb{C}$:n alialgebra, kun samastamme reaaliluvun ξ ja kompleksiluvun $(\xi, 0)$. Edelleen $\mathbb{C}$ on $\mathbb{H}$:n alialgebra, kun samastamme kompleksiluvun (ξ, η) ja kvaternion $(\xi, \eta, 0, 0)$.

[1] Sanan "antikommutatiivisuus" omatekoinen käännös aidolle suomenkielelle.

Miten sitten saamme $\mathbb{H}$:n $\mathbb{O}$:n alialgebraksi? Ehkä houkuttelisi samastaa kvaternio $(\xi, \eta, \zeta, \omega)$ ja oktonio $(\xi, \eta, \zeta, \omega, 0, 0, 0, 0)$, mutta tuollaiset oktoniot eivät muodosta $\mathbb{O}$:n alialgebraa. Esimerkiksi e_2 ja e_3 ovat tätä muotoa, mutta niiden tulo $e_2e_3 = e_5$ ei ole. Meidän täytyy siis menetellä toisin.



Tarkastelemme joukkoa $\mathbb{Z}_2^3$ koordinaatistossa, johon sijoitamme myös perusoktoniot kohdassa määritellyn funktion f mukaisesti. Merkitsemme $e = (\alpha, \beta, \gamma)$ tarkoittamaan sitä, että $f(e) = (\alpha, \beta, \gamma)$. (Perustelemme tätä merkintää myöhemmin.) ”Pohjatason” $\{1, e_2, e_3, e_5\}$ oktonioiden *virittämä* $\mathbb{O}$:n alialgebra $\mathbb{O}_1$ koostuu oktonioista $\xi + \eta e_2 + \zeta e_3 + \omega e_5 = (\xi, 0, \eta, \zeta, 0, \omega, 0, 0)$, missä ξ, η, ζ ja ω saavat kaikki reaaliarvot. On helppo nähdä, että $\mathbb{O}_1$ todellakin on $\mathbb{O}$:n alialgebra.

Samastamme kvaternion $(\xi, \eta, \zeta, \omega)$ ja oktonion $(\xi, 0, \eta, \zeta, 0, \omega, 0, 0)$. Täsmällisesti sanottuna muodostamme *isomorfismin* (eli *struktruurin säilyttävän bijektion*) $\phi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{O}_1\colon \phi(\xi, \eta, \zeta, \omega) = (\xi, 0, \eta, \zeta, 0, \omega, 0, 0)$. Tällöin $\phi(x+y) = \phi(x)+\phi(y)$ ja $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{H}$ sekä $\phi(1_{\mathbb{H}}) = 1_{\mathbb{O}_1}$, missä $1_{\mathbb{H}} = (1, 0, 0, 0)$ ja $1_{\mathbb{O}_1} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Sanomme, että algebrat $\mathbb{H}$ ja $\mathbb{O}_1$ ovat keskenään *isomorfisia*. Ne voidaan samastaa, koska niillä on sama rakenne ja ainoa ero on merkinnöissä.

Kvaternioiden algebra $\mathbb{H}$ voidaan siis laajentaa oktonioiden algebraksi $\mathbb{O}$.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ ja $\mathbb{Z}_2^3$

Merkitsemme kuten edellä $e = (\alpha, \beta, \gamma)$ tarkoittamaan, että $f(e) = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Vektoriavaruuden $\mathbb{Z}_2^3$ aliavaruudet ovat nollaulotteinen $\{(0, 0, 0)\} = \{1\}$, yksiulotteiset $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\} = \{1, e_3\}$ ja kuusi muuta, kaksiulotteiset $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\} = \{1, e_2, e_3, e_5\}$ ja kuusi muuta sekä kolmiulotteinen $\mathbb{Z}_2^3 = E$.

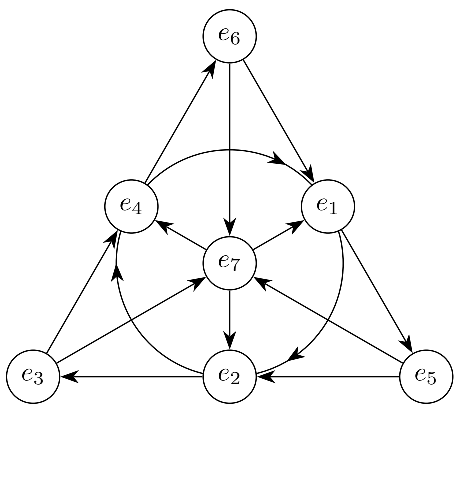
Oikeastaan kaikkien näiden samuuksien sijasta pitäisi aluksi puhua isomorfisuuksista. Nimittäin $\mathbb{Z}_2^3$:n alkiot ovat jonoja (α, β, γ), missä $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$, kun taas E:n alkiot ovat jonoja $(\alpha_0, \ldots, \alpha_7)$, missä yksi $\alpha_k = 1$ ja muut ovat nollia. Mutta koska E ja $\mathbb{Z}_2^3$ ovat isomorfisia (f on isomorfismi), niin ne voidaan samastaa. Isomorfisuus tarkoittaa tässä, että $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$ ja $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ kaikilla $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$.

Vektoriavaruuden $\mathbb{Z}_2^3$ aliavaruuksien virittämät $\mathbb{O}$:n alialgebrat vastaavat algebroja $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ja $\mathbb{O}$. Näimme edellä, että ”tason” $\{1, e_2, e_3, e_5\}$ virittämä $\mathbb{O}$:n alialgebra on isomorfinen $\mathbb{H}$:n kanssa. Sama koskee (perustele) $\mathbb{Z}_2^3$:n muiden ”origon kautta kulkevien tasojen” virittämiä $\mathbb{O}$:n alialgebroja. Vastaavasti on helppo huomata (miten?), että $\mathbb{Z}_2^3$:n jokaisen ”origon kautta kulkevan suoran” (esimerkiksi $\{1, e_3\}$) virittämä $\mathbb{O}$:n alialgebra on isomorfinen $\mathbb{C}$:n kanssa ja että $\mathbb{Z}_2^3$:n ”origon” (tai origosta koostuvan 0-ulotteisen aliavaruuden $\{1\}$) virittämä $\mathbb{O}$:n alialgebra on isomorfinen $\mathbb{R}$:n kanssa. ”Koko $\mathbb{Z}_2^3$:n” virittämä alialgebra on tietenkin koko $\mathbb{O}$.

Olemme käsitelleet struktuureja $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ja $\mathbb{O}$ reaalikertoimisina (eli skalaarikunnan $\mathbb{R}$ omaavina) algebroina, jolloin $\mathbb{R}$ on yksi-, $\mathbb{C}$ kaksi-, $\mathbb{H}$ neli- ja $\mathbb{O}$ kahdeksanulotteinen. Näkökulmamme on ”lineaarialgebrallinen” sikäli, että lähtökohtamme oli vektoriavaruus. ”Algebrallisesta näkökulmasta” $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ovat *kuntia* sekä $\mathbb{H}$ on *vinokunta*. (Nämä käsitteet, ks. esim. [9].)

Fanon[1] taso

Olemme tulkinneet perusoktoniot vektoriavaruuden $\mathbb{Z}_2^3$ alkioina eli geometrisesti kolmiulotteisen 0-1-avaruuden pisteinä. Tarkastelemme nyt perusoktonioiden $e_1, \ldots, e_7$ (emme siis ota mukaan perusoktoniota 1) toista geometrista tulkintaa. Esitämme nämä oktoniot tason pisteinä. Jos $e_re_s = e_t$, niin piirrämme nuolen pisteestä e_r pisteeseen e_s ja pisteestä e_s pisteeseen e_t. Näin saamme *Fanon tason.*



[1]Gino Fano (1871 – 1952), italialainen matemaatikko.

Se on yksinkertainen *äärellinen geometria*. Pisteitä on seitsemän, nimittäin $e_1, \ldots, e_7$. Myös suoria on seitsemän, kun määrittelemme, että kolme pistettä ovat samalla suoralla, jos ne voidaan varustaa indekseillä r, s ja t niin, että $e_r e_s = e_t$. Esimerkiksi e_2, e_3 ja e_5 ovat samalla suoralla, koska $e_5 e_2 = e_3$. Täten suorina ovat tasasivuisen kolmion kolme sivua, kolme korkeusjanaa ja sisään piirretty ympyrä. (Täsmällisemmin: Suorat koostuvat niistä E:n pisteistä, jotka ovat näillä.)

Mutta voimmeko kutsua ympyrää suoraksi? Voimme, koska on olemassa muitakin geometrioita kuin tavanomainen Eukleideen geometria, eikä niissä pisteiden ja suorien tarvitse olla mielikuviemme mukaisia. Kun geometria rakennetaan aksiomaattisesti, niin pisteet ja suorat ovat *perusolioita*, jotka jätetään määrittelemättä. Pisteiden joukon P ja suorien joukon L alkioiden välillä määritellään tietyt aksioomat toteuttava *insidenssirelaatio* I. Jos piste p ja suora l ovat keskenään tässä relaatiossa eli jos $p\,I\,l$, niin sanotaan havainnollisesti, että "piste p on suoralla l" tai "suora l kulkee pisteen p kautta". (Relaation yleinen määritelmä, ks. esim. [6].) Insidenssirelaation aksioomat ovat

(i_1) Kaikilla $p \in P$ on sellaiset $l, m \in L$ ($l \neq m$), että $p\,I\,l$ ja $p\,I\,m$. (Jokaisen pisteen kautta kulkee ainakin kaksi suoraa.)

(i_2) Kaikilla $l \in L$ on sellaiset $p, q \in P$ ($p \neq q$), että $p\,I\,l$ ja $q\,I\,l$. (Jokaisella suoralla on ainakin kaksi pistettä.)

(i_3) Kaikilla $p, q \in P$ ($p \neq q$) on täsmälleen yksi sellainen $l \in L$, että $p\,I\,l$ ja $q\,I\,l$. (Jokaisen kahden pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora.)

Fanon taso toteuttaa selvästi nämä aksioomat.

Projektiivinen taso

Jos insidenssiaksioomassa (i_1) "piste" muutetaan "suoraksi" ja päinvastoin, niin saadaan (i_2). Siksi sanotaan, että nämä aksioomat ovat keskenään *duaalisia*. Geometria noudattaa *duaalisuusperiaatetta*, jos sen jokaista aksioomaa vastaa duaalinen aksiooma. Aksioomilla (i_1), (i_2) ja (i_3) saadussa geometriassa tämä periaate ei ole voimassa, koska (i_3):lla ei ole duaalista aksioomaa.

Eukleideen tasogeometria ei noudata duaalisuusperiaatetta. Jokaisen kahden pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora. Sen sijaan kahdella suoralla on täsmälleen yksi yhteinen piste, jos ja vain jos suorat ovat erisuuntaisia. Yhdensuntaisilla suorilla ei ole yhtään yhteistä pistettä. Duaalisuusperiaatetta noudattavassa geometriassa ei siis saa olla yhdensuuntaisia suoria. Asia voidaan korjata lisäämällä jokaiseen suoraan *äärettömyyspiste* eli "ideaalipiste" niin, että kahdella suoralla on sama äärettömyyspiste, jos ja vain jos suorat ovat yhdensuuntaisia. Yhdensuuntaiset suorat siis leikkaavat toisensa äärettömyyspisteessään. Lisätään myös *äärettömyyssuora* eli "ideaalisuora", jonka muodostavat kaikki äärettömyyspisteet. Näin (i_3) pysyy voimassa, ja myös sen duaalinen aksiooma on voimassa. Tästä lähtökohdasta saadaan tavanomainen *projektiivinen tasogeometria* (tarkemmin ks. esim. [10]).

Myös äärellisiä projektiivisia geometrioita voidaan tutkia (tarkemmin ks. esim. [4]). Olkoon $n \geq 2$. Olkoot P ja L sellaisia joukkoja, joissa on $n^2 + n + 1$ alkiota. Kertaluvun n *(äärellinen) projektiivinen taso* saadaan, kun insidenssirelaation I määrittelevät aksioomat

(i'_1) Kaikilla $p \in P$ on täsmälleen $n + 1$ sellaista alkiota $l \in L$, että $p\,I\,l$. (Jokaisen pisteen kautta kulkee täsmälleen $n + 1$ suoraa.)

(i'_2) Kaikilla $l \in L$ on täsmälleen $n+1$ sellaista alkiota $p \in P$, että $p\,I\,l$. (Jokaisella suoralla on täsmälleen $n + 1$ pistettä.)

(i'_3) Kaikilla $p, q \in P$ ($p \neq q$) on täsmälleen yksi sellainen $l \in L$, että $p\,I\,l$ ja $q\,I\,l$. (Jokaisen kahden pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora.)

(i'_4) Kaikilla $l, m \in L$ ($l \neq m$) on täsmälleen yksi sellainen $p \in P$, että $p\,I\,l$ ja $p\,I\,m$. (Jokaisella kahdella suoralla on täsmälleen yksi yhteinen piste.)

Nämä aksioomat eivät ole *riippumattomia*, sillä osa seuraa muista (mitkä ja miten?). Ne voitaisiin poistaa aksioomista ja esittää *teoreemoina* eli *lauseina*. Symmetriasyistä emme kuitenkaan tee niin.

Fanon taso on 2. kertaluvun projektiivinen taso. Jos n on alkuluvun potenssi, niin on olemassa n. kertaluvun projektiivinen taso. Esitämme tämän todistamisen periaatteen.

Olkoon K äärellinen kunta, jossa on n alkiota. Tarkastelemme vektoriavaruutta K^3. Muodostamme geometrian, jonka pisteinä ovat K^3:n origon kautta kulkevat suorat (eli 1-ulotteiset aliavaruudet) ja suorina origon kautta kulkevat tasot (eli 2-ulotteiset aliavaruudet). Piste on suoralla, jos vastaava 1-ulotteinen aliavaruus sisältyy vastaavaan 2-ulotteiseen aliavaruuteen. Ensimmäinen kuvio havainnollistaa tätä tapauksessa $n = 2$.

(Kuvio saattaa antaa aiheen ihmetellä esimerkiksi sitä, miksi e_1:n virittämä $\mathbb{Z}_2^3$:n suora $\{1, e_1\}$ sisältyy e_2:n ja e_4:n virittämään $\mathbb{Z}_2^3$:n tasoon. Tämän tason muodostavat lineaarikombinaatiot $0e_2 \oplus 0e_4 = 1 \oplus 1 = 1$, $0e_2 \oplus 1e_4 = 1 \oplus e_4 = e_4$, $1e_2 \oplus 0e_4 = e_2 \oplus 1 = e_2$ ja $1e_2 \oplus 1e_4 = e_2 \oplus e_4 = e_1$, joten taso on $\{1, e_1, e_2, e_4\}$. Vektoriavaruuden $\mathbb{Z}_2^3$ kaikki tasot eivät siis vastaa geometrista mielikuvaamme tasosta.)

Osoittautuu, että näin saadaan projektiivinen taso. Täten ongelma palautuu kysymykseen äärellisen kunnan alkioiden lukumäärästä. Voidaan todistaa (ks. esim. [3]), että on olemassa n-alkioinen äärellinen kunta, jos (ja vain jos) n on alkuluvun potenssi.

Käänteinen ongelma (eli ovatko kaikkien projektiivisten tasojen kertaluvut alkuluvun potensseja) on avoin.

Steinerin[1] kolmikot. Kirkmanin[2] kolmikot

Fanon taso on pienin *Steinerin kolmikko.* Tietyt Steinerin kolmikot ovat *Kirkmanin kolmikoita.* Alunperin aioin käsitellä näitä molempia kolmikoita, jolloin tie oktonioista *Kirkmanin koulutyttöongelmaan* olisi kuljettu alusta loppuun. Tämän ongelman taas halusin mukaan, jotta saisin otsikkoon "seksiä" lukijoiden houkuttelemiseksi. Tosin "seksiaddikti" pettyy sikäli, että kysymyksessä on täysin kunniallinen kombinatorinen ongelma.

Koska kirjoituksestani alkoi tulla kohtuuttoman pitkä, niin muutin suunnitelmaani ja päätin vain mainita Steinerin ja Kirkmanin kolmikot. Niiden määritelmät, ks. esim. [4], [13].

Kirkmanin koulutyttöongelma

Kirkman julkaisi 1850 *Lady's and Gentleman's Diary* -lehdessä seuraavan ongelman.

> *Viisitoista koulutyttöä kävelee ulkona seitsemänä päivänä kolmittaisissa riveissä. Järjestettävä heidät niin, että jokainen on jokaisen kanssa samassa rivissä täsmälleen kerran.*

Hän oikeastaan vaati (näennäisesti lievemmin, mutta tosiasiassa yhtäpitävästi), ettei kukaan ole kenenkään kanssa useammin kuin kerran. Edelleen hän puhuessaan "koulutytöistä" oikeastaan käytti hieman erivahteista ilmaisua "young ladies of a school", mutta ennen pitkää se muuttui kirjallisuudessa muotoon "schoolgirls".

Kirkman oli opiskellut matematiikkaa yliopistossa muiden opintojensa ohella, mutta hän aloitti matematiikan tutkimisen vasta 40-vuotiaana. Vaikka hän oli tavallaan harrastelijamatemaatikko, hän teki hyvää tutkimusta (ks. [2] ja solmuteorian osalta myös [12]). Kuitenkin matematiikan "historiallisessa muistissa" Kirkmanin nimi taitaa esiintyä, jos lainkaan, niin "koulutyttöongelman" keksijänä. Biggs [2] (ks. myös [11]) kirjoittaa seuraavaa.

"On valitettavaa, että noin mitättömän jutun piti varjostaa niitä monia paljon merkittävämpiä kontribuutioita, joita sen kirjoittaja tuli tekemään matematiikkaan. Kuitenkin se on hänen pysyvin muistomerkkinsä."

Ongelman ratkaisu, ks. esim. [4], [13]. Cameron [4] panee tytöt pelaamaan jääkiekkoa!

Kirkman jatkoi matematiikan tutkimista ja harrastamista koko loppuelämänsä. Vielä 88-vuotiaana, pari kuukautta ennen kuolemaansa, hän lähetti tehtäviä ja ratkaisuja *Educational Times* -lehteen. Siinä on esikuvaa meille ikääntyville matemaatikoille! Monet matemaatikot ovat parhaimmillaan melko nuorina, mutta tekemistä riittää tällä alalla kaiken ikäisille.

Kiitokset

Kiitän Sirkka-Liisa Erikssonia, Markku Halmetojaa, Pentti Haukkasta, Markku Niemenmaata ja Timo Tossavaista heidän käsikirjoituksestani tekemistään huomautuksista tai muusta saamastani avusta.

Viitteet

[1] J. C. Baez, The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc. 39* (2002), 145 – 205.

[2] N. L. Biggs, T. P. Kirkman, Mathematician. *Bull. London Math. Soc. 13* (1981), 97 – 120.

[3] G. Birkhoff and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra.* 5th Ed. Macmillan, 1996.

[4] P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms.* Cambridge Univ. Press, 1994.

[5] J. Merikoski, Kompleksiluvuista ja kvaternioista. Solmu 3/2001.

[6] J. Merikoski, A. Virtanen ja P. Koivisto, Johdatus diskreettiin matematiikkaan. Kokeilumoniste. Tampereen yliopisto, matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, 2003.

[7] J. Merikoski, K. Väänänen ja T. Laurinolli, *Matematiikan taito 11: Lukuteoria ja logiikka.* Weilin+Göös, 1995.

[8] J. Merikoski, K. Väänänen, T. Laurinolli ja T. Sankilampi, *Matematiikan taito 15: Lineaarialgebra.* Weilin+Göös, 1998.

[1] Jakob Steiner (1796 – 1863), sveitsiläinen matemaatikko.
[2] Thomas Kirkman (1806 – 1895), englantilainen kirkkoherra.

[9] T. Metsänkylä ja M. Näätänen, *Algebra.* Limes ry, 2003.

[10] R. Nevanlinna, *Geometrian perusteet.* WSOY, 1973.

[11] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, Thomas Penyngton Kirkman. http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians

[12] A. Sossinsky, *Solmut. Erään matemaattisen teorian synty.* Suomeksi toimittanut Osmo Pekonen. Art House, 2002.

[13] E. Weisstein, Eric Weisstein's world of mathematics. Wolfram Research. http://www.mathworld.wolfram.com