1089 ja muita matemaattisia yllätyksiä

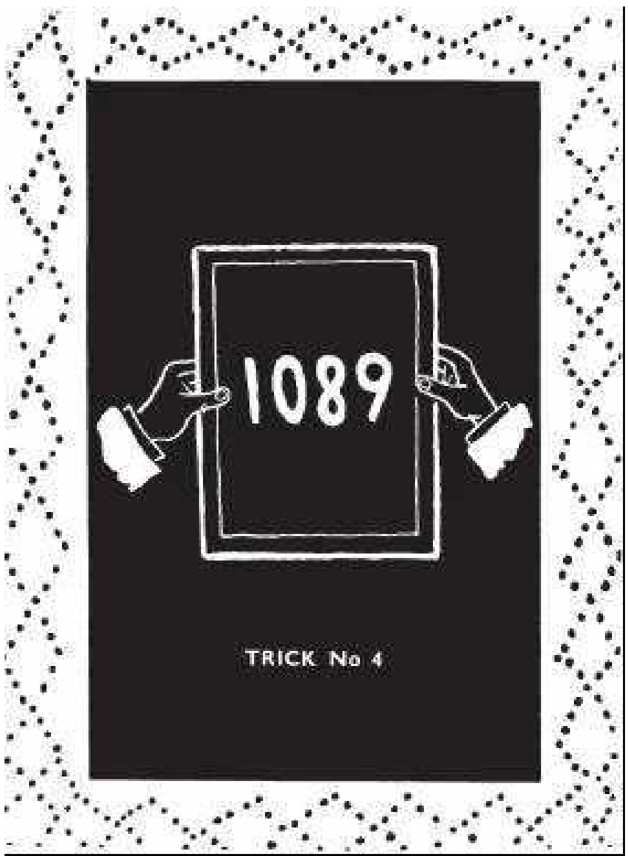
David Acheson
Matematiikan professori
Jesus College, Oxfordin yliopisto, Iso-Britannia

Miksi niin monet ihmiset sanovat inhoavansa matematiikkaa? Aivan liian usein totuus on, että heidät on pidetty loitolla todellisesta matematiikasta, ja uskon, että matemaatikot voisivat halutessaan ponnistella enemmän tuodakseen alansa pieniä ilonaiheita ja ajatuksenpoikasia suuren yleisön tietoisuuteen. Eräs tapa tehdä tämä olisi ehkä korostaa yllätyksellisyyttä, joka on usein läsnä matematiikassa parhaimmillaan. Kaikkihan pitävät iloisista yllätyksistä!

Numerotemppu

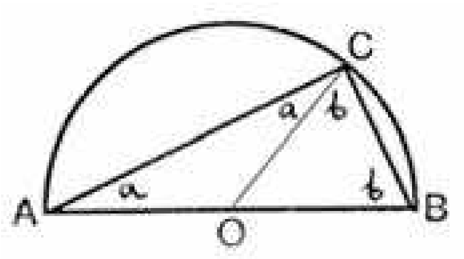
Koin ensimmäisen matemaattisen yllätykseni vuonna 1956, ollessani kymmenen vanha. Olin tuolloin innostunut taikatempuista, ja yhtenä päivänä löysin sattumalta "numerotempun" eräästä artikkelista nimeltä *Uncle Jack turns you into a Conjuror* (conjuror = taikuri).

Temppu tehdään näin: Ota mikä tahansa kolminumeroinen luku, jossa ensimmäisen ja viimeisen numeron erotus on vähintään kaksi. Käännä luku toisin päin, ja vähennä suuremmasta luvusta pienempi (esim. $782 - 287 = 495$). Käännä sitten saamasi erotus ja laske näin saatu luku yhteen kyseisen erotuksen kanssa ($594 + 495 = 1089$). Merkillistä tässä on se, että tulos on aina 1089 riippumatta alussa valitusta kolminumeroisesta luvusta. Tänä päivänä olen tietenkin selvillä siitä, että tämä 1089-temppu on matemaattisessa mielessä melko harmiton höyhensarjalainen. Mutta jos siihen sattuu törmäämään 10-vuotias miehenalku vuonna 1956, se saattaa kyllä panna sukat pyörimään jalassa.



Ällistyttävää geometriaa

Hiukan myöhemmin pääsi geometria yllättämään minut ensimmäistä kertaa. Eräänä päivänä meille kerrottiin koulussa, että jos AB on ympyrän halkaisija ja C on mikä tahansa ympyrän kehän piste, niin kulma ACB on suora. Muistelen, että tätä oli jokseenkin vaikea uskoa: minusta näytti siltä, että jos pistettä C siirrettäisiin ympyrän kehää pitkin, niin kulma ACB melko varmasti muuttuisi – erityisesti C:n lähestyessä B:tä. Sitten esitettiin kuitenkin todistus, että näin ei ole. Kas näin:



Piirrä ensin suora viiva pisteestä C ympyrän keskipisteeseen O. Tällöin $OA = OB = OC$. Näin ollen kolmio AOC on tasakylkinen, ja kuvassa a:lla merkityt kulmat ovat siis yhtäsuuret. Vastaavasti perustellaan b:llä merkittyjen kulmien yhtäsuuruus kolmiossa BOC. Koska kolmion ACB kulmien summa on 180°, niin $a + (a + b) + b = 180°$. Siis $a + b = 90°$, ja kulma ACB on täten suora. Yhä vieläkin tämä todistus on mielestäni yksi tehokkaimmista ja paljastavimmista koko matematiikassa.

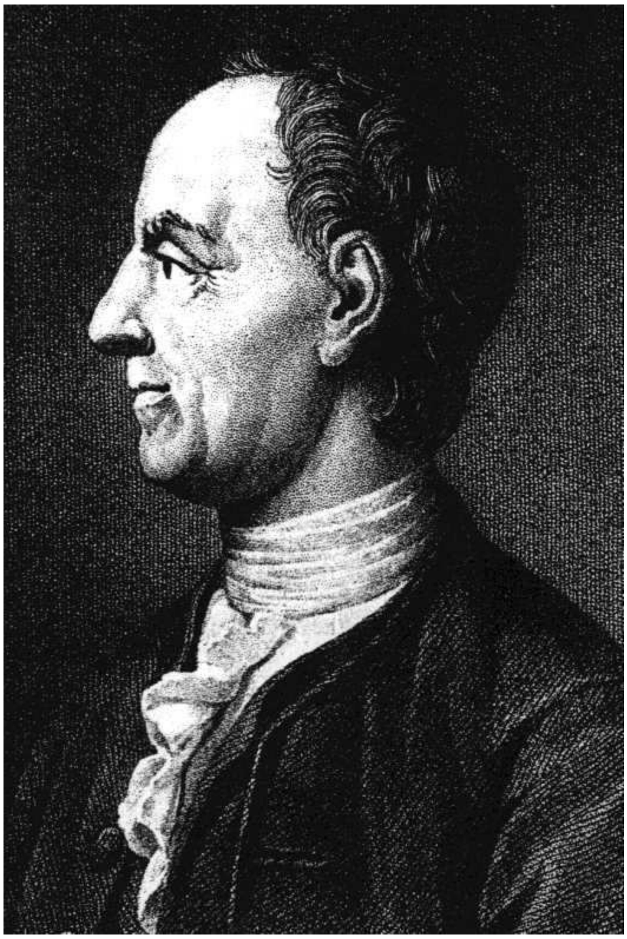
Suuria erehdyksiä

Koko todistamisen idea itsessään on ehkä yksi suurimmista hankaluuksista välitettäessä matematiikkaa laajemmalle yleisölle. Me matemaatikot saatamme helposti vaikuttaa tolkuttoman innostuneilta omasta alastamme, ja mielestäni meidän pitää olla valmiita selittämään muillekin, mikä siinä on niin tärkeää. Voisimme vaikkapa korostaa sitä, että todistusten puuttuessa matemaatikot saattavat mennä pahasti metsään, eivätkä parhaatkaan matemaatikot ole virheille immuuneja.

Euler esimerkiksi todisti vuonna 1753 Fermat'n viimeisen lauseen tapauksessa $n = 3$. Hän toisin sanoen osoitti, että yhtälölle

$$a^3 + b^3 = c^3$$

ei löydy kokonaislukuratkaisuja – siis kahden kuution summa ei voi olla kuutio. Hieman myöhemmin hän laajensi epäilyään koskemaan neljättä potenssia: yhtä lailla mahdotonta olisi, että kolmen neljännessä potenssissa olevan kokonaisluvun summa olisi neljännessä potenssissa. Ja vielä yleisemmin, hän arveli, että olisi mahdotonta laskea yhteen $m - 1$ kappaletta potenssiin m korotettuja kokonaislukuja siten, että summakin olisi m:nnessä potenssissa. Lähes kahteensataan vuoteen kukaan ei löytänyt mitään vikaa tästä väittämästä. Kukaan ei varsinaisesti osannut todistaa sitä, mutta vastaesimerkitkin loistivat poissaolollaan. Ja loppujen lopuksi, olihan kyseisen veikkauksen esittänyt erittäin arvovaltainen auktoriteetti.



Leonhard Euler (1707–83)

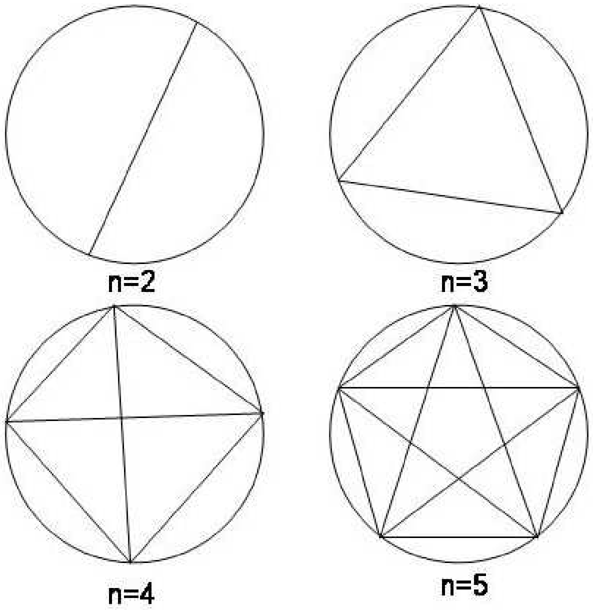
Sitten, vuonna 1966, *L.J. Lander* ja *T.R. Parkin* keksivät vastaesimerkin – neljä kappaletta 5:nnessä potenssissa olevia lukuja, joiden summa oli samassa potenssissa:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

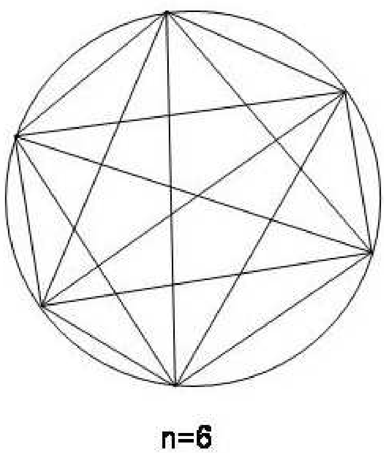
20 vuotta tämän jälkeen *N. Elkies* vuorostaan kumosi tapauksen $m = 4$:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4.$$

Yhden–kahden erikoistapauksen perusteella yleistäminen on matematiikassa tietenkin aina riskibisnestä. Eräs mielestäni osuvimmista esimerkeistä yleistämisen vaarallisuudesta liittyy näennäisen pieneen ja viattomaan geometriseen ongelmaan. Piirrä ympyrä, merkitse sen kehälle n pistettä ja yhdistä pisteet toisiinsa janoilla. Ne jakavat ympyrän osiin, ja kysymys kuuluukin: kuinka moneen? (Oletetaan että kussakin ympyrän sisäpisteessä leikkaa korkeintaan kaksi janaa.)

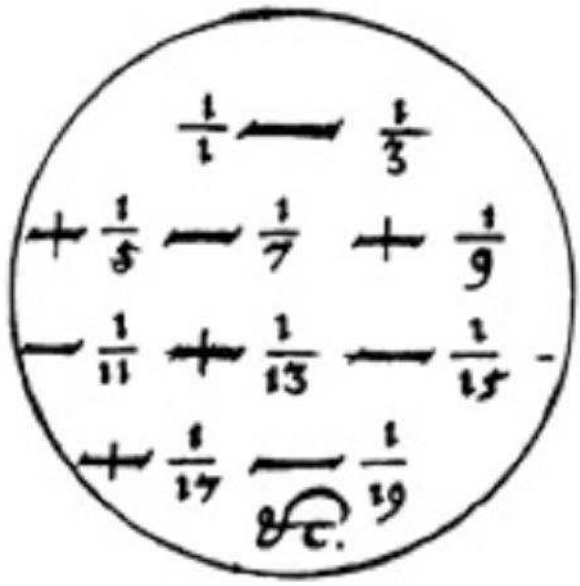


Muutamalla ensimmäisellä n:n arvolla – 2, 3, 4 ja 5 – alueiden lukumäärä käyttäytyy yksinkertaisen säännönmukaisesti: 2, 4, 8, 16. Ja ainakin omien kokemusteni mukaan tässä vaiheessa on mahdollista houkutella melkein kenet tahansa "päättelemään", että n:n arvolla 6 alueiden lukumäärä on 32. Näin ei kuitenkaan ole, vaan niitä on 31:



Yleinen kaava alueiden lukumäärälle ei siis ole $2^n - 1$, vaan

$$\frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}.$$



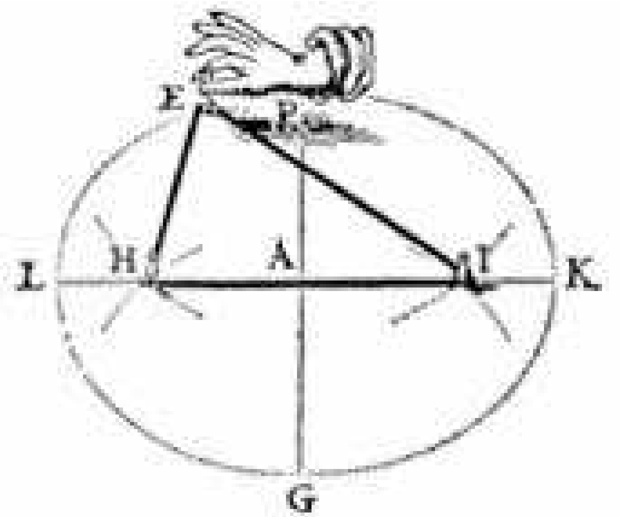
Kuvitusta Leibnizin artikkelista vuodelta 1674.

Yllättäviä yhteyksiä

Korkeammassa matematiikassa eräät suurimmista kummallisuuksista ilmenevät odottamattomina yhteyksinä eri osa-alueiden välillä. Opiskeltuamme jonkin verran esimerkiksi differentiaali- ja integraalilaskentaa törmäämme kuuluisaan Gregory–Leibniz -sarjaan

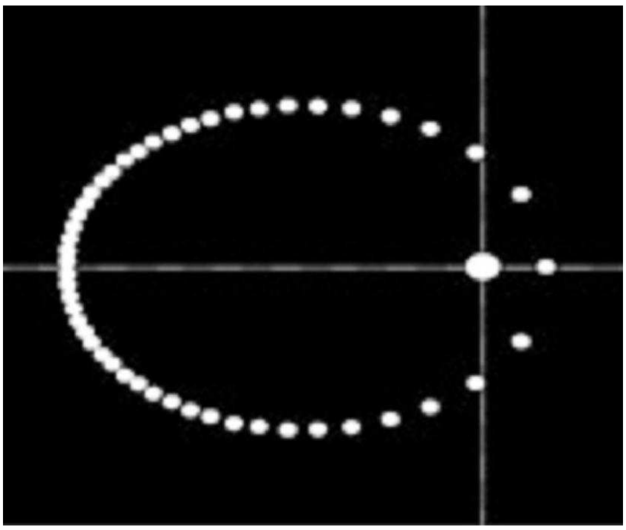
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Tarkkakaan todistus ei minun silmissäni paljoakaan vähennä sitä hämmästystä ja kummastusta, jonka tämä erikoislaatuinen tulos saa aikaan. Kun nimittäin tapaamme π:n ensimmäistä kertaa, se yhdistetään vain ympyröihin, enkä ole tähän mennessä tavannut ketään, joka osaisi yksinkertaisella tavalla selittää ympyröiden ja parittomien lukujen käänteislukujen välisen yhteyden.



Ellipsi van Schootenin teoksesta Exercitationum mathematicorum (1657).

Aina yllättävät yhteydet eivät kuitenkaan löydy matematiikasta itsestään, vaan matematiikan ja reaalimaailman väliltä. Esimerkiksi ellipsi on jo kreikkalaisten matemaatikoiden hyvin tuntema käyrä, joka voidaan konstruoida kuvan osoittamalla tavalla. Pisteitä H ja I kutsutaan polttopisteiksi.



Ensi silmäyksellä tämä saattaa näyttää "vain" geometrialta. Jätetään kuitenkin hetkeksi puhdas geometria ja ajatellaan esimerkiksi planeettaa (tai komeettaa) pistemäisenä massana, ja oletetaan, että sen ja jonkin kiinteän "auringon" välillä vaikuttaa etäisyyden neliölakia noudattava vetovoima. Ratkaistuamme asiaankuuluvat differentiaaliyhtälöt havaitsemme, että kaikkien suljettujen kiertoratojen täytyy olla ellipsejä, ja lisäksi aurinko on aina yhdessä polttopisteistä!

Melkein kuin intialainen köysitemppu

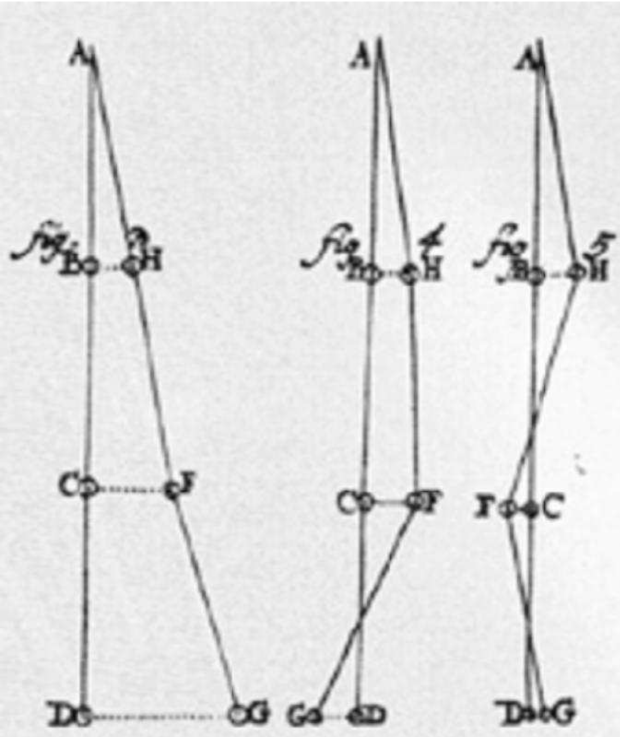
Koin elämäni luultavasti suurimman matemaattisen yllätyksen eräänä sateisena marraskuun iltapäivänä 1992, jolloin löysin itseni todistamasta omituista uutta teoreemaa. Yritin saada uutta vääntöä vanhaan dynamiikkaan liittyvään ongelmaan, jota ensimmäisenä oli tutkinut *Daniel Bernoulli* vuonna 1738. Hän oli tutkinut N:n toisiinsa yhdistetyn heilurin ketjua ja löytänyt N erilaista heilahtelutapaa. Alimmalla tasolla, taajuuden ollessa f_1, heilurit heilahtelevat yhdessä edestakaisin, melkein kuin muodostaen yhden pitkän heilurin. Korkeimmalla taajuustasolla f_N peräkkäiset heilurit heilahtelevat joka hetki vastakkaisiin suuntiin.

Daniel Bernoulli

Minun teoreemani osoitti, että N:n heilurin ketju voidaan kääntää ylösalaisin niin, että ne ovat horjuvat jotenkuten tasapainossa toinen toisensa päällä, ja sitten vakauttaa ne kyseisessä asennossa panemalla alimman heilurin tukipiste värähtelemään pystysuunnassa. Jos f_N^2 on paljon suurempi kuin f_1^2 (kuten yleensä on), tasapainoehdoiksi osoittautuvat

$$a < \frac{0.0114g}{f_N^2} \text{ ja } af_p > \frac{g}{2\sqrt{2}\pi^2 f_1},$$

missä a tarkoittaa tukipisteen värähtelysädettä, f_p tukipisteen värähtelytaajuutta ja g maan vetovoiman kiihtyvyyttä. Näin teoreema riippuu hyvin yksinkertaisella tavalla vain kahdesta luvusta f_1 ja f_N, jotka määräävät kuinka heilurit värähtelevät tukipisteen yläpuolella. Lopputuloksena on, että ”temppu” voidaan tehdä aina kun tukipiste saadaan värähtelemään pystysuunnassa niin, että värähtelysäde on tarpeeksi pieni ja taajuus riittävän korkea.



Heilurikolmikon kolme värähtelytapaa, Daniel Bernoullin alkuperäisestä artikkelista vuodelta 1738.

Pian sen jälkeen, kun aloimme kutsua aihetta koskevia esitelmiämme nimellä ”Melkein kuin intialainen köysitemppu”, huomasimme että sanomalehdet, radio ja televisio alkoivat kaikki kiinnostua asiasta, ja aiheesta on ollut minulle ja Tomille vuosien kuluessa paljon hupia. Jopa lontoolainen Magic Circle on hankkinut asiaa koskevat tieteelliset julkaisuni arkistoihinsa, mikä olisi varmasti hämmästyttänyt erästä 10-vuotiasta poikaa vuonna 1956. (Papereita säilytetään tietääkseni mapissa, jonka nimi on *Sundry Ephemera*, vap. suom. Kaikenlaista vessapaperia.)

Loppujen lopuksi ei kuitenkaan ole kovin oleellista, voidaanko jokin taikatemppu selittää matematiikan avulla vai ei. Merkitystä sen sijaan varmasti on sillä, missä määrin tämänkaltaiset yllättävät lopputulokset voivat saada suuren yleisön vakuuttuneeksi matematiikan taianomaisuudesta.

Lähde

David Acheson, *1089 and all that: A journey into mathematics*, Oxford University Press, 2002. (Erityisesti luku 15 antaa lisävalaistusta ”köysitemppuun”.)

Tämä artikkeli on lyhennelmä kirjoittajansa London Mathematical Societyn yleisöluennosta ”Mathematics, magic and the electric guitar”. Achesonin kirja *1089 and all that* on omaperäinen yritys tarjoilla matemaattisia herkkupaloja keskivertokansalaisille. Lisää tietoa aiheesta löytyy osoitteesta www.jesus.ox.ac.uk/∼dacheson.

Alkuperäisartikkeli: David Acheson, 1089 and all that: The elements of surprise in mathematics, *EMS Newsletter*, numero 49, syyskuu 2003, s. 9–11. Artikkelin kääntämiseen ja Solmussa julkaisuun on saatu lupa David Achesonilta ja EMS:n lehdeltä. Käännös ja ladonta: ***Anna Eteläaho***