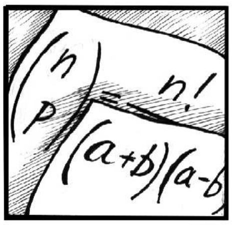

Solmun tehtäviä

Lähetä ratkaisusi Solmun tämänkertaisiin tehtäviin Solmun toimitukseen viimeistään kesän 2004 aikana joko sähköpostitse osoitteeseen

toimitus@solmu.math.helsinki.fi

tai kirjeenä osoitteeseen

Solmun toimitus
Matematiikan laitos
PL 4
00014 Helsingin yliopisto.

Parhaat ratkaisuehdotukset julkaistaan Solmun tulevissa numeroissa.

1. Kuusinumeroisesta luvusta vähennetään luvun numeroiden summa ja toistetaan sama operaatio saadulle tulokselle. Onko mahdollista, että lopputuloksena saadaan luku 2002?

2. Ratkaise yhtälö

$$|x+3| + p|x-2| = 5,$$

missä p on reaalinen parametri.

3. Nelikulmiossa $ABCD$ on

$AB = 1,\ BC = 2,\ CD = \sqrt{3},$ kulma $ABC = 120^\circ$ ja kulma $BCD = 90^\circ$.

Määritä sivun AD pituuden tarkka arvo.

4. Kolmion ABC sivun AB pituus on 10 cm, sivun AC pituus on 5,1 cm ja kulma $CAB = 58^\circ$. Määritä kulman BCA suuruus asteen sadasosan tarkkuudella.

5. Millä todennäköisyydellä lottoarvonnassa (yksi arvonta viikossa) ainakin yksi seitsemästä tämän viikon lottonumerosta (numerot 1–39) arvottiin myös viime viikolla?

6. Joulupukki tarkkaili taivasta huolestuneena, syvästi mietiskellen. Seuraavana päivänä hän halusi matkustaa niin kauas kuin mahdollista jakaakseen lahjoja lapsille. Lopulta keskiyöllä alkoi sataa lunta. Lumisateen asiantuntijana hän näki heti, että sade oli sen laatuista, ettei se lakkaisi seuraavaan 24 tuntiin. Joulupukki myös tiesi, että ensimmäisen 16 tunnin aikana reki kulkee yhä nopeammin ja nopeammin (nopeus kiihtyy tasaisesti). Reki olisi alussa paikallaan, mutta kun 16. tunti olisi kulunut, lentäisi se kuin nuoli. Sen jälkeen kuitenkin matkan taivaltaminen vaikeutuisi yhä paksunevan lumen vuoksi, ja seuraavan 8 tunnin aikana reen huippunopeus laskisi tasaisesti takaisin nollaan. Toisaalta joulupukki ei kuitenkaan haluaisi uuvuttaa porojaan pakottamalla niitä yli 8 tunnin työhön. Milloin joulupukin pitäisi lähteä matkaan kulkeakseen mahdollisimman pitkän matkan?

7. Onko olemassa sellainen aritmeettinen lukujono, joka koostuu erisuurista positiivisista kokonaisluvuista, ja jossa mikään jonon termi ei ole jaollinen millään neliöluvulla, joka on suurempi kuin 1?

8. Onko jollakin neliöluvulla desimaaliesitys, jonka luvun numeroiden summa on 2002?

9. Ratkaise seuraava yhtälö:

$$2x^4 + 2y^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 7y^2 + 7z^2 - 14yz - 70y + 70z + 175 = 0.$$

10. Ympyrä k_1, jonka säde on R, ja ympyrä k_2, jonka säde on $2R$, koskettavat ulkoisesti pisteessä E_3, ja ympyrät k_1 ja k_2 koskettavat ulkoapäin myös ympyrää k_3, jonka säde on $3R$. Ympyrät k_2 ja k_3 koskettavat pisteessä E_1, ja ympyrät k_3 ja k_1 koskettavat pisteessä E_2. Todista, että kolmion $E_1E_2E_3$ ympäri piirretty ympyrä on yhdenmukainen ympyrän k_1 kanssa.

11. Onko totta, että jos on olemassa annetun puolisuunnikkaan kantojen kanssa yhdensuuntainen suora, joka puolittaa sekä puolisuunnikkaan pinta-alan että ympärysmitan, niin silloin puolisuunnikas on suunnikas?

12. Tasakylkisten kolmioiden kärkikulmat ovat 140° ja ne on piirretty annetun kolmion ABC sivuille AB ja AC (ulkopuolelle). Uudet kulmapisteet ovat silloin A_1 ja C_1. Tasakylkinen kolmio, jonka kärkikulma on 80° pisteessä B_1, piirretään sivulle AC (ulkopuolelle). Määritä kulma $C_1B_1A_1$.

13. Suora katkaistu ympyräkartio on piirretty pallon ympärille. Mikä on sen tilavuuden ja pinta-alan suurin mahdollinen suhde?

14. Määritä kolmiulotteisessa koordinaatistossa kuutio, jonka särmät eivät ole yhdensuuntaiset koordinattiakselien kanssa, mutta niiden pituus on kokonaisluvun mittainen.

15. Anna ja Sofia heittävät vuorotellen arpakuutiota. Arpakuution osoittama luku lisätään aina kummankin erikseen keräämään pistemäärään. Pelin voittaa luvulla 4 jaollisen pistemäärän ensin saavuttanut pelaaja. Jos Anna aloittaa pelin, millä todennäköisyydellä hän tulee voittamaan sen?

16. Todista, että jos n on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin

$$\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \geq 0 \\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} = 2^{n-1}.$$

17. Kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste on M, ja sen sisään piirretty ympyrä, keskipisteenä O, koskettaa sivuja AC ja BC pisteissä P ja Q. Todista, että jos M sijaitsee suoralla PQ, niin suora MO kulkee sivun AB läpi sen keskikohdasta.

18. Olkoon a_n termin x^n kerroin polynomissa

$$(x^2+x+1)^n.$$

Todista, että jos $p > 3$ on alkuluku, niin

$$a_p \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Lähde: *KöMaL*, December 2002, *http://www.komal.hu/*.
Käännös ja ladonta: ***Jouni Koponen***