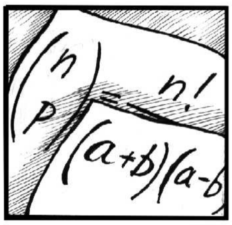

Solmun 1/2004 tehtävien ratkaisuja

Tämän vuoden ensimmäisessä Solmussa 1/2004 oli tehtäviä, joihin vuoden 2004 matematiikkaolympiajoukkueen jäsen *Lauri Ahlroth* Espoosta on lähettänyt muutamia ratkaisuja. Muihin tehtäviin voi edelleen lähettää ratkaisuja Solmun toimitukseen.

7. Onko olemassa sellainen aritmeettinen lukujono, joka koostuu erisuurista positiivisista kokonaisluvuista, ja jossa mikään jonon termi ei ole jaollinen millään neliöluvulla, joka on suurempi kuin 1?

Ratkaisu. Ei ole. Olkoon aritmeettinen jono

$$x_n = an + b.$$

Koska x_n:t ovat kokonaislukuja, on peräkkäisten termien erotus a kokonaisluku. Koska x_n:t ovat erisuuria ja positiivisia, on a positiivinen. n:t ovat myös kokonaislukuja, joten niin ikään b on kokonaisluku. Valitsemalla $n = b(a+2)$ saadaan

$$x_n = ab(a+2) + b = b(a+1)^2,$$

joka on jaollinen ykköstä suuremmalla neliöluvulla $(a+1)^2$.

8. Onko jollakin neliöluvulla desimaaliesitys, jonka luvun numeroiden summa on 2002?

Ratkaisu. On. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}(10^{222} - 8)^2 &= 10^{444} - 16 \cdot 10^{222} + 64\\ &= 10^{224}(10^{220} - 1) + 10^{222} \cdot (100 - 16) + 64\\ &= 999\ldots9984000\ldots0064,\end{aligned}$$

missä sekä yhdeksikköjä että nollia on 220 kappaletta. Numeroiden summa on

$$9 \cdot 220 + 8 + 4 + 6 + 4 = 2002.$$

9. Ratkaise seuraava yhtälö:

$$\begin{aligned}&2x^4 + 2y^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 7y^2\\ &+ 7z^2 - 14yz - 70y + 70z + 175 = 0.\end{aligned}$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}0 &= 2x^4 + 2y^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 7y^2\\ &\quad + 7z^2 - 14yz - 70y + 70z + 175\\ &= x^4 + y^4 + (x-y)^4\\ &\quad + 7(y^2 + z^2 + 5^2 - 2yz - 2 \cdot 5y + 2 \cdot 5z)\\ &= x^4 + y^4 + (x-y)^4 + 7(y - z - 5)^2.\end{aligned}$$

Viimeinen lauseke on reaalilukujen parillisten potenssien summana ei-negatiivinen, ja nollaehdosta saadaan

$$x = y = 0 \text{ ja } z = y - 5 = -5.$$

10. Ympyrä k_1, jonka säde on R, ja ympyrä k_2, jonka säde on $2R$, koskettavat ulkoisesti pisteessä E_3, ja ympyrät k_1 ja k_2 koskettavat ulkoapäin myös ympyrää k_3, jonka säde on $3R$. Ympyrät k_2 ja k_3 koskettavat pisteessä E_1, ja ympyrät k_3 ja k_1 koskettavat pisteessä E_2. Todista, että kolmion $E_1E_2E_3$ ympäri piirretyllä ympyrällä on sama säde kuin ympyrällä k_1.

Ratkaisu. Olkoot ympyröiden k_i keskipisteet O_i, $i = 1, 2, 3$. Ensinnäkin todetaan, että säteet E_1:stä O_2:een ja O_3:een ovat kohtisuorassa vastaaville ympyröille E_1:stä piirrettyä yhteistä tangenttia vastaan. Täten kulma $O_2E_1O_3$ vastaa kahta suoraa kulmaa, ja E_1 on janalla O_2O_3. Vastaavasti E_2 on janalla O_3O_1 ja E_3 on janalla O_1O_2.

Kolmion $O_1O_2O_3$ sivujen pituudet ovat $O_1O_2 = 3R$, $O_3O_1 = 4R$ ja $O_2O_3 = 5R$. Tämä vastaa tunnettua Pythagoraan kolmikkoa $(3, 4, 5)$, joten tämä kolmio on suorakulmainen, hypotenuusana sivu O_2O_3. Kolmion $O_1O_2O_3$ sisään piirretyn ympyrän säteeksi r saadaan

$$r = \frac{2 \cdot \text{ala}}{\text{piiri}} = \frac{3R \cdot 4R}{3R + 4R + 5R} = R.$$

Tarkastellaan kolmion $O_1O_2O_3$ sisään piirretyn ympyrän keskipisteen I kohtisuoria projektioita F_1, F_2 ja F_3 kolmion $O_1O_2O_3$ sivuilla O_2O_3, O_1O_3 ja O_1O_2, tässä järjestyksessä. $IF_2F_3O_1$ on suorien kulmien ja yhtä pitkien vierekkäisten sivujen vuoksi neliö, joten

$$O_1F_2 = O_1F_3 = IF_2 = r = R.$$

Siis piste $F_2 = E_2$ samoin kuin $F_3 = E_3$. Lisäksi

$$O_2F_1 = O_2F_3 = 3R - R = 2R,$$

joten myös $F_1 = E_1$.

Kolmion $O_1O_2O_3$ sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion $O_1O_2O_3$ sivuja nimenomaan pisteissä E_1, E_2 ja E_3. Se on siksi samalla kolmion $E_1E_2E_3$ ympäri piirretty ympyrä, ja sen säde on R, siis sama kuin k_1:llä.

11. Onko totta, että jos on olemassa annetun puolisuunnikkaan kantojen kanssa yhdensuuntainen suora, joka puolittaa sekä puolisuunnikkaan pinta-alan että ympärysmitan, niin silloin puolisuunnikas on suunnikas?

Ratkaisu. Väite on epätosi. Lähdetään liikkeelle kolmiosta, jonka sivut ovat a, b ja c sekä c:tä vastaava korkeusjana h. Venytetään kolmiota c-sivun vastainen kärki venytyskeskuksena ensin suhteella $q > 1$, jolloin syntyy puolisuunnikas. Sitten jaetaan tämä puolisuunnikas kahteen osaan uudella kolmion venytyksellä, jonka suhdeluku on jokin p, jolle $1 < p < q$.

Osapuolisuunnikkaiden pinta-alat ovat

$$\frac{1}{2} \cdot (pc + qc)(qh - ph) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (q^2 - p^2)$$

ja

$$\frac{1}{2} \cdot (c + pc)(ph - h) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (p^2 - 1).$$

Yhtäsuuruus edellyttää, että

$$p = \sqrt{\frac{q^2 + 1}{2}} = p_{\text{ala}}.$$

Piirien yhtäsuuruusehto sitä vastoin on

$$(p - 1)(a + b) + qc + pc = (q - p)(a + b) + pc + c,$$

mikä on yhtäpitävää yhtälön

$$p = \frac{(q - 1)\frac{c}{a+b} + q + 1}{2}$$

kanssa.

Suure $t = \frac{c}{(a+b)}$, missä a, b ja c ovat kolmion sivuja, voi saada minkä tahansa arvon nollan ja ykkösen väliltä (0 ja 1 poislukien). Arvolla $t = 0$ saataisiin p:lle arvo $p_0 = \frac{(q+1)}{2}$, ja arvolla $t = 1$ arvo $p_1 = q$. P:n lauseke on t:n jatkuva funktio, joten jokainen arvo välillä (p_0, p_1) saavutetaan jollakin arvolla t.

Keskilukujen ominaisuuksien perusteella saadaan (tämä on myös helppo todistaa tiedolla $q > 1$)

$$p_0 = \frac{q + 1}{2} < \sqrt{\frac{q^2 + 1}{2}} < q = p_1,$$

joten

$$p_0 < p_{\text{ala}} < p_1.$$

Täten jollakin kelpaavalla t:n arvolla sekä osapuolisuunnikkaiden piirit että pinta-alat ovat samat – kuvio ei silti ole suunnikas.

16. Todista, että jos n on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin

$$\sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \geq 0 \\ k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n}} \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} = 2^{n-1}.$$

Ratkaisu. Tieto

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n, \; k_i \geq 0,$$

sitoo k_i:t siten, että n voidaan esittää positiivisten kokonaislukujen summana, missä lukua i käytetään k_i kertaa. Multinomikertoimet (vasemman puolen summattavat) puolestaan ilmaisevat, kuinka monella tavalla voimme laittaa edelliset luvut jonoon, kun sama numero voi olla mukana useasti. Vasemman puolen lauseke siis ilmaisee, kuinka monella tavalla luku n voidaan esittää positiivisten kokonaislukujen summana, kun summattavien eri järjestyksiä pidetään eri summina.

Todistetaan induktiolla n:n suhteen, että tällaisia tapoja on 2^{n-1}, jolloin annettu tehtävä tulee ratkaistuksi.

Tapaus $n = 1$ on selvä: $1 = 1$ on ainoa tapa, ja $2^{1-1} = 1$.

Tehdään sitten induktio-oletus, että tapauksessa $n = m - 1$ tapoja on tasan 2^{m-2}.

Muodostetaan jokaisesta $m - 1$:n esityksestä m:n esitys

A) lisäämällä $+1$ loppuun,

B) sulauttamalla $+1$ summan viimeiseen numeroon.

Koska $(m-1)$:n esitykset olivat keskenään erilaisia, ovat A-tyypin esitykset keskenään erilaisia, samoin B-tyypin. Koska A-tyypin esitykset päättyvät ykköseen ja B-tyypin esitykset eivät, ovat A-tyypin esitykset erilaisia kuin B-tyypin.

Osoitetaan vielä, että edellä saatiin kaikki esitykset m:lle. Jos jokin esitys

$$x_1 + \ldots + x_n = m$$

olisi jäänyt mainitsematta, voitaisiin tästä muodostaa $m-1$:n esitys pienentämällä viimeistä numeroa x_n yhdellä (tai poistamalla se, jos $x_n = 1$). Konstruktioiden A ja B perusteella tämä $(m-1)$:n esitys olisi jäänyt mainitsematta tapauksessa $n = (m-1)$. Tällöin $(m-1)$:llä olisi konstruktiossa käytettyjen 2^{m-2} esityksen lisäksi jokin muu esitys, mikä on ristiriidassa induktio-oletuksen kanssa.

Täten m:llä on tasan

$$2^{m-2} + 2^{m-2} = 2^{m-1}$$

esitystä positiivisten kokonaislukujen summana, ja induktio on valmis.

Tehtävien lähde: *KöMaL*, December 2002, *http://www.komal.hu/*.