Solmu

Matematiikkalehti
3/2004

http://solmu.math.helsinki.fi/

Solmu 3/2004

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

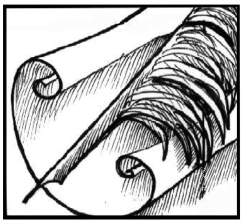
http://solmu.math.helsinki.fi/

Numeroon 1/2005 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään vuoden 2004 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa sekä Suomen Kulttuurirahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys



LUMA-viikko 7.–14.11.2004

Luonnontieteet ja matematiikka, lyhyesti LUMA, muodostavat yhden keskeisen osan koulun oppimäärästä. Vajaa kymmenen vuotta sitten aloitettujen LUMA-talkoiden jatkoksi perustettiin vuosi sitten LUMA-keskus Helsingin yliopiston opettajankoulutuksen yhteyteen. Kuten nimestäkin jo ilmenee, keskuksen tarkoituksena on tukea ja koordinoida matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen kehittämistä Suomessa. Mikäli olen asian oikein ymmärtänyt, LUMA-talkoita koskevassa palautteessa tuli kehujen lisäksi päällimmäisenä esille juuri keskitetyn ohjauksen ja toisaalta resurssien puute. Myös talkoot-sanan käyttöä moitittiin, sillä tärkeätä toimintaa ei pitäisi jättää opettajien palkattoman työn varaan.

Talkoot ovat kuitenkin päättyneet, mutta LUMA jatkuu. Tänä vuonna ensimmäistä kertaa järjestettävän LUMA-viikon yhtenä tavoitteena on lisätä kiinnostusta LUMA-aineita kohtaan viikon kestävällä tapahtumalla, johon osallistuu oppilaitoksia eri puolilta Suomea. Myös matemaattista ohjelmaa tarjotaan ympäri Suomen aina peruskouluista yliopistoihin.

Ensimmäinen LUMA-viikko järjestetään 7.-14.11.2004, ja siitä on tarkoitus tehdä jokavuotinen tapahtuma. Lisätietoja viikosta löytyy osoitteesta

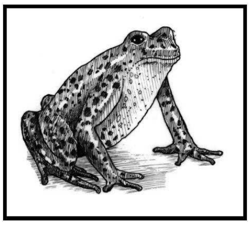
`http://www.helsinki.fi/luma/viikko/2004/`

ja matemaattisesta ohjelmasta erityisesti osoitteesta

`http://www.helsinki.fi/luma/viikko/2004/vinkit/matematiikka/`.

Pekka Alestalo

Pääkirjoitus



Sammakoita

Solmussa on aloitettu uusi palsta *Sammakoita* osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/sammakot/`. Palstalle kerätään eri lähteistä poimittuja matematiikkaan liittyviä kömmähdyksiä ja väärinkäsityksiä, siis sammakoita. Voit lähettää omat sammakkosi palstalla julkaistavaksi sähköpostitse osoitteella `toimitus@solmu.math.helsinki.fi`.

Uusia sammakoita julkaistaan verkkosivun lisäksi painetuissa Solmun numeroissa sitä mukaa kun niitä saadaan kerättyä. Kömmähdykset matematiikkaan liittyvissä käsitteissä ovat mm. tiedotusvälineissä niin yleisiä, että oletettavasti lähes jokaisessa Solmun numerossa on luettavissa uusia sammakoita.

Tässä numerossa julkaistava toimittaja *Aarno Laitisen* kirjoitus koostuu hänen yhteiskunnan eri aloilta huomioimistaan sammakoista ja yleisemminkin laskutaidon katoamisesta. Laitisen mainitsema verovoutien väite valtiolta harmaan talouden takia saamatta jäämien lähes 10 miljardin euron verotuloista vuodessa on herättänyt keskustelua Solmun keskustelupalstalla, tästä voitte lukea lisää verkkosivuiltamme.

Myös professori *Matti Seppälä* on havainnoinut laskutaitoon ja numeroiden lukutaitoon liittyviä sammakoita. Seppälän ensimmäinen kirjoitus aiheesta oli Solmussa 1/2004, ja tässä numerossa hän jatkaa aiheesta uudella kirjoituksella.

Löydätkö seuraavien poimintojen virheet? Sammakoiden selityksiä ja korjauksia julkaistaan Solmun seuraavissa numeroissa.

”Nyt verokanta on nolla. Siihen saadaan sadan prosentin nosto hyvinkin äkkiä. Komissiolla voisi olla veron nostamiseen hyvinkin intressejä, koska siellä varmaan ymmärretään, että se on koko unionin kannalta hyvä suunta edetä”, valtiovarainministeri *Antti Kalliomäki* (sd) arvioi komission lupausta [alkoholiveron mahdollisesta nostamisesta].

Helsingin Sanomat, 12.5.2004

Eräs kaveri teknillisessä oppilaitoksessa (tekussa) oli kysynyt ensimmäisen asteen yhtälöstä, jossa oli x molemmilla puolilla, että kumman x:n hän ratkaisee.

Lähettäjä: *Rauno Lindström*, Turku

Flextronicsin tuotanto siirretään Puolaan, koska komponentit voidaan valmistaa siellä kolme kertaa halvemmalla kuin Suomessa.

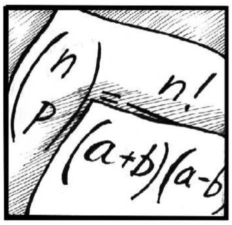
Ylen Tv-uutiset, 24.9.2004

Uppsalan yliopistossa väitelleen suomalaisen Iida Häkkisen mukaan nuoret kirjoittivat ylioppilaiksi 1990–1998 yhtä hyvin arvosanoin, vaikka lukiomenoja leikattiin keskimäärin 25 prosenttia 1989–1994.

Helsingin Sanomat, 5.10.2004

Mika Koskenoja

Toimitussihteerin palsta



Potenssisummat ja symmetriset perusfunktiot

Jorma Merikoski
Professori
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Tampereen yliopisto

1 ”Helppo ongelma matematiikan tohtorille”

Harrastan pientä pörssipeliä ja siksi luen silloin tällöin Kauppalehti Onlinen keskustelupalstaa *Sijoittaminen ja talous*. Siellä, kuten netin keskusteluryhmissä yleensäkin, seilaa kaikenlaista kirjoittajaa eikä asiassa pysyminen tai muu tiukkapipoisuus useinkaan haittaa tahtia. Niinpä nimimerkki ”Arvuuttelija” kirjoitti 8.6.2004 kello 13.46, että nimimerkki ”Indeksi-Into” on omien sanojensa mukaan matematiikan tohtori, joten hän antoi tälle seuraavan tehtävän, jonka ”kunnon lukiolainenkin pystyy ratkaisemaan”.

Ongelma. Olkoon

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 4 \\ a^2+b^2+c^2+d^2 &= 16 \\ a^3+b^3+c^3+d^3 &= 64 \\ a^4+b^4+c^4+d^4 &= 128. \end{aligned}$$

Laske $a^5+b^5+c^5+d^5$.

Jo kello 14.03 nimimerkki ”Savuporo” vastasi: ”Heh, eipä taida tämä tehtävä tohtorilta onnistua. Tosin ei onnistu minultakaan, ellei tuo viimeinen luku satu olemaan typo.” (Harjoitustehtävä: Miksi Savuporo ajatteli viimeisen luvun olevan väärin?) Tähän Arvuuttelija vastasi kello 14.06, ettei se ole typo. Hän jatkoi: ”Ei tätä tarkemmin ajateltuna lukiolainen ratkaise”. Sitten nimimerkki ”Mercurius” tuumi kello 14.18, että taisi tehtävä pelotella ”tohtorimme” pois.

Seuraavan puheenvuoron käytti nimimerkki ”Wiineri” kello 14.56 esittämällä huikean teorian, jonka mukaan Arvuuttelija onkin Indeksi-Into, jota on ”ketuttanut ettei kukaan usko häntä”! Into on löytänyt ”vanhasta tieteen kuvalehdestä” tämän ongelman, jonka hän siis esitti Arvuuttelijana ja ratkaisee piakkoin Intona! Kuitenkin Wiineri alkoi lopulta itsekin epäillä teoriaansa.

Keskustelu jatkui yhtä vauhdikkaasti. Vääriä vastauksia tuli siihen malliin, että kello 16.07 nimimerkki ”Jaaju” arveli Indeksi-Innon lähettelevän eri vastauksia eri nimimerkeillä! ”Pakkohan noista on jonkin osua jo oikeaankin.” Kello 16.49 nimimerkki ”Photius” ilmoitti ratkaisseensa tehtävän tietokoneella saaden vastaukseksi 384, mutta a, b, c ja d ovat ”helvetillisiä, sivun pituisia kompleksilukuja”.

Nimimerkki ”Merck” ärähti 9.6. kello 9.56, että ylläpidon pitäisi poistaa tällaiset turhat ”hiekkalaatikkotason” keskustelut, joilla ei ole mitään tekemistä sijoittamisen tai talouden kanssa. Wiineri vastasi kello 13.37, että tämä keskustelu kuuluu tälle palstalle ja nimenomaan ehkäisee talouteen kuulumattomia keskusteluja pitämällä Indeksi-Innon poissa maisemista!

Kun Arvuuttelija 9.6. kello 18.50 esitti oman ratkaisunsa, niin siitäkös syntyi rähinä. Nimimerkki ”FreyTag” sanoi kello 20.05 suorat sanat: ”En tajua yhtään, mistä te puhutte. Yksikään teistä ei voi olla missään vastuullisessa tai millään lailla merkittävästi johtavassa asemassa.” Kello 21.44 nimimerkki ”Kari Ilmari” löi lisää löylyä: ”Oletko jotenkin tärähtänyt, kun pädet jollakin ongelmamatematiikan tehtävällä... Esität sen sitten täällä kuin seinähullu... Jutullasi et ole yhtään pätevämpi pörssikeskustelussa... Itse yritin muun muassa seuraavalla tavalla, joka ei kuitenkaan johtanut...”

Ehkä se, että Arvuuttelijan ratkaisussa ei tarvittu lukuja a, b, c ja d, sai Photiuksen jatkamaan töitä, ja 10.6. kello 10.25 hän ratkaisi tehtävän juuri siten kuin kokenut matemaatikko tekee. Palaamme tähän ratkaisuun myöhemmin. Sekä Arvuuttelijan että Photiuksen ratkaisuihin riittävät periaatteessa lukiotiedot, mutta silloin täytyy olettaa tuollaisten lukujen a, b, c ja d olemassaolo, mitä ei voida todistaa lukiotiedoilla.

2 Johdatteleva esimerkki

Symmetrisen funktion arvo ei muutu vaihdettaessa muuttujien järjestystä. Toisen asteen yhtälön ratkaisujen tiettyjä symmetrisiä funktioita voidaan laskea ratkaisematta yhtälöä. Tällaiset asiat kuuluivat muutama vuosikymmen sitten lukion pitkään oppimäärään.

Tehtävä (ks. [9]). Laskettava symmetrisen funktion $x_1^3+x_2^3$ arvo, kun x_1 ja x_2 ovat yhtälön $x^2-4x+7=0$ ratkaisut.

Ratkaisemalla yhtälön joutuisimme hankaliin laskuihin vieläpä kompleksiluvuilla, joten käsittelemme tehtävän ratkaisematta yhtälöä. Ratkaisujen summan ja tulon ominaisuuksien perusteella $x_1+x_2=4$ ja $x_1x_2=7$. Koska

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^3 &= x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3\\ &= x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2),\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}x_1^3+x_2^3 &= (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\\ &= 4^3-3\cdot 7\cdot 4=-20.\end{aligned}$$

3 Symmetriset perusfunktiot

Määrittelemme muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *symmetriset perusfunktiot* (engl. *elementary symmetric functions*) $s_1, s_2, \ldots$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}s_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ s_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\ s_3(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots\\ &\qquad +x_{n-2}x_{n-1}x_n,\\ &\ldots\\ s_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1x_2\cdots x_n,\\ s_{n+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= s_{n+2}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\cdots=0.\end{aligned}$$

Siis $s_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ on, kun $1\le k\le n$, kaikkien niiden luvuista x_1, x_2, $\ldots$, x_n saatujen tulojen summa, joissa on k tekijää ja jokaisella tekijällä on eri indeksi.

Reaali- tai kompleksikertoimisella polynomiyhtälöllä

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

on täsmälleen n ratkaisua, kun kutakin ratkaisua otetaan sen kertaluvun osoittama määrä. Olkoot ne x_1, x_2, $\ldots$, x_n, jolloin voimme kirjoittaa yhtälön muotoon

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0.$$

Suorittamalla kertolaskut vasemmalla puolella saamme yhteyden yhtälön kerrointen a_k ja ratkaisujen symmetristen perusfunktioiden s_k välille

$$\begin{aligned}a_1 &= -s_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=-(x_1+x_2+\cdots+x_n),\\ a_2 &= s_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ &\ldots\\ a_k &= (-1)^k s_k(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ &\ldots\\ a_n &= (-1)^n s_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(-1)^n x_1x_2\cdots x_n.\end{aligned}$$

Siis luvut x_1, x_2, $\ldots$, x_n ovat yhtälön

$$x^n-s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^n s_n=0 \tag{1}$$

ratkaisut, kun kirjoitamme lyhyesti $s_k = s_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

4 Potenssisummat

Määrittelemme muuttujien x_1, x_2, $\ldots$, x_n *potenssisummat* $p_0, p_1, p_2, \ldots$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}p_0(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= n,\\ p_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ p_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2,\\ &\ldots\\ p_k(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,\\ &\ldots\end{aligned}$$

Kirjoitamme lyhyesti $p_k = p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Johdamme potenssisummien ja symmetristen perusfunktioiden yhteyden. Sijoittamalla luvut x_1, x_2, ..., x_n yhtälöön (1) saamme yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} x_1^n - s_1 x_1^{n-1} + s_2 x_1^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n &= 0 \\ x_2^n - s_1 x_2^{n-1} + s_2 x_2^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n &= 0 \\ &\cdots \\ x_n^n - s_1 x_n^{n-1} + s_2 x_n^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n &= 0 \end{aligned}$$

ja edelleen laskemalla yhteen yhtälön

$$p_n - s_1 p_{n-1} + s_2 p_{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n p_0 = 0.$$

Antamalla n:lle arvot 1, 2, 3, ... saamme tästä *Newtonin kaavat*

$$\begin{aligned} p_1 &= s_1, \\ p_2 &= s_1^2 - 2s_2, \\ p_3 &= s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3, \\ p_4 &= s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + 4s_1 s_3 + 2s_2^2 - 4s_4, \\ p_5 &= s_1^5 - 5s_1^3 s_2 + 5s_1 s_2^2 + 5s_1^2 s_3 - 5s_2 s_3 - 5s_1 s_4, \\ &\ldots \end{aligned}$$

ja myös muunnoskaavat toiseen suuntaan

$$\begin{aligned} s_1 &= p_1, \\ s_2 &= \frac{1}{2!}(p_1^2 - p_2), \\ s_3 &= \frac{1}{3!}(p_1^3 - 3p_1 p_2 + 2p_3), \\ s_4 &= \frac{1}{4!}(p_1^4 - 6p_1^2 p_2 + 3p_2^2 + 8p_1 p_3 - 6p_4), \\ s_5 &= \frac{1}{5!}(p_1^5 - 10p_1^3 p_2 + 15p_1 p_2^2 + 20p_1^2 p_3 \\ &\qquad - 30p_1 p_4 - 20p_2 p_3 + 24p_5), \\ &\ldots \end{aligned}$$

Joissakin termeissä (missä?) on säännönmukaisuuksia, mutta p_k:lle ja s_k:lle ei tietääkseni ole yksinkertaisia yleisiä lausekkeita.

5 Ongelman ratkaisu ja muita ongelmia

Sijoittamalla $p_1 = 4$, $p_2 = 16$, $p_3 = 64$, $p_4 = 128$ saamme $s_1 = 4$, $s_2 = s_3 = 0$, $s_4 = 32$. Nämä edelleen sijoittamalla löydämme ongelman ratkaisun $p_5 = 384$.

Tarkastelemme vielä eräitä muita kiinnostavia potenssisummiin liittyviä kysymyksiä. Hyväksymme eksponentiksi mielivaltaisen reaaliluvun, jolloin meidän on rajattava kantaluvut positiivisiksi. Olkoon $t \neq 0$. Määrittelemme muuttujien x_1, x_2, ..., $x_n > 0$ *t:nnen momenttisumman*

$$f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t)^{1/t}$$

ja *t:nnen momenttikeskiarvon*

$$g_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t}{n} \right)^{1/t}.$$

Tällöin g_1 on aritmeettinen ja g_{-1} harmoninen keskiarvo. Seuraavissa tehtävissä kiinnitämme luvut x_1, x_2, ..., $x_n > 0$.

Tehtävä 1. Todistettava, että

$$\lim_{t \to 0} g_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}.$$

Voimme siis määritellä, että g_0 on geometrinen keskiarvo.

Tehtävä 2. Todistettava, että

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \lim_{t \to \infty} g_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \max_k x_k, \\ \lim_{t \to -\infty} f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \lim_{t \to -\infty} g_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \min_k x_k, \\ \lim_{t \to 0-} f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \lim_{t \to 0+} f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \infty. \end{aligned}$$

Tehtävä 3. Todistettava, että funktio $\phi(t) = f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $t \neq 0$, on vähenevä, kun $t < 0$, ja että se on vähenevä myös, kun $t > 0$. Lisäksi osoitettava, että väheneminen on aitoa, jos ja vain jos ei ole $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Tehtävä 4. Todistettava, että funktio $\gamma(t) = g_t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on kaikkialla kasvava. Lisäksi osoitettava, että kasvu on aitoa, jos ja vain jos ei ole $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Ratkaisuja löytyy kirjallisuudesta (ks. esim. [1], [3], [4], [5], [7]). Tehtäviin 2 ja 3 riittävät lukiotiedot ja kekseliäisyys. Tehtävät 1 ja 4 ovat vaikeampia eikä niistä taideta selviytyä tavallisilla lukiotiedoilla. L'Hospitalin säännöstä (ks. esim. [2]) ja Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä sekä sitä yleisemmästä Hölderin epäyhtälöstä (ks. esim. [1], [2], [3], [4], [5], [7]) on apua. Ehkä joku Solmun lukija innostuu ratkaisemaan jonkin näistä tehtävistä ja esittämään ratkaisun tässä lehdessä.

Kirjallisuutta

Potenssisummia ja symmetrisiä perusfunktioita käsittelevät alkeellisesti mm. Väisälä [8] ja Weisstein [10], syvemmin mm. Mitrinović [7] ja erittäin perusteellisesti mm. Bullen [3]. Tällä alalla on avoimiakin ongelmia. Minäkin olen joutunut niiden kanssa tekemisiin [6].

[1] E. F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities.* Springer, 1961.

[2] A. Browder, *Mathematical Analysis: An Introduction.* Springer, 1996.

[3] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities.* Kluwer, 2003.

[4] G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities. Second Edition.* Cambridge U.P., 1988.

[5] J. R. Magnus, H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus.* Wiley, 1988.

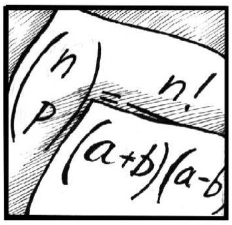
[6] J. K. Merikoski, Extending means of two variables to several variables. *J. Ineq. Pure Appl. Math.* 5 (2004), Article 65. [http://jipam.vu.edu.au].

[7] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities.* Springer, 1970.

[8] K. Väisälä, *Johdatus lukuteoriaan ja algebraan.* Otava, 1950.

[9] K. Väisälä, *Algebran oppi- ja esimerkkikirja 2. Pitempi kurssi.* 8. p. WSOY, 1966.

[10] E. Weisstein, Eric Weisstein's world of mathematics. Wolfram Research. [http://www.mathworld.wolfram.com].



Tuomaksen tehtäviä

Solmun tämänkertaiset tehtävät ja yhden valmiin ratkaisun on laatinut *Tuomas Korppi* Helsingistä. Voit lähettää ratkaisuehdotuksesi vielä ratkaisemattomiin tehtäviin 2, 3, 4 ja 5 Solmuun joko sähköpostilla osoitteeseen

toimitus@solmu.math.helsinki.fi

tai kirjeenä osoitteeseen

Solmun toimitus
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68
00014 Helsingin yliopisto.

Tehtävä 1. Etsittävä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} aX &= 2Y \\ bZ &= 2Y \\ X - Y + Z &= 2 \end{cases}$$

ratkaisut, joissa X, Y, Z, a, b ovat positiivisia kokonaislukuja ja $a, b > 2$. Huomaatko ratkaisuna saatavissa luvuissa mitään tuttua? Jos huomaat, keksitkö yhteyttä löytämäsi tuttuuden ja yhtälöiden välille?

Ratkaisu. Ratkaisemalla X ja Z kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja sijoittamalla jälkimmäiseen saadaan

$$\frac{2}{a}Y - Y + \frac{2}{b}Y = 2.$$

Lisäämällä Y puolittain sekä jakamalla Y:llä saadaan

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1 + \frac{2}{Y}. \tag{1}$$

Siis välttämättä

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} > 1. \tag{2}$$

Jos $a \geq 6$ ja $b \geq 3$, niin

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,$$

joten (2) ei voi päteä. Koska $b \geq 3$ on oletus, on välttämättä $a < 6$. Koska tilanne on symmetrinen, myös $b < 6$.

Oletetaan, että $a \geq 4$. Jos $b \geq 4$, niin

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \leq \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1.$$

Tämä on mahdotonta. Jos siis toinen luvuista a, b on vähintään neljä, on toisen oltava kolme.

Olemme nyt saaneet karsittua pois kaikki muut (a, b)-kandidaatit paitsi $(a = 3, b = 3)$, $(a = 4, b = 3)$, $(a = 3, b = 4)$, $(a = 3, b = 5)$ ja $(a = 5, b = 3)$.

Ratkaisemalla Y yhtälöstä (1) saadaan

$$Y = \frac{2}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - 1},$$

ja sijoittamalla yo. kandidaatit ylläolevaan yhtälöön saadaan kandidaatit $(a = 3, b = 3, Y = 6)$, $(a = 4, b = 3, Y = 12)$, $(a = 3, b = 4, Y = 12)$, $(a = 5, b = 3, Y = 30)$, $(a = 3, b = 5, Y = 30)$.

Sijoittamalla kahteen ensimmäiseen yhtälöön saadaan seuraava taulukko ratkaisuista:

a	b	X	Y	Z
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
4	3	6	12	8
3	5	20	30	12
5	3	12	30	20

Huomataan, että ylläolevat luvut ovat säännöllisten monitahokkaiden tunnuslukuja: $a =$ kuinka monta särmää tulee kärkeen, $b =$ kuinka monta sivua on tahkolla, $X =$ kärkien lukumäärä, $Y =$ särmien lukumäärä, $Z =$ tahkojen lukumäärä. Taulukossa käydään läpi kaikki mahdolliset säännölliset monitahokkaat.

Mitä tekemistä sitten on säännöllisillä monitahokkailla ja alun yhtälöryhmällä?

Jokaisella särmällä on kaksi kärkeä, ja jokainen kärki on a:n särmän kärki. Ensimmäinen yhtälö $2Y = aX$ seuraa tästä tosiseikasta[1].

Jokainen särmä on kahden tahkon sivu, ja jokaisella tahkolla on b sivua. Toinen yhtälö $2Y = bZ$ seuraa tästä tosiseikasta.

Kolmas yhtälö on peräisin algebrallisesta topologiasta, ja se sanoo, että jos kappale, joka saadaan pallonpinnasta venyttämällä ja vääntämällä, jaetaan monikulmioihin, on aina

$$\text{kärkien lkm} - \text{särmien lkm} + \text{tahkojen lkm} = 2. \tag{3}$$

Jatkotehtävä 2. Ratkaise ensimmäisen tehtävän yhtälöryhmä tapauksessa, jossa a, b, X, Y, Z ovat kokonaislukuja ja $a, b \geq 2$. Et voi nyt konstruoida monitahokkaita, jotka täsmäävät ratkaisuihin, mutta löydätkö sellaiset yleistetyt ”monitahokkaat”, joissa tahkot ja särmät saavat olla kaarevia?

Jatkotehtävä 3. Jos yllä pallon pinta olisi jonkun muun mallinen kappale, esimerkiksi torus (munkkirinkilän pinta), pätisi vastaava yhtälö kuin (3), mutta kakkosen paikalla olisi joku muu luku. Toruksen tapauksessa tuo luku olisi 0. Voit myös miettiä alun yhtälöryhmän ratkaisuja, kun kolmas yhtälö korvataan yhtälöllä

$$X - Y + Z = 0.$$

Jatkotehtävä 4. Jalkapallo on tehty 5- ja 6-kulmioista. Jokaiseen kärkeen tulee kolme särmää. Jokaisella 5-kulmiolla on yhteinen sivu 5:n eri 6-kulmion kanssa, ja jokaisella 6-kulmiolla on yhteinen sivu 3:n eri 5-kulmion kanssa. Pystytkö näiden tietojen avulla päättelemään, kuinka monta 5- ja kuinka monta 6-kulmiota jalkapallossa on? Yhtälö (3) pätee tässäkin tapauksessa.

Tehtävä 5. Olkoon A joukko, joka sisältää $2n$ pistettä, jotka sijaitsevat tasavälein yksikköympyrän kehällä. Alussa pisteet ovat valkoisia. Ne väritetään yksi kerrallaan, jossain järjestyksessä, mustiksi. Olkoot värityshetket $1, 2, \ldots, 2n$.

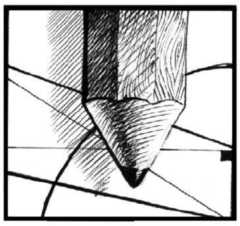
Sanomme, että piste $a \in A$ on värityksen reunapiste hetkellä t, mikäli hetken t värityksen jälkeen vähintään toinen pisteen a naapuripisteistä on eri värinen kuin a.

Osoitettava, että on olemassa hetki t, jona kaksi antipodaalista pistettä ovat värityksen reunapisteitä. Pisteet (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat *antipodaalisia*, mikäli $x_2 = -x_1$ ja $y_2 = -y_1$.

Vaihtoehtoinen muotoilu tehtävään 5. Parillinen määrä ryöväreitä istuu piirissä. Piiri on täsmälleen ympyrän muotoinen, ja ryövärit istuvat tasavälein. Ryöväripomo jakaa piiriissä istuville ryöväreille yksi ryöväri kerrallaan heidän osuutensa ryöstösaaliista. Jos ryöväri, joka on jo saanut osansa saaliista, ja ryöväri, joka ei ole vielä saanut osaansa saaliista, istuvat vierekkäin, molemmat ryövärit kyräilevät. Jos kaksi kyräilevää ryöväriä istuu täsmälleen vastapäätä toisiaan, he huomaavat toistensa kyräilevän, ja ryntäävät toistensa kimppuun.

Ryöväripomo yrittää valita sellaisen saaliinjakojärjestyksen, että ei syntyisi tappelua. Todista, että se on mahdotonta.

[1] Tutkitaan nimittäin kysymystä: *Kuinka monta erilaista paria (x, y) voidaan muodostaa, joissa y on tutkittavan monikulmion särmä ja x on särmän y kärki?* Vastaus tähän kysymykseen voidaan laskea kahdella tavalla: Joko laskemalla särmät ja kertomalla tulos kahdella, jolloin saadaan lukumääräksi $2Y$, tai laskemalla kärjet ja kertomalla tulos a:lla, jolloin saadaan lukumääräksi aX. Koska laskimme saman lukumäärän kahdella tavalla, on laskujen annettava sama vastaus, eli $aX = 2Y$.



Peilileikkejä matikkaleirillä

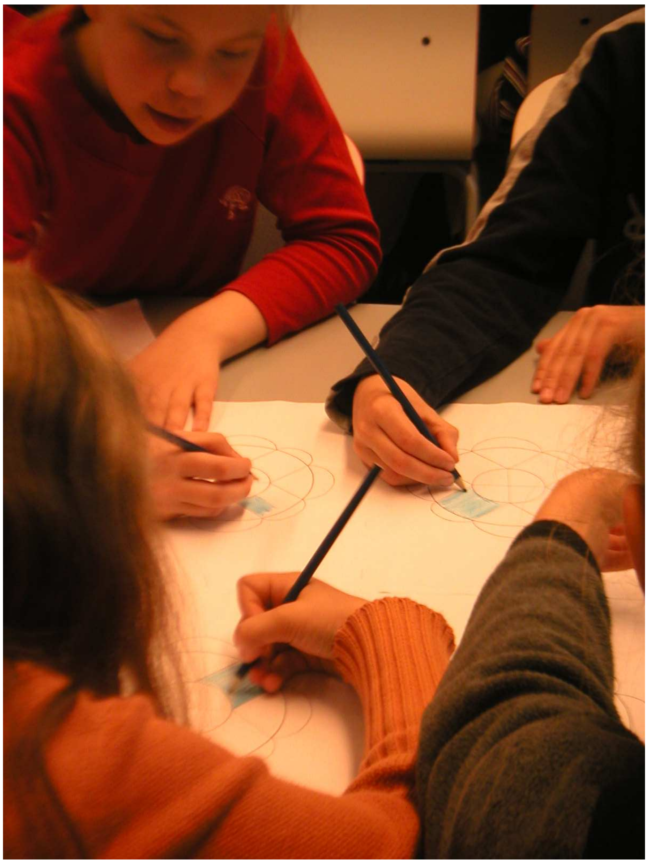
Saara Lehto
Tutkija
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Matematiikan opettajaopiskelijat *Marja Hytönen* ja *Suvi Vanhatalo* pohtivat talvella, miten matematiikkaa voisi opettaa lapsille toiminnallisesti – pelaten, leikkien ja tutkien. Heräsi ajatus matemaattisesta kesäleiristä. Ideana oli tarjota lapsille uudenlaisia elämyksiä ja kokemuksia matematiikan parissa.

LUMA-keskus tuli avuksi leirin käytännön järjestelyissä. Kumpulan kampuksella kesäkuussa järjestetylle viikon mittaiselle päiväleirille osallistui parikymmentä 9–12 -vuotiasta lasta. Leirin suosio yllätti järjestäjät, kaikki halukkaat eivät mahtuneet mukaan.

Tunnelma leirillä oli iloinen ja innostunut. Tauoillakin mietittiin matematiikkaa, ja kun yksi ongelma ratkesi, tultiin ohjaajilta heti vaatimaan lisää pohdittavaa. Leiriohjelmassa teemoina olivat muun muassa geometria, topologia, logiikka, todennäköisyyslaskenta, äärettömyys ja ongelmanratkaisu.

Matematiikkaleiriä ei suunnattu vain matemaattisesti erityislahjakkaille tai matematiikasta kiinnostuneille. Osa leirin osallistujista olikin tullut hakemaan lisämotivaatiota tai tukea koulumatematiikkaan. Monesti ongelma- ja tutkimustehtävien ratkominen auttaa myös tavallisessa koulutyössä.



Keskiviikkoaamuna leirillä käsiteltiin symmetriaa, jonka tutkiminen aloitettiin leikkimällä pareittain peilileikkiä. Pari seisoo vastakkain. Toinen liikuttaa käsiä ja jalkoja, astuu eteen, taakse tai sivuille ja pyörii vaikka ympäri. Toisen on esitettävä peiliä ja yritettävä toimia niin kuin peilikuva toimisi. Sitten vaihdetaan osia.

Kun kaikki olivat oppineet peilileikin pareittain, siirryttiin neljän ryhmiin. Nyt kaksi vastakkain seisovaa paria asettuivat vierekkäin ja kuviteltiin peilit myös sivuttain parien väliin. Taas vuorotellen yksi neljästä sai tehdä liikkeitä ja muiden piti olla peilejä. Tämä oli jo paljon hankalampaa, mutta Marjan ja Suvin neuvoilla nelipeilitkin alkoivat pian sujua.

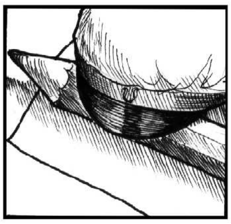
Lopuksi kaikki asettuivat riveihin, ja kokeiltiin koko ryhmän yhteistä peilileikkiä. Peilit kuviteltiin nyt kaikkien rivien ja jonojen välille, ja liike käynnistettiin yhdestä nurkasta. Tämä osoittautui jo kovin vaikeaksi, sillä oli hankala hahmottaa kuka oli kenenkin peili ja virheet tietenkin sekoittivat muidenkin peilikuvat. Kaikilla oli kuitenkin hauskaa ja leikin idea tuli selväksi virheistä huolimatta. Symmetrioiden tutkimista jatkettiin luokassa väritystehtävien ja peilipelien avulla.

Koska leirikokemukset olivat hyviä, on ensi kesälle alustavasti suunniteltu kahta kesäleiriä.

Tänä syksynä käynnistyy myös iltapäiväkerhotoiminta. Ensimmäisen kerhon pitävät Marja ja Suvi matematiikan ja tilastotieteen laitoksen tiloissa Exactumissa Kumpulassa. Keväällä kerhoja on mahdollisesti luvassa lisää.

Lisää tietoa kerhoista ja leireistä sekä muusta matematiikan LUMA-toiminnasta löytyy LUMA-keskuksen sivuilta `www.helsinki.fi/luma`. Voit myös ottaa yhteyttä matematiikan kouluyhteistyöhenkilöön *Saara Lehtoon* (`saara.lehto@helsinki.fi`).

Verkko-Solmun Unkari-sivuilla `http://solmu.math.helsinki.fi/unkari/` on runsaasti materiaalia ja monipuolisia virikkeitä lasten ja nuorten matematiikkaleirien ja -kerhojen järjestäjien käyttöön.



Opettaja, vaadi perusalgebran osaaminen!

Kyösti Tarvainen
PhD, yliopettaja
Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

Algebran perustaitojen ongelma

Insinööriopintonsa aloittavien ylioppilaiden matemaattisissa taidoissa esiintyy erittäin vakavia puutteita. Esimerkiksi Helsingin ammattikorkeakoulun rakennusosastolla tehdyissä diagnostisissa testeissä tyypillisesti vain puolet uusista ylioppilaista osaa ratkaista yhtälöparin, kolmasosa kaikki potenssilaskusäännöt, neljäsosa murtolukujen ja murtolausekkeiden laskusäännöt; muutamat ylioppilaat eivät osaa ratkaista yksinkertaistakaan yhtälöä.

Vaikka ammattikorkeakoulun tekniikan opinnoissa matematiikkaa käytetään useassa kurssissa ja sen takia oppilailla on yleensä hyvä motivaatio oppia sitä, puutteet perustaidoissa eivät parane itsestään opintojen kuluessa. Siksi ammattikorkeakouluissa on ryhdytty toimenpiteisiin, joilla matematiikan perusosaaminen pyritään saamaan nopeasti kuntoon.

Yksi keino ovat perusmatematiikan testit, jotka on läpäistävä – testi on suoritettava niin monta kertaa, kunnes osoittaa osaavansa perusasiat. Helsingin ammattikorkeakoulussa tällaisia kokeita on järjestänyt yliopettaja *Pertti Toivonen* (1998). Espoon-Vantaan teknillisessä ammattikorkeakoulussa on vastaavanlainen testi (Peltola, 2001). Seuraavassa selostetaan Helsingin ammattikorkeakoulun rakennusosastolle kehitettyä perusalgebran kohentamisjärjestelmää, joka on toteutettu vuosina 2000–2002 kolmella ylioppilasluokalla ja kolmella ammattikoulupohjaisella luokalla.

Perusalgebran testi

Kahdella ensimmäisellä tunnilla on pidetty laaja 102 tehtävän diagnostinen testi, joka käsittää algebraa, geometriaa, differentiaali- ja integraalilaskentaa. Testin jälkeen algebran perusteita on kerrattu ylioppilaille 14 oppituntia. Kertauksen jälkeen on pidetty perusalgebran ensimmäinen testi. Se käsittää seuraavat 11 tehtävätyyppiä; yhden uusintatestin tehtävät ovat esimerkkeinä.

A. Algebran lausekkeiden käsittely: samanmuotoisten termien yhdistäminen, sulkujen poisto

Sievennä seuraavat lausekkeet:

a) $2a + 3ab + 4a^2 + 3ab$

b) $x + y - (1 + x - y) + 1 + y$

c) $5 - (4 - (a - b)) - b$

B. Algebran lausekkeiden käsittely: summan kertominen ja jakaminen

Poista sulut, sievennä lausekkeet:

a) $5(2a+3b)$

b) $ab-a(3-b)$

c) $\dfrac{6a-3b}{3}$

d) $\dfrac{ma+mab+m}{m}$

C. Murtolausekkeiden kerto- ja jakolasku

Sievennä seuraavat lausekkeet:

a) $m\dfrac{kg}{m}$

b) $\dfrac{6a}{7b}\dfrac{14c}{12a}$

c) $\dfrac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{kg}}$

d) $\dfrac{kg}{\frac{kg}{m^3}}$

e) $\dfrac{\frac{a}{b}}{a}$

D. Murtolausekkeiden supistaminen

Supista ne lausekkeet, jotka voi supistaa:

a) $\dfrac{x+a}{x+b}$

b) $\dfrac{6a}{12a^2}$

c) $\dfrac{a(x+y)b}{2(x+y)}$

d) $\dfrac{abc}{bc}$

E. Murtolausekkeiden yhteenlasku

Suorita yhteen- ja vähennyslaskut:

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{a}{3}+\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{a}{b}+1$

d) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$

e) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

F. Ensimmäisen asteen yhtälö: tavalliset ”x-yhtälöt”

Ratkaise seuraavat yhtälöt:

a) $2x+1=4(x-3)+8$

b) $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2x+1}{5}=2$

G. Ensimmäisen asteen yhtälö: suureen ratkaiseminen kaavasta

Ratkaise kysytty suure annetusta yhtälöstä:

a) $\sigma=\dfrac{F}{A}$, F?

b) $l_1=l_2+\alpha t$, t?

c) $p=100\dfrac{a-b}{a}$, a?

H. Lineaarinen yhtälöpari

Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases}2x+y=11\\3x+2y=19\end{cases}$$

I. Yhtälöt, joissa potensseja tai neliöjuuria

Seuraavien tehtävien kaavoissa kaikki suureet ovat positiivisia. Ratkaise kysytty suure.

a) $c^2=4a^2+b^2$, b?

b) $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$, r?

c) $c=\sqrt{a^2+b^2}$, b?

J. Toisen asteen yhtälö

Ratkaise seuraavat yhtälöt:

a) $x^2-9=9$

b) $x^2+4x=0$

c) $x^2+x-6=0$

K. Potenssilaskusäännöt

Sovella potenssilaskusääntöjä seuraaviin lausekkeisiin:

a) $(2xy)^3$

b) $\left(\dfrac{3ab}{2c}\right)^2$

c) $x^3y^4x^5y^2$

d) $(x^3)^4$

e) $\dfrac{a^8}{a^4}$

f) e^0+1

g) $a^{-2}-\dfrac{1}{a^2}$

Uusintatestien kulku

Esimerkiksi eräällä ylioppilasluokalla ensimmäisen testin kaikki tehtävät ratkaisi oikein joka toinen. Testiä läpäisemättömät saivat pakollisia kotitehtäviä niistä tehtävätyypeistä, joita eivät hallinneet. Lisätehtävät oli otettu Teknisten ammattien matematiikka 2Z -kirjasta (Kinnunen et al., 1985). Jokainen tehtävätyyppi tuli suorittaa niin monta kertaa, että se osattiin. Seuraava taulukko näyttää, miten ylioppilaat kyseisellä luokalla saivat tehtävätyyppejä suoritetuiksi.

Taulukko. Ylioppilaiden suorittamattomien tehtävätyyppien väheneminen; rivi kuvaa yhden henkilön kehitystä. Yksi henkilö tarvitsi 4 uusintakertaa. Kuusitoista opiskelijaa suoritti kaikki tehtävät ensimmäisessä testissä, eivätkä he siksi esiinny tässä taulukossa.

0	1	2	3
BD	B		
DIK	K		
CDEIK	C		
CK			
BCDGI	D		
BCIJK	K		
DCJK	D		
CDEGIK	DEG	G	
EI			
CK	CK		
CFI	F		
CDE	CE		
ABCEFK	ABCEFK	CEF	
BEFIJK	BEFK	EK	K
FGK	F		
K	K		

Sarakkeet:
(0) Perusalgebran testissä suorittamattomat tehtävät.
(1) 1. uusintatestissä suorittamattomat tehtävät.
(2) 2. uusintatestissä suorittamattomat tehtävät.
(3) 3. uusintatestissä suorittamattomat tehtävät.

Ammattikoulupohjaisilla luokilla huonoa lähtötasoa kuvaa se, että vain noin joka viides osaa ratkaista yksinkertaisen yhtälön, esimerkiksi yhtälön. Näillä luokilla algebran opetukseen on käytetty ensin 74 oppituntia. Sitten on pidetty perusalgebran testi, jonka tyypillisesti neljännes luokasta läpäisee ensimmäisellä kerralla; jotkut tarvitsevat viitisen uusintaa.

Kukaan ei ole purnannut – kaikki oppilaat ovat kokeneet perusalgebran kohentamisprojektin kotitehtävineen ja uusintatesteineen mielekkääksi. Vaikka kaikki suorittavat kaikki tehtävätyypit, virheitä tulee jatkossakin, koska laskentarutiinien hankkiminen on laiminlyöty aiemmissa opinnoissa.

Opiskelijoiden näkemyksiä huonon osaamisen syistä

Kun ylioppilailta on kyselty, miksi he eivät ole oppineet matematiikan perusasioita lukiossa, he eivät ole moittineet matematiikan opettajia epäpäteviksi; päinvastoin moni on kiitellyt opettajansa perusteellista ja innostavaa opetusta. Opiskelijoiden esittämät syyt huonoon osaamiseen voidaan luokitella seuraaviin neljään ryhmään, joiden perässä on henkilökohtaisia kommentteja ammattikorkeakoulun opettajan näkökulmasta.

Lukion oppimäärän laajuus. Asioita on niin paljon, että niitä ei ehditä käydä kunnolla läpi. *Kommentti:* Ottaen huomioon matematiikan perusasioiden surkean osaamisen, aihepiirien ja aineiston karsintaa olisi tehtävä paljon. On tärkeää, että kaikki oppivat matematiikan perusteet hyvin lukiossa ja aiemmissa opinnoissa. Hyvien perustaitojen turvin sitten ne, jotka tarvitsevat paljon matematiikkaa ammattiopinnoissaan, oppivat tarvitsemansa matematiikan osa-alueet kyllä myöhemminkin: tiedämme, että niistä lukiolaisista, jotka 1950-, 1960-, 1970-luvuilla suorittivat laajuudeltaan nykyistä huomattavasti suppeamman oppimäärän, on tullut esimerkiksi maailmanmenestystä saavuttaneiden kännyköiden ja risteilyalusten suunnittelijoita, kansainvälisiä matematiikan tutkijoita.

Motivaatio. Monella opiskelijalla ei lukiossa ole ollut motivaatiota opiskella matematiikkaa; ei ole ollut tietoa siitä, että tulee tarvitsemaan matematiikkaa ammattiopinnoissaan. *Kommentti:* Matematiikan motivaatio-ongelma alkaa ilmeisesti jo ala-asteella, kun peleihin ja muuhun arkipäivään liittyvä aritmetiikka on opittu, ja päättyy vasta korkeakouluissa, joissa matematiikkaa toden teolla käytetään eri aloilla. Muistan, kuinka lukion matematiikan opettajani *Ahti Kantanen* kertoi heti aluksi erittäin painokkaasti, että matematiikkaa tulevat tarvitsemaan myöhemmissä opinnoissaan kaikki paitsi papit. Hän ei yrittänyt koko ajan esittää, kuinka juuri opiskelemamme asiat olisivat välittömästi tarpeen käytännön ongelmissa. Se, että nykyisin usein yritetään jatkuvasti vakuutella matematiikan hyödyllisyyttä ongelmanratkaisuilla, on oppilaiden aliarvioimista ja johtaa ongelmien käsittelyyn, joilla on vähän tekemistä varsinaisen, ammattiopinnoissa ja matematiikan opinnoissa tarvittavan matematiikan kanssa, sekä kirjojen paisutteluun niin, että oppilaiden on vaikea hahmottaa matematiikan keskeisiä asioita. Martio (2001) vertaa ongelmanratkaisun korostamista 1970-luvun virheeseen "uuteen matematiikkaan" ja esittää, että suomalaisten koululaisten menestyminen eräissä kansainvälisissä vertailuissa perustuu sellaiseen osaamiseen ongelmien ratkaisuissa, mikä ei kuvasta varsinaisen matematiikan osaamista. Varmasti monet ongelmanratkaisut ovat lukiossa motivoivia, mutta tärkeintä olisi luoda matemaattiset valmiudet ammattialojen todellisten ongelmien käsittelyyn ja matematiikan opiskeluun korkeakouluissa. Opettajien on tunnettava matemaattiset tarpeet korkeakouluopinnoissa ja välitettävä tätä tietoutta oppilaille motivaatioksi. Globaalissa maailmantaloudessa Suomen hyvinvoinnin ylläpito perustuu teknologiseen osaamiseen, jossa matematiikalla on ratkaisevampi merkitys kuin yleisesti tiedetään.

Vähäiset vaatimukset. Monet opiskelijat moittivat lukio-opetustaan siitä, että niistä pääsi liian helposti läpi osaamatta edes perusasioita; poissaoloja sallittiin; pakollisia kotitehtäviä toivottiin nyt jälkikäteen. *Kommentti:* Korkeakouluissa vaaditaan todellista eikä suhteellista osaamista. Absoluuttista osaamista perusasioissa on vaadittava jo aiemmin: ammattikorkeakouluissa näkee paljon ylioppilaita, jotka ovat lukiossa tottuneet siihen, että kursseista pääsee läpi vähäisin tiedoin, ja jotka tajuavat realiteetit liian myöhään joutuen lopulta lopettamaan osaamattomuuden suohon vajonneet opintonsa. Opiskelijoiden oman edun vuoksi matematiikan opettajan tulee vaatia matematiikan perusteiden osaaminen kaikilta oppilailta – mitään sivistyksellistä vahinkoa ei tapahdu, vaikka sitten myöhemmin osoittautuukin, että jotkut eivät matematiikkaa tarvitse.

Hitaammin oppivien tukeminen. Lukion opettajiansa ovat eräät opiskelijat arvostelleet siitä, että he kiinnittivät huomionsa hyvin menestyviin oppilaisiin ja jättivät hitaammin matematiikkaa oppivat oman onnensa nojaan. *Kommentti:* Matematiikassa tosiaan perinteisesti kunnioitetaan huippuosaajia, mutta jokaisen opettajan tulisi kuitenkin tietää, kuinka laajasti matematiikkaa tarvitaan jatko-opinnoissa ja kuinka tärkeää siksi on kärsivällisesti varmistaa, että kaikki oppivat hyvin matematiikan perusasiat. Moni hitaasti matematiikkaa oppiva ei myöhemmin sitä aktiivisesti käytä ammattielämässä, mutta tarvitsee sitä korkeakouluopinnoissa. Olen opettanut monia lukion matematiikassa kuutosen saaneita opiskelijoita, jotka ovat menestyneet hyvin matematiikassa motivoiduttuaan sitä harjoittelemaan ja joista on tullut hyviä insinöörejä.

Johtopäätöksiä ja ehdotuksia

Kurssimuotoisessakin lukiossa on huolehdittava perusasioiden osaamisesta, ettei käy niin, että opiskelija pääsee jokaisesta kurssista läpi opittuaan pintapuolisesti joitain uusia ideoita, osaamatta kuitenkaan matematiikan perusteita. Tämä koskee myös lyhyen matematiikan lukijoita. Esimerkiksi rakennusosastolla opiskelevista ylioppilaista noin kolmasosa on suorittanut lyhyen matematiikan. Siis myös lyhyen matematiikan opettajan on opiskelijoiden oman edun vuoksi vaadittava, että he osaavat hyvin matematiikan perusteet. Etukäteen lukiossa ei voi tietää, ketkä tulevat myöhemmin tarvitsemaan matematiikkaa.

Vaikka korkeakoulujen ammattiaineiden kannalta on tärkeintä, että opiskelijat hallitsevat rutiininomaisesti perusmatematiikan, jota ammattiaineet sitten käyttävät hyväksi omia ilmiöitään kuvatessaan ja niiden ongelmia ratkaistessaan, on erittäin tärkeää, että opetettavat asiat perustellaan hyvin. Perustelut edistävät oppilaiden omakohtaista ajattelua – vastakohtana on se ikävä tilanne, että opiskelija kokee matematiikan tylsänä kaavakokoelmana. Lukiossa ja ammattikouluissa perustelujen ei tarvitse olla korkeakoulutasoisia. Vaikeat täsmälliset perustelut voidaan esittää alaviitteissä tai liitteissä lahjakkaimpien opiskelijoiden hyödyksi.

Matematiikan perusteita opiskeltaessa on myös opittava muutamia asioita ulkoa kuten esimerkiksi trigonometristen funktioiden määritelmät, jotka vain noin puolet rakennusosaston uusista ylioppilaista muisti. Kun esimerkiksi statiikassa jatkuvasti esiintyy sinejä ja kosineja, ei opiskelija ehdi oppitunneilla kaavakokoelmaa selaten saada selville niiden määrittelyjä. Se, että muistaa perusmääritelmät ja -tulokset, joita matematiikassa ei ole paljon, on nykyisenkin kasvatustieteellisen perussuuntauksen, konstruktivismin, mukaista: ihmisen täytyy rakentaa omaa osaamista, ja yhtenä osatekijänä siinä on perusasioiden muistaminen.

Ammattikorkeakouluissa uusia asioita opetettaessa näkee, kuinka harjaantumattomia useat opiskelijat ovat hahmottamaan ja painamaan mieleensä opetettavan asian keskeisiä määritelmiä ja tuloksia. Kaavakokoelmien käytöllä on ollut tässä suhteessa turmiollinen vaikutus. Kaavakokoelman sijasta opettaja voi selvästi sanoa, mitkä asiat täytyy osata ja muistaa, ja hän voi kokeessa antaa vähemmän tärkeät yhtälöt. Kaavakokoelmien käytön kritiikkiä esitettiin jo Kivelän (1994) artikkelissa.

Ylioppilaskirjoitukset

Matematiikan perusteiden oppimiseksi jo lukiossa on esitetty erittäin hyvä ehdotus: matematiikan ylioppilaskirjoitusten jakaminen kahteen osaan (Toivonen, 1995).

Kaksiosaista koetta ovat MAOL ja SMFL kannattaneet (Björkman, Parviainen, 2000). Ensimmäinen osa käsittäisi pakollisten kurssien keskeisten sisältöjen hallintaa mittaavia, lähinnä mekaanisia tehtäviä. Siihen sisältyisi siten edellisen kaltaisia perusalgebran tehtäviä sekä eräitä geometrian ja trigonometrian tehtäviä sekä mekaanisia derivointi- ja integrointitehtäviä. Taulukkokirjojen käyttö ei olisi sallittua. Toinen osa käsittäisi matematiikan soveltamiseen ja ongelmien ratkaisuun liittyviä tehtäviä, joissa matemaattinen malli on ensin itse muodostettava ja sitten ratkaistava.

Myös Ylioppilastutkintolautakunnan vuonna 1998 asettama matematiikan kokeen kehittämisryhmä piti kaksiosaista koetta kaikin puolin hyvänä, mutta katsoi kuitenkin, ettei tässä vaiheessa käytännön järjestelyjen vaikeuden vuoksi ole mahdollista ehdottaa kahteen kokeeseen siirtymistä (Lahtinen, 1999). Nyt olisikin pohdittava, miten käytännön järjestelyt voitaisiin toteuttaa. Ehkä hankalin puoli alkuperäisessä ehdotuksessa oli kokeen kaksipäiväisyys. Kuitenkin matematiikan taidot voidaan varmasti testata myös nykyisen kuuden tunnin aikana. Kaksiosainen koe voitaisiin toteuttaa esimerkiksi seuraavasti: ensin on 2 tunnin matematiikan perusteiden koe, jossa on ratkaistava ilman taulukkokirjaa esimerkiksi 40 suoraviivaista, mekaanista tehtävää; ajan loputtua vastauspaperit kerätään pois ja jaetaan soveltavia tehtäviä neljän tunnin ajaksi. Arvostelussa voitaisiin kumpaakin osaa painottaa yhtä paljon.

Viitteet

Björkman, Jouni ja Pentti Parviainen (2000), Matematiikan ja fysiikan osaaminen hyödyllistä yhteiskunnassa, Tekniikan Akateemiset, 4/2000.

Kinnunen, Launonen, Sorvali, Toivonen (1985), Teknisten ammattien matematiikka 2Z, WSOY.

Kivelä, Simo, 1994, Minne olet menossa, lukion matematiikka, Dimensio 4/94.

Lahtinen, Aatos (1999), Ylioppilastutkinnon matematiikan kokeen uudistus, Dimensio 4/99.

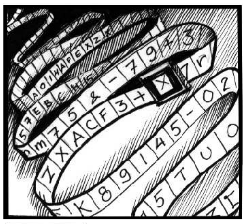
Martio, Olli (2001), Osataanko matematiikkaa sittenkään?, Yliopisto-lehti 10/01.

Peltola (2001), Matematiikan osaamistasoa on parannettava, Dimensio 4/01.

Toivonen, Pertti (1995), Esitutkinta matematiikan yokokeeseen, Dimensio 5/95.

Toivonen, Pertti (1998), Insinöörikoulutuksen matematiikan opetuksen ongelmia, Helsingin ammattikorkeakoulun julkaisuja. Sarja B: Raportit 2.

Artikkeli on julkaistu aikasemmin *Dimension* numerossa 5/03, ja sen Solmussa julkaisuun on saatu lupa sekä lehdeltä että artikkelin kirjoittajalta.



Polynomit, interpolaatio ja funktion approksimointi

Heikki Apiola
Lehtori
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Johdanto, taustaa

Kirjoitus liittyy aihepiiriin *numeerinen analyysi, tieteellinen laskenta, tietokoneen käyttö matematiikassa*. Siihen liittyviä kirjoituksia on jonkinverran esiintynyt Solmun historian aikana, esimerkiksi

Jouni Seppänen: Fibonaccin lukujen laskennasta (`solmu.math.helsinki.fi/1998/2/seppanen/`),

Oma kirjoitukseni symbolilaskentaohjelmistosta Maple (`solmu.math.helsinki.fi/1999/5/apiola/`),

Antti Rasila: Numeerista matematiikkaa Python-kielellä (`solmu.math.helsinki.fi/2004/2/python2.pdf`).

Tarkoitukseni on aloittaa kirjoitussarja, jossa käsitellään numeerisen matematiikan eri teemoja siinä hengessä, että esitiedoiksi riittävät lukion matematiikan tiedot. Kirjoitukset voisivat parhaassa tapauksessa tarjota ideoita lukion erikoiskursseille, jotka ovat tyyppiä ”numeerinen analyysi/tieteellinen laskenta/matemaattinen mallinnus”.

Samalla esittelen alan tietokoneohjelmistojen käyttöä. Niitä on kahta päätyyppiä: numeeriset ja symboliset. Jälkimmäisistä kirjoitin yllä mainitussa viitteessä aika laajasti Tällä kertaa esittelen pientä nurkkaa suuresta ja kauniista ohjelmasta nimeltään *Matlab*. Kyseessä on hyvin tehokas ja suuren suosion maailmalla saanut tieteellisen laskennan työkalu. Kts. `www.mathworks.com`.

Lukija, joka haluaa etupäässä seurata aiheen matemaattista kehittelyä, voi jättää ohjelmakoodit ja selostukset lukematta ja suorittaa joitakin laskuja vaikkapa omalla laskimellaan. Toisaalta MATLAB:sta kiinnostunut lukija voi opetella rinnakkain sekä MATLAB-ajattelua että sen tukemaa matematiikkaa. Tässä on hyvä käyttää lisäapuna vaikkapa opasta: `www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/`

Harvalla koululaisella on MATLAB-ohjelma käytössään, siksi onkin suositeltavaa hakea verkosta julkisohjelma OCTAVE, `www.octave.org/`, joka on ”riisuttu versio” MATLAB:sta. Sillä voidaan tehdä kaikki kirjoituksen esimerkit, ja sen avulla pääsee sisälle MATLAB:n ajatusmaailmaan.

Luettavuuden parantamiseksi ja matemaattisen juonen seuraamisen helpottamiseksi sijoitan suurimman osan ohjelmakoodeista ja ohjeista tekstitiedostoihin, joiden sisältöä en ota varsinaiseen kirjoitukseen mukaan. Monet näistä ovat ajovalmiita MATLAB-skriptejä, eli komentotiedostoja. Myös kaikki kirjoituksen kuvien tekemiseen käytetyt MATLAB-skriptit ovat mukana. Koodit ja ohjeet ovat saatavilla sivulta `solmu.math.helsinki.fi/2004/3/apiola/`, josta ne voi haluttaessa suoraan leikata/liimata Matlab-istuntoon.

Symbolilaskennasta kiinnostunut lukija voi aivan hyvin (ja jopa helpomminkin) tehdä esimerkit Maplella tai Mathematicalla. Edellisen suhteen ohjeita on saatavissa edellä mainitusta kirjoituksesta `solmu.math.helsinki.fi/1999/5/apiola`. Jos sinulla sattuu olemaan Maple käytettävissäsi ja haluat ohjeita esimerkkeihin, niin lähetä mailia: `heikki.apiola@hut.fi`, saat paluupostissa asiaankuuluvan Maple-työarkin.

Esitiedot. Kirjoituksen lukemiseen tarvittavat matemaattiset esitiedot sisältävät vain perusalgebraa, hieman tottumusta polynomien käsittelyssä ja funktioopin perusteita.

Johdattelua

Ajatellaanpa, että veden viskositeetti on määrätty kokeellisesti eri lämpötiloissa, ja saatu seuraavanlainen taulukko, joka on annetulla tarkkuudella virheetön.

Lämpötila	2°	5°	7°	15°
Viskositeetti	1.670	1.519	1.430	1.140

Taulukko 1.

Voitaisiin kysyä vaikkapa viskositeetin arvoa lämpötilassa 10°.

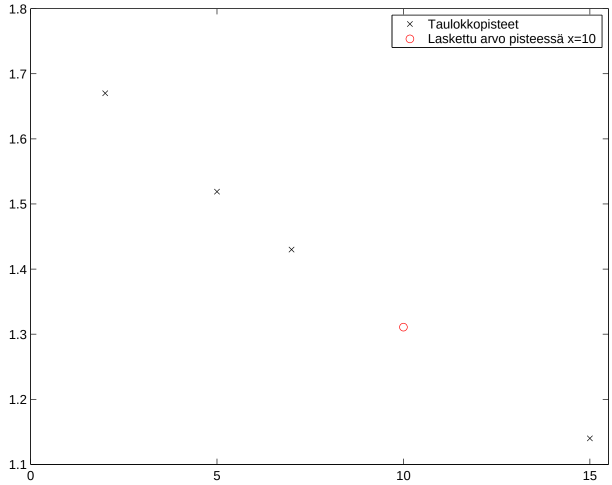
Eräs ratkaisuyritys olisi sovittaa aineistoon polynomi siten, että se kulkee kaikkien annettujen taulukkopisteiden kautta. Tällöin on luonnollista hakea kolmannen asteen polynomia, koska siinä on neljä määrättävää kerrointa, ja annettuna on sama määrä pisteitä. Saadaan neljän yhtälön ja neljän tuntemattoman yhtälöryhmä, joka voidaan ratkaista eliminaatiomenetelmällä. Näin saatavien kertoimien avulla voidaan kirjoittaa ratkaisupolynomi:

$$\begin{aligned} p(x) = &-2.6282 \times 10^{-5} x^3 + 1.5346 \times 10^{-3} x^2 \\ &-6.0051 \times 10^{-2} x + 1.7842 \end{aligned}$$

Kts. `viskositeetti.m`.

Tällaista polynomia, jonka kuvaaja kulkee kaikkien annettujen taulukkopisteiden kautta, sanotaan tähän taulukkoon ("dataan") liittyväksi *interpolaatiopolynomiksi*.

Asettamallemme tehtävälle saadaan nyt ratkaisuapproksimaatio laskemalla $p(10) = 1.310$.



Kuva 1. Mittauspisteitä ja interpoloitu piste.

Tässä kirjoituksessa opitaan (vielä) yksinkertaisempi menetelmä vastaavanlaisten tehtävien ratkaisemiseksi. Menetelmän verraton arvo on siinä, että samalla, kun saadaan kauniin yksinkertainen ratkaisutapa, tarjoutuu myös helppo tapa yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon todistamiselle.

Miten voidaan tutkia edellä olevan ratkaisun mielekkyyttä ja virhekäytöstä? Näitä keskeisiä kysmyksiä kosketellaan (kevyesti) joidenkin dramaattistenkin esimerkkien valossa kirjoituksen loppupuolella. Samalla pohdiskellaan, milloin interpolaatio soveltuu ja milloin ei, ja esitellään myös muiden funktioiden kuin polynomien käyttöä tarkoitukseen.

Approksimointia interpoloiden ja interpoloimatta

Olkoon annettu taulukko

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Taulukko 2.

Edellä olevaa johdantoesimerkkiä mukaillen ja yleistäen voidaan kysyä funktiota g, jonka kuvaaja kulkee annettujen taulukkopisteiden kautta.

Luonnollisin lähtökohta on etsiä polynomia. Tehtävänä on silloin määrittää korkeintaan astetta n oleva polynomi p, joka toteuttaa ehdot

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n.$$

Interpolaatio tarjoaa joissakin tapauksissa menetelmän annetun funktion approksimointiin annetulla välillä.

Tarkastellaan tässä lyhyesti myös muita approksimaatiotapoja myös muilla funktioilla kuin polynomeilla.

Katsotaan tilannetta kolmelta eri näkökannalta.

1. Voidaanko löytää yksinkertainen matemaattinen funktio g, jonka arvoja nämä annetut taulukkoarvot ovat, ts. $g(x_k) = y_k, k = 0, \ldots, n$?

2. Taulukko on peräisin mittauksista, joissa saattaa esiintyä virheitä. Tehtävänä olisi löytää matemaattinen lauseke, joka approksimoi aineistoa, mutta kuvaaja ei kulje tarkalleen annettujen taulukkopisteiden kautta.

3. On annettu funktio f, mahdollisesti tietokoneohjelman muodossa. Funktion arvojen $f(x)$ laskenta on ”kallista”, eli vaatii paljon laskentatehoa. Kysymys kuuluu: Voidaanko löytää yksinkertaisempi funktio g, joka approksimoi riittävän tarkasti funktiota f ja jonka arvojen laskenta on ”halvempaa”. Funktiolta g vaaditaan usein lisäksi yksinkertaisuutta esimerkiksi siten, että sitä on helppo derivoida ja integroida.

Kohdassa 1) on kysymys interpolaatiosta, funktio g voi olla polynomi, mutta se voi olla muutakin tyyppiä.

Kohdan 2) tapauksessa interpolaatio ei ole järkevä tapa, koska on turha yrittää pakottaa approksimaatiota kulkemaan virhettä sisältävien arvojen kautta tarkasti. Tähän sopii yleensä hyvin ns. pienimmän neliösumman approksimaatio, jolla annettujen arvojen pääsuunta, ”trendi” saadaan esitetyksi.

Kohtaan 3) voi soveltua interpolaatio, mutta tilanteesta riippuen myös jokin muu approksimointitapa.

Polynomit ovat hyvä lähtökohta approksimoiviksi funktioiksi. Niillä on helppo suorittaa yhteen- vähennys- ja kertolaskuja, niitä voidaan derivoida ja integroida helposti, jne.

Muitakin funktioluokkia esiintyy sovellutuksissa. Jaksollisten ilmiöiden mallintamisessa on luonnollista käyttää ”trigonometrisia polynomeja”, eli muotoa

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

olevia funktioita.

Entäpä, jos käytössämme on suuri taulukko, sanokaamme 1000 arvoparia (x_k, y_k)? Tällöin interpolaatiopolynomin asteluku voisi olla 999. Tällainen polynomi heilahtelee varsin voimakkaasti, ja sen laskenta on muutenkin hyvin työlästä ja virhealtista. Tilanteeseen soveltuu luontevasti ns. splinifunktio, joka koostuu ”polynomipaloista”. Näitä esitellään lyhyesti tarinamme lopussa.

Kouluesimerkki, logaritmitaulukko

Lähdetään liikkeelle jostain taulukoidusta funktiosta. Kaikille vanhemman polven koulunkävijöille tuttuakin tutumpi funktiotaulukko on logaritmitaulu. Kun taulukon käytön tekniikan osasi, sai varmasti yhden laskun ylioppilaskirjoituksissa aikaan.

Tehtävänä oli yleensä laskea ”vaikea tehtävä”, kahden monella numerolla annetun luvun a ja b tulo hakemalla taulukosta $\log a$ ja $\log b$ ja laskemalla näiden summa (”helppo tehtävä”). Alkuperäisen tehtävän ratkaisu saatiin hakemalla taulukosta logaritmipuolelta summaa $\log a + \log b$ lähinnä oleva y-arvo ja katsomalla käänteiseen suuntaan vastaava x-arvo.

Jos haluat lisähavainnollistusta ja hieman logaritmiharjoittelua, avaapa sivu `www.eminent.demon.co.uk/sliderul.htm`. Kuvan ja perusteellisempaa opastusta aiheeseen löydät vaikkapa sivulta `www.sliderules.clara.net/`.

Tehtävätyyppi on mekaanisena suorituksena aika mielenkiinnoton, mutta sisältää koko joukon matemaattista viisautta. Kuten yllä olevissa viitteissä esitellään, periaate on implementoitu elegantiksi laskentavälineeksi, laskutikuksi, jota ilman ei vielä niinkin myöhään kuin 1960–1970-lukujen vaihteessa voitu kuvitella luonnontieteilijöiden ja insinöörien koskaan pärjäävän.

Lisäksi siinä näkyy pelkistetyssä muodossa eräs varsin paljon matematiikassa ja sen sovelluksissa käytettävä yleinen periaate: ”Vaikea” tehtävä muunnetaan sopivalla muunnoksella ”helpoksi”, ratkaistaan ”helppo” tehtävä ja käänteismuunnetaan ”helppo” ratkaisu.

Tämänkertaisen teeman kannalta oleellista on, että tuossa koulutehtävässä oli mukana interpolaatio. Logaritmien summa ei yleensä osu tarkalleen taulukoituun arvoon, joten sitä joudutaan pyöristämään. Jos arvo on lähempänä puoliväliä kuin kumpaakaan päätepistettä, saadaan parempi tarkkuus laskemalla päätepistearvoja vastaavien x-arvojen keskiarvo. Hienommin sanottuna, suoritetaan *lineaarinen interpolaatio* taulukkopisteiden välillä.

Esimerkkinä lasketaan taulukko logaritmifunktion arvoista pisteissä $1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$.

Suoritamme laskut MATLAB:lla (tai OCTAVE:lla).

MATLAB-ohjelmalle annettavat komennot alkavat kehotemerkeillä `(>>)`. Ohjelman palauttamat tulokset ovat komentoa seuraavilla riveillä ilman kehotealkua. (Huomaa, että MATLAB:ssa `log` tarkoittaa luonnollista, e-kantaista logaritmia.)

```
>> X=1:0.2:2     % Luvut alkaen 1:stä, 0.2:n välein, 2:een saakka.
X =
    1.0000    1.2000    1.4000    1.6000    1.8000    2.0000
>> Y=log(X)      % Logaritmifunktion arvot X-pisteissä.
Y =
         0    0.1823    0.3365    0.4700    0.5878    0.6931
>> xytaulukko=[X;Y]   % 2-rivinen ‘‘matriisi’’,jossa X- ja Y-arvot
allekkain,
xytaulukko =
    1.0000    1.2000    1.4000    1.6000    1.8000    2.0000
         0    0.1823    0.3365    0.4700    0.5878    0.6931
```

Matlab-käsitteitä

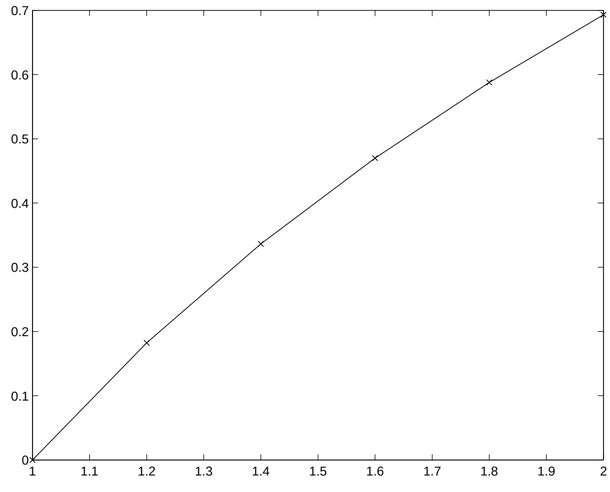
Jos haluat perehtyä aiheeseen tarkemmin, pääset alkuun edellä mainitulla lyhyellä www-oppaalla, kts. myös kirjallisuusviitettä 5.

Esittelemme nyt lyhyesti näihin riveihin liittyviä periaatteita.
MATLAB operoi ”*matriiseilla*”, jolla tarkoitetaan suorakulmion muotoista lukutaulukkoa. Erikoistapaus matriisista on *vektori*, jossa on vain yksi rivi (vaakavektori) tai yksi sarake (pystyvektori).

Muuta MATLAB-oppia emme varsinaiseen kirjoitukseen sisällytä. Oheismateriaalina olevat MATLAB-komentotiedostot on varustettu runsailla selittävillä ja opettavaisilla kommenteilla. Ne ovat `.m`-loppuisia tekstitiedostoja ja saatavissa siis sivulta

`solmu.math.helsinki.fi/2004/3/apiola/`.

Matriisilaskentaa ei tarvita kirjoituksen ymmärtämiseksi, mutta olkoon se pikku maistiaisena siitä käsitteistöstä, jonka kaikki matematiikkaa ja sen sovelluksia koulun jälkeen opiskelevat hetimiten kohtaavat. Samalla saamme hyödyllisen puhetavan, jonka avulla MATLAB-kielen operaatioita on helppo kuvata ja ymmärtää.



KUVA 2. Logaritmifunktion paloittain lineaarinen interpolaatio.

Yllä olevassa laskussa muodostamme vektorin `X`, johon sovellamme funktiota `log`. Tällöin MATLAB soveltaa funktiota `log` argumenttivektorin jokaiseen komponenttiin, joten saamme yhdellä käskyllä kaikkien `log`-funktion arvojen vektorin `Y`.

Jos suoritamme MATLAB-komennon `plot(X,Y)`, ohjelma piirtää `(X(k),Y(k))`-pisteiden väliset janat. Näin saamme kuvan, joka esittää logaritmifunktion *“paloittain lineaarista interpolaatiota”* annetuissa x-pisteissä.

Ennenkuin jatkamme approksimointiteemaa, kertaamme hiukan polynomien ominaisuuksia.

Polynomeista

Koulumatematiikassa polynomit tulevat varmasti jokapäiväisiksi tuttaviksi. Niillä opitaan suorittamaan peruslaskutoimituksia, derivointi ja integrointi on sujuvaa. Niiden kuvaajat tulevat tutuiksi, ainakin alhaisilla asteluvuilla, polynomiyhtälöitä opitaan ratkaisemaan, kun asteluku ≤ 2, jne.

Tässä kirjoituksessa valotan eräitä polynomien käyttöalueita, joita matematiikassa on miltei rajattomasti.

Aloitan kertaamalla koulusta tutun lauseen.

Lause 1. Jos polynomilla

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

on nollakohta x_0, niin $p(x)$ on jaollinen $(x - x_0)$:lla.

Todistus. Muodostetaan erotus

$$p(x) - p(x_0) = a_1(x - x_0) + a_2(x^2 - x_0^2) + \ldots + a_n(x^n - x_0^n).$$

Jokaisessa termissä $(x^k - x_0^k)$ on $(x - x_0)$ tekijänä johtuen kaavasta

$$x^k - x_0^k = (x - x_0)(x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \ldots + x x_0^{k-2} + x_0^{k-1}).$$

□

Tehtävä 1. Johda yllä oleva kaava. Voit laskea ensin vaikka tapauksen $k = 3$, jolloin varmasti näet koko juonen. Kerro vain auki kaavan oikea puoli sopivassa järjestyksessä.

Saamme heti yksinkertaisen, mutta tärkeän tosiasian.

Seuraus 2. [Yksikäsitteisyys] Jos kaksi korkeintaan astetta n olevaa polynomia yhtyy $(n+1)$:ssä eri pisteessä, niin ne yhtyvät kaikkialla (ts. ovat identtiset).

Todistus. Olkoot p ja q korkeintaan astetta n olevia polynomeja, jotka saavat samat arvot pisteissä $x_0, \ldots, x_n$. Tällöin erotuspolynomi $r(x) = p(x) - q(x)$ on niinikään korkeintaan astetta n. Olkoon tuo asteluku $d \leq n$. Erotuspolynomilla r on oletuksen mukaan $d+1$ (jopa $n+1$) erillistä nollakohtaa $x_0, \ldots, x_d$. Kun lausetta sovelletaan peräkkäin d kertaa, seuraa erotuspolynomille esitys

$$r(x) = c(x - x_0) \ldots . (x - x_{d-1}),$$

missä c on jokin vakio. Koska myös $r(x_d) = 0$ ja kaikki tekijät $x_d - x_i, i = 0 \ldots d-1$ ovat nollasta erillisiä, on tulon nollasäännön mukaan oltava $c = 0$, eli erotuspolynomi $r(x) = p(x) - q(x)$ on identtisesti 0. □

Huomautus 1. Yksinkertaisimmassa tapauksessa $n = 1$ on geometrisesti kyse siitä, että tason kaksi pistettä määrää yksikäsitteisesti suoran. Tapaus $n = 2$ tarkoittaa, että 3 pistettä määrää yksikäsitteisesti paraabelin.

Huomautus 2. Jos olemme tavalla tai toisella löytäneet interpolaatiotehtävälle ratkaisun, niin seuraus 2:n mukaan tämä on ainoa ratkaisu. (Toki polynomit saattavat esiintyä erilaisissa muodoissa, mutta yksikäsitteisyys (samuus) merkitsee, että ne ovat sievennettävissä toisikseen.)

Lagrangen interpolaatiomenetelmä

Kerrataan vielä:

Interpolaatiotehtävä Annettu x_k- ja y_k-pisteet, $k = 0, \ldots, n$ (taulukko 1). Määrättävä korkeintaan astetta n oleva polynomi p siten, että $p(x_k) = y_k, k = 0, \ldots, n$.

Voisimme muodostaa yhtälösysteemin polynomin kertoimien ratkaisemiseksi, kuten teimme johdantona olevassa viskositeettiesimerkissä. Jotta saisimme tätä kautta osoitetuksi ratkaisun olemassaolon yleisesti, joutuisimme kohtalaisen pitkiin matriisilaskennallisiin kehittelyihin. Lisäksi tämä ratkaisutapa on numeerisesti "häiriöaltis", pienillä lähtövirheillä on taipumus moninkertaistua laskun kuluessa.

Esitämme hämmästyttävän suoraviivaisen ratkaisun tehtävällemme. Se on täysin riippumaton yhtälöryhmien teoriasta. Emme tarvitse matriiseja emmekä determinantteja. Saamme olemassaolon todistetuksi konstruoimalla suoraan käyttökelpoisen muodon tehtävän ratkaisulle.

Itse asiassa tehtävälle on kaksi nerokkaan yksinkertaista ratkaisutapaa, joihin kumpaankin liittyy kuuluisan matemaatikon nimi: *Lagrange* ja *Newton*. Esitämme ratkaisun edellisen mukaan.

Lineaarinen interpolaatio

Jotta idea tulisi esiin mahdollisimman pelkistetysti, lähdetään yksinkertaisimmasta tilanteesta, jossa pisteitä on kaksi ja kyseessä on siten lineaarinen interpolaatio.

Analyyttisen geometrian tiedoilla osaamme muodostaa suoran kahden annetun pisteen (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) kautta. Voimme kirjoittaa interpolaatiopolynomin muotoon:

$$p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

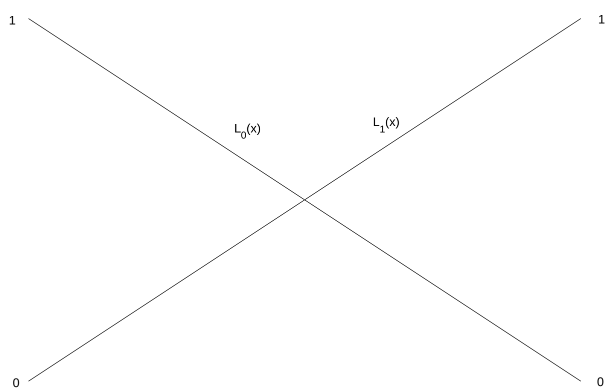
Jotta saataisiin yleistyskelpoinen muoto, kirjoitetaan kaava painotettuna keskiarvona y-arvoista keräämällä y-termien kertoimet tekijöiksi:

$$p(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Merkitään kaavassa esiintyviä ensimmäisen asteen polynomeja $L_0(x)$ ja $L_1(x)$, jolloin siis

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x).$$

Polynomeilla L_0 ja L_1 on ominaisuudet $L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0$ ja $L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$. Niitä kutsutaan 1. asteen *Lagrangen kertojapolynomeiksi*.



Kuva 3. 1. asteen Lagrangen polynomit L_0 ja L_1.

Esimerkki 1. Olkoon annettu logaritmitaulukkoarvot $\ln 9.0 = 2.1972$ ja $\ln 9.5 = 2.2513$. Laske lineaarista interpolaatiota käyttäen likiarvo $\ln 9.2$:lle.

Ratkaisu. Lasketaan Lagrangen polynomit, kun $x_0 = 9.0, x_1 = 9.5$. (Huomaa, että Lagrangen polynomit määräytyvät pelkästään x_0- ja x_1-arvoista.)

$$L_0(x) = \frac{x - 9.5}{9.0 - 9.5},\ L_1(x) = \frac{x - 9.0}{9.5 - 9.0}.$$

Kun sijoitetaan $x = 9.2$, saadaan $L_0(9.2) = 0.6$, $L_1(9.2) = 0.4$. Siis $p(9.2) = y_0 \cdot 0.6 + y_1 \cdot 0.4 = 2.1972 \cdot 0.6 + 2.2513 \cdot 0.4 = 2.2188$.

Miten suuri virhe tehdään? Logaritmin arvo 5:n numeron tarkkuudella on 2.2192, joten virhe on 2.2192 - $2.2188 = 0.0004$. Pyöristyksen jälkeen saamme 4 oikeaa numeroa.

Kvadraattinen (eli toisen asteen) interpolaatio

Miten voisimme yleistää edellä olevaa menettelyä? Kun siirrymme lineaarisesta kvadraattiseen tapaukseen, tulee samalla selvästi näkyviin, miten yleinen tilanne hoidetaan.

Nyt on siis annettu 3 pistettä x_0, x_1, x_2 ja vastaavat y_0, y_1, y_2. Jos osaisimme muodostaa toisen asteen polynomit L_0, L_1, L_2 siten, että

$$\begin{array}{lll} L_0(x_0) = 1, & L_0(x_1) = 0, & L_0(x_2) = 0 \\ L_1(x_0) = 0, & L_1(x_1) = 1, & L_1(x_2) = 0 \\ L_2(x_0) = 0, & L_2(x_1) = 0, & L_2(x_2) = 1, \end{array}$$

voisimme kirjoittaa interpolaatiopolynomin heti:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x).$$

Perustelu:

1) Polynomi on toisen asteen polynomien summana korkeintaan astetta 2.

2) Lisäksi

$$p(x_0) = y_0 \underbrace{L_0(x_0)}_{1} + y_1 \underbrace{L_1(x_0)}_{0} + y_2 \underbrace{L_2(x_0)}_{0} = y_0.$$

Aivan samoin saadaan $p(x_1) = y_1$ ja $p(x_2) = y_2$.

Siispä asettamamme tehtävän ratkaisuna on tämä polynomi p. Kaiken lisäksi se on seuraus 2:n perusteella yksikäsitteinen.

Miten sitten tuollaiset L_k-polynomit löydetään? Katsotaan vaikka L_0 :aa. Polynomin pitää saada arvo 0 pisteissä x_1 ja x_2. Sellainen polynomi on $c(x-x_1)(x-x_2)$, missä c on mielivaltainen vakio. Määrätään vakio c siten, että ehto $L_0(x_0) = 1$ toteutuu, ts. $c(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 1$, josta saadaan kerroin $c = 1/((x_0 - x_1)(x_0 - x_2))$, joten

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

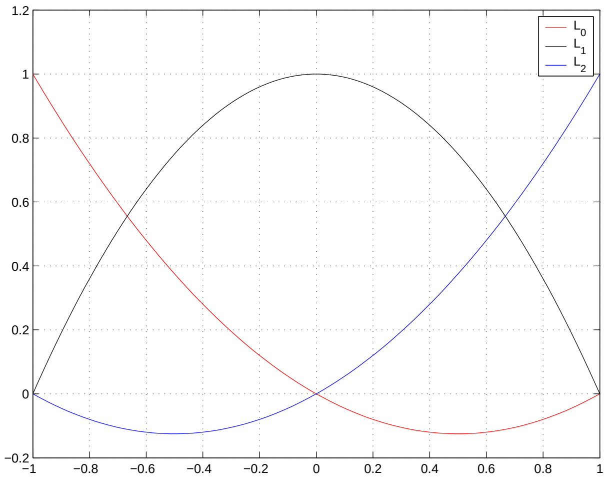
Aivan samoin saadaan

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Jos merkitään $l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2), l_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)$, $l_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$, niin

$$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}, k = 0, 1, 2.$$

Sanallisesti sanottuna: $L_k(x)$:n osoittajassa on tekijät $(x - x_j), j \neq k$, ja nimittäjä saadaan osoittajasta korvaamalla x arvolla x_k.



Kuva 4. 2. asteen Lagrangen polynomit L_0, L_1 ja L_2.

Tehtävä 2. Täydennä edellistä esimerkkiä siten, että otat lisäpisteen $\ln 11.0 = 2.3979$. Laske näin saatavan toisen asteen polynomin arvo samassa pisteessa $x = 9.2$ ja vertaa virheitä.

Huomautus 3. *Lagrangen* menetelmän varjopuoli on, että lisättäessä interpolaatiopisteitä, joudutaan kaikki laskut suorittamaan uudestaan. Tässä suhteessa edellä mainittu *Newtonin* menetelmä on etevämpi.

Kuten luonnollista on, tarkkuus paranee, kun annettuja pisteitä lisätään: approksimoitavan funktion kannalta ajatellen on luonnollista, että kun käytettävissämme on yksi lisäparametri, jolla suora voidaan ”taivuttaa” paraabeliksi, niin tarkkuutta saadaan parannetuksi.

Yleinen tapaus

Annettu pisteet $x_0, \ldots, x_n$ ja vastinpisteet $y_0, \ldots, y_n$. Etsitään siis korkeintaan astetta n olevaa polynomia p, jolle $p(x_k) = y_k, k = 0, \ldots, n$.

Edellinen yleistyy nyt ilmeisellä tavalla.

1) Muodostetaan n-asteiset Lagrangen kantapolynomit, joilla on ominaisuus: $L_k(x_j) = 1$, kun $k = j$ ja 0, kun $k \neq j$.

Kirjoitetaan kaava L_0:lle:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

Vastaavasti saadaan muut kantapolynomit $L_k, k = 1, \ldots, n$.

Sääntö. Kenties on selvempää antaa sanallinen kuvaus L_k-polynomin muodostamissäännöstä kuin yleinen kaava:

$L_k(x)$ saadaan osamääränä, jonka osoittajassa on termien $(x - x_j)$ tulo, josta puuttuu tekijä $(x - x_k)$. Nimittäjä saadaan korvaamalla osoittajan x luvulla x_k. (Puuttuva termi on juuri se, jossa tapahtuisi tällä kohdalla 0:lla jako.)

2) Aivan samoin kuin edellä kvadraattisessa tapauksessa, nähdään heti, että ratkaisuna tehtävällemme on polynomi

$$p(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \ldots + y_nL_n(x).$$

Kootaan tulos vielä lauseeksi.

Lause 3. Polynomi-interpolaatiotehtävällä (PI) on yksikäsitteinen ratkaisu p, joka voidaan esittää muodossa.

$$p(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \ldots + y_nL_n(x),$$

missä L_k :t ovat edellä esitettyjä *Lagrangen polynomeja*

Todistus. Olemassaolopuolen perustelimme edellä, yksikäsitteisyys saadaan taas suoraan seuraus 2:sta. □

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 3. Ratkaise johdantoesimerkkinä oleva viskositeettitehtävä Lagrangen menetelmällä. (Huomaa, että interpolaatiopolynomia ei ole tarpeen "kertoa auki".)

Tehtävä 4. Osoita, että pisteisiin x_0, x_1, x_2 liittyvät Lagrangen kantapolynomit L_0, L_1, L_2 toteuttavat ehdon $L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1$ kaikilla reaaliluvuilla x. Yleistä mieleivaltaiselle n:lle.

Vihje. Voit toki tehdä tapauksen $n = 3$ sieventämällä tai antamalla symboliohjelman (Maple, Mathematica) sieventää. Mutta varsinainen yleiseen tilanteeseen sopiva ahaa-elämys syntyy, kun sovellat vain interpolaatiolausetta (tai pelkästään seurauslausetta 2) sopivasti.

Interpolaatiovirhe

Kuten edellä oli puhe, interpolaatiota voidaan käyttää menetelmänä funktion approksimointiin. Olennainen kysymys on tällöin, miten suuri virhe tehdään.

Jos kyseessä on $n + 1$ kertaa jatkuvasti derivoituvan funktion interpolointi $n + 1$:ssä pisteessä (siis korkeintaan n-asteisella polynomilla), voidaan virheelle johtaa kaunis kaava, joka on muotoa

$$|f(x) - p(x)| \leq M|(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)|,$$

missä vakio M on $(n + 1)$:sen derivaatan itseisarvon $|f^{(n+1)}|$ maksimi ao. välillä jaettuna luvulla $(n + 1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n + 1)$.

Emme ryhdy tämän kaavan perustelemiseen, emmekä myöskään esittele sen soveltamista tällä kertaa. Sensijaan otamme tuntumaa siihen, minkälaisia yllätyksiä voi virhekäytöksen suhteen tulla vastaan.

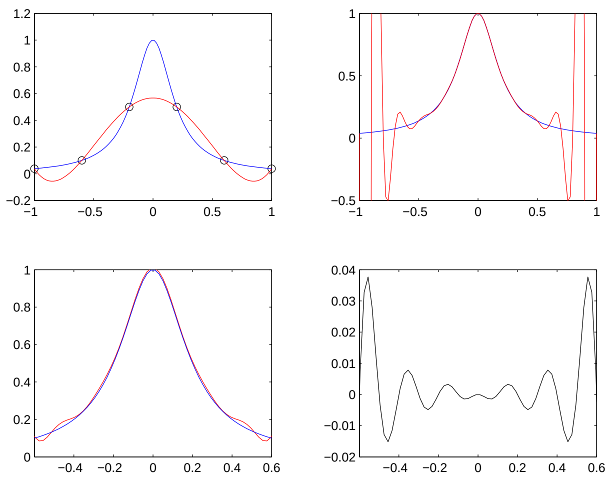
Edellä näimme esimerkkejä ensimmäisen ja toisen asteen interpolaatiopolynomista. Havaitsimme esimerkkiemme yhteydessä, että interpolaatiopisteitä lisäämällä ja siis polynomin astelukua kasvattamalla saimme virheen taulukkopisteiden välillä pienenemään. Niinpä herää luonnollinen kysymys.

Jos interpolaatiopisteitä lisätään rajatta, läheneekö interpolaatiovirhe nollaa?

Virhekaavasta ei ole mahdollista päätellä yleisesti, koska siinä esiintyy $\max|f^{(n+1)}|$. Sehän voi periaatteessa käyttäytyä aika mielivaltaisella tavalla n:n kasvaessa.

Niinpä tulee mieleen vastaesimerkin hakeminen. Sellaisen on ystävällisesti meille tarjoillut matemaatikko *C. Runge* jo v. 1901.

Esimerkki 2 (Rungen koe). Tarkastellaan funktiota $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ välillä $[-1, 1]$. Katsotaan, mitä tapahtuu, kun suoritetaan tasavälinen polynomi-interpolaatio ja pisteitä (polynomin astelukua) kasvatetaan.



KUVA 5. Rungen funktion $\frac{1}{1+25x^2}$ interpolointia.

Vasemmassa yläkuvassa on $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ (arvoon 1 saakka kurkottava) ja 5-asteinen interpolaatiopolynomi, oikeassa yläkuvassa on mukana heilumassa 20-asteinen interpolaatiopolynomi.

Vasemmassa alakuvassa on oikea yläkuva rajoitettuna keskemmälle väliä (välille $[-0.6, 0.6]$). Oikeassa alakuvassa on tämän virhekäyrä, eli $f(x) - p_{20}(x)$ samaisella keskiosalla.

Kuvista nähdään, että kun interpolaatiopolynomin aste kasvaa 5:stä 20:een, niin tarkkuus välin keskivaiheilla paranee huomattavasti. Toisaalta välin reunojen läheisyydessä korkempiasteinen polynomi heilahtelee aivan villisti, ja kuvan perusteella tuntuu varsin uskottavalta se *Rungen* todistama tosiasia, että koko välillä laskettu maksimivirhe lähenee jopa ääretöntä, kun n kasvaa rajatta.

Tämä käytös antaa aiheen arvella, että tasavälinen pisteistö ei olekaan hyvä, vaan kannattaisi valita pisteet niin, että ne ovat keskellä harvassa ja reunoille mentäessä tihenevät. Samainen *Runge* havaitsi, että valitsemalla pisteet ns. *Tsebyshev-polynomien* nollakohdiksi, saadaan virhe suppenemaan kohti nollaa. Kyseinen pisteistö tosiaankin kasaantuu kohti välin reunoja, ja se on tämän tehtävän kannalta optimaalinen.

Kuvat on tehty MATLAB-skriptillä `runge.m`. Sitä muokkamalla voit kehitellä omia kokeilujasi.

Polynomeista palapolynomeihin

Viittasimme kirjoituksen alkupuolella ongelmaan, joka liittyy laajan taulukon interpolointiin. Siinä esiintyvää problematiikkaa havainnollistimme *Rungen kokeilla*. Logaritmitaulukon yhteydessä emme suinkaan pyrkineet polynomiin, jonka kuvaaja kulkee kaikkien taulukkopisteiden kautta, vaan suoritimme *paloittain lineaarisen* interpolaation. Yleisemmin voisimme pyrkiä käsittelemään interpolaatiotehtävää sopivissa palasissa, jotka koostuisivat korkeamman kuin 1. asteen polynomeista ja jotka liitoskohdissa säädettäisiin mahdollisimman sileiksi, ts. järjestettäisiin kertoimet niin, että saadaan mahdollisimman monta jatkuvaa derivaattaa liitoskohdissa.

Tämän periaatteen mukaista palapolynomia on ruvettu kutsumaan englanniksi nimellä "spline", jonka suomenkielinen käännös on yksinkertaisesti "splini". Alunperin tällä tarkoitettiin kolmannen asteen polynomipalasista koostuvaa funktiota, jolla liitoskohdissa on jatkuvat derivaatat toiseen kertalukuun saakka. Tällaisen liitoksen silmä näkee täysin sileänä. Nykyisin spliniksi katsotaan edellä kuvattu yleinen tapaus, mutta kaikkein eniten käytetty lienee juuri tämä alkuperäinen kuutiollinen splini.

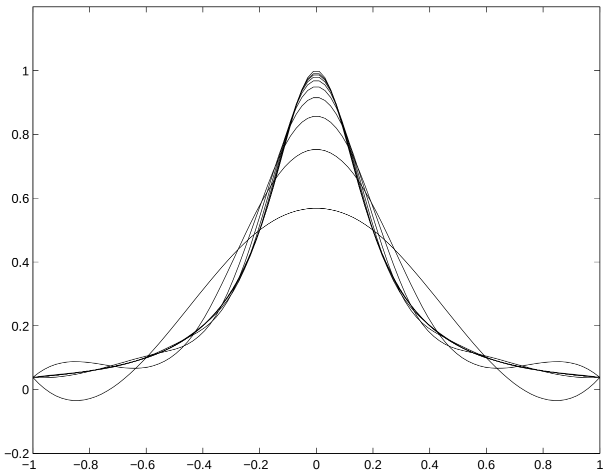
Samalla nähdään yleinen numeerisissa algoritmeissa esiintyvä tilanne. Menetelmän tarkkuuden parantamiseen on kaksi tapaa:

- Nostetaan menetelmän "kertalukua", jolla interpolaation tapauksessa tarkoitetaan polynomin astelukua.
- Jaetaan kyseessä oleva väli, alue tms. pienempiin osiin ja lasketaan approksimaatio kullakin osalla erikseen ja yhdistetään osat kokonaisuudeksi.

Yleensä numeerisissa algoritmeissa käytetään näiden menettelyjen sopivaa yhdistelmää.

Jos tehtävänä olisi muodostaa annettuun dataan liittyvä kuutiollinen splini, niin edellä sanotun, splinin määrittelevän periaatteen mukaan olisi suoraviivaista kirjoittaa yhtälöt. Nähtäisiin, että määrättäviä kertoimia on kaksi enemmän kuin ehtoja. Näin jäisi vapaasti valittavaksi kaksi "reunaehtoa", jonka jälkeen tehtävällä olisi yksikäsitteinen ratkaisu.

Koska en halua laajentaa kirjoitusta liikaa, en mene yksityiskohtiin lähemmin. Sensijaan turvaudun valmiiseen "mustaan laatikkoon", Matlab-funktioon `spline`. Sen käyttöesimerkki on MATLAB-skriptissämme `rungesplini.m`, jolla ao. kuva on piirretty.



KUVA 6. Funktion $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ interpolointi kuutiollisilla splineillä, jakamalla väli n:ään osaan, $n = 5, 7, 9, \ldots, 21$.

Kuvasta nähdään, että heilahtelut pienenevät n:n kasvaessa ja paksu käyrä ilmentää funktiojonon "tasaista" suppenemista koko välillä kohti alkuperäistä Rungen funktiota f.

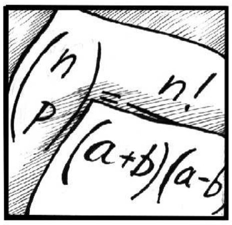
Loppumietteitä, yhteenvetoa

Interpolaatio on hyvä lähtökohta funktion approksimointiin, sillä on keskeinen merkitys numeerisen analyysin useiden eri alueiden algoritmien ytimenä. Mainittakoon vaikka numeerinen derivointi ja integrointi, differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmät, funktion nollakohtien määrittäminen, jne.

Polynomi-interpolaatiosta johduimme splineihin, jotka ovat käyttökelpoisia monenlaisissa isojen taulukoiden interpoloinneissa. Niitä käytetään paljon myös mm. tietokonegrafiikan alalla.

Viitteet

1. Burden-Faires. *Numerical Analysis*, 7^{th} ed., Brooks/Cole, 2001.
2. Cheney-Kincaid. *Numerical Mathematics and Computing*, Brooks/Cole, 2004.
3. Forsythe-Malcolm-Moler. *Computer Methods, for Mathematical Computation*, Prentice Hall, 1977.
4. Kahaner-Moler-Nash. *Numerical Methods and Software*. Prentice Hall, 1989.
5. Moler. *Numerical Computing with Matlab*, 2004, saatavissa verkosta: `www.mathworks.com/moler/`



Solmun 1/2004 tehtävien ratkaisuja

Tämän vuoden ensimmäisessä Solmussa 1/2004 oli tehtäviä, joihin vuoden 2004 matematiikkaolympiajoukkueen jäsen *Lauri Ahlroth* Espoosta on lähettänyt muutamia ratkaisuja. Muihin tehtäviin voi edelleen lähettää ratkaisuja Solmun toimitukseen.

7. Onko olemassa sellainen aritmeettinen lukujono, joka koostuu erisuurista positiivisista kokonaisluvuista, ja jossa mikään jonon termi ei ole jaollinen millään neliöluvulla, joka on suurempi kuin 1?

Ratkaisu. Ei ole. Olkoon aritmeettinen jono

$$x_n = an + b.$$

Koska x_n:t ovat kokonaislukuja, on peräkkäisten termien erotus a kokonaisluku. Koska x_n:t ovat erisuuria ja positiivisia, on a positiivinen. n:t ovat myös kokonaislukuja, joten niin ikään b on kokonaisluku. Valitsemalla $n = b(a+2)$ saadaan

$$x_n = ab(a+2) + b = b(a+1)^2,$$

joka on jaollinen ykköstä suuremmalla neliöluvulla $(a+1)^2$.

8. Onko jollakin neliöluvulla desimaaliesitys, jonka luvun numeroiden summa on 2002?

Ratkaisu. On. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}(10^{222}-8)^2 &= 10^{444} - 16 \cdot 10^{222} + 64\\ &= 10^{224}(10^{220}-1) + 10^{222} \cdot (100-16) + 64\\ &= 999\ldots 9984000\ldots 0064,\end{aligned}$$

missä sekä yhdeksikköjä että nollia on 220 kappaletta. Numeroiden summa on

$$9 \cdot 220 + 8 + 4 + 6 + 4 = 2002.$$

9. Ratkaise seuraava yhtälö:

$$\begin{aligned}&2x^4 + 2y^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 7y^2\\ &+ 7z^2 - 14yz - 70y + 70z + 175 = 0.\end{aligned}$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}0 &= 2x^4 + 2y^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 7y^2\\ &\quad + 7z^2 - 14yz - 70y + 70z + 175\\ &= x^4 + y^4 + (x-y)^4\\ &\quad + 7(y^2 + z^2 + 5^2 - 2yz - 2\cdot 5y + 2\cdot 5z)\\ &= x^4 + y^4 + (x-y)^4 + 7(y-z-5)^2.\end{aligned}$$

Viimeinen lauseke on reaalilukujen parillisten potenssien summana ei-negatiivinen, ja nollaehdosta saadaan

$$x = y = 0 \text{ ja } z = y - 5 = -5.$$

10. Ympyrä k_1, jonka säde on R, ja ympyrä k_2, jonka säde on $2R$, koskettavat ulkoisesti pisteessä E_3, ja ympyrät k_1 ja k_2 koskettavat ulkoapäin myös ympyrää k_3, jonka säde on $3R$. Ympyrät k_2 ja k_3 koskettavat pisteessä E_1, ja ympyrät k_3 ja k_1 koskettavat pisteessä E_2. Todista, että kolmion $E_1E_2E_3$ ympäri piirretyllä ympyrällä on sama säde kuin ympyrällä k_1.

Ratkaisu. Olkoot ympyröiden k_i keskipisteet O_i, $i = 1, 2, 3$. Ensinnäkin todetaan, että säteet E_1:stä O_2:een ja O_3:een ovat kohtisuorassa vastaaville ympyröille E_1:stä piirrettyä yhteistä tangenttia vastaan. Täten kulma $O_2E_1O_3$ vastaa kahta suoraa kulmaa, ja E_1 on janalla O_2O_3. Vastaavasti E_2 on janalla O_3O_1 ja E_3 on janalla O_1O_2.

Kolmion $O_1O_2O_3$ sivujen pituudet ovat $O_1O_2 = 3R$, $O_3O_1 = 4R$ ja $O_2O_3 = 5R$. Tämä vastaa tunnettua Pythagoraan kolmikkoa $(3, 4, 5)$, joten tämä kolmio on suorakulmainen, hypotenuusana sivu O_2O_3. Kolmion $O_1O_2O_3$ sisään piirretyn ympyrän säteeksi r saadaan

$$r = \frac{2 \cdot \text{ala}}{\text{piiri}} = \frac{3R \cdot 4R}{3R + 4R + 5R} = R.$$

Tarkastellaan kolmion $O_1O_2O_3$ sisään piirretyn ympyrän keskipisteen I kohtisuoria projektioita F_1, F_2 ja F_3 kolmion $O_1O_2O_3$ sivuilla O_2O_3, O_1O_3 ja O_1O_2, tässä järjestyksessä. $IF_2F_3O_1$ on suorien kulmien ja yhtä pitkien vierekkäisten sivujen vuoksi neliö, joten

$$O_1F_2 = O_1F_3 = IF_2 = r = R.$$

Siis piste $F_2 = E_2$ samoin kuin $F_3 = E_3$. Lisäksi

$$O_2F_1 = O_2F_3 = 3R - R = 2R,$$

joten myös $F_1 = E_1$.

Kolmion $O_1O_2O_3$ sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion $O_1O_2O_3$ sivuja nimenomaan pisteissä E_1, E_2 ja E_3. Se on siksi samalla kolmion $E_1E_2E_3$ ympäri piirretty ympyrä, ja sen säde on R, siis sama kuin k_1:llä.

11. Onko totta, että jos on olemassa annetun puolisuunnikkaan kantojen kanssa yhdensuuntainen suora, joka puolittaa sekä puolisuunnikkaan pinta-alan että ympärysmitan, niin silloin puolisuunnikas on suunnikas?

Ratkaisu. Väite on epätosi. Lähdetään liikkeelle kolmiosta, jonka sivut ovat a, b ja c sekä c:tä vastaava korkeusjana h. Venytetään kolmiota c-sivun vastainen kärki venytyskeskuksena ensin suhteella $q > 1$, jolloin syntyy puolisuunnikas. Sitten jaetaan tämä puolisuunnikas kahteen osaan uudella kolmion venytyksellä, jonka suhdeluku on jokin p, jolle $1 < p < q$.

Osapuolisuunnikkaiden pinta-alat ovat

$$\frac{1}{2} \cdot (pc + qc)(qh - ph) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (q^2 - p^2)$$

ja

$$\frac{1}{2} \cdot (c + pc)(ph - h) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (p^2 - 1).$$

Yhtäsuuruus edellyttää, että

$$p = \sqrt{\frac{q^2 + 1}{2}} = p_{\text{ala}}.$$

Piirien yhtäsuuruusehto sitä vastoin on

$$(p - 1)(a + b) + qc + pc = (q - p)(a + b) + pc + c,$$

mikä on yhtäpitävää yhtälön

$$p = \frac{(q - 1)\frac{c}{a+b} + q + 1}{2}$$

kanssa.

Suure $t = \frac{c}{(a+b)}$, missä a, b ja c ovat kolmion sivuja, voi saada minkä tahansa arvon nollan ja ykkösen väliltä (0 ja 1 poislukien). Arvolla $t = 0$ saataisiin p:lle arvo $p_0 = \frac{(q+1)}{2}$, ja arvolla $t = 1$ arvo $p_1 = q$. P:n lauseke on t:n jatkuva funktio, joten jokainen arvo välillä (p_0, p_1) saavutetaan jollakin arvolla t.

Keskilukujen ominaisuuksien perusteella saadaan (tämä on myös helppo todistaa tiedolla $q > 1$)

$$p_0 = \frac{q + 1}{2} < \sqrt{\frac{q^2 + 1}{2}} < q = p_1,$$

joten

$$p_0 < p_{\text{ala}} < p_1.$$

Täten jollakin kelpaavalla t:n arvolla sekä osapuolisuunnikkaiden piirit että pinta-alat ovat samat – kuvio ei silti ole suunnikas.

16. Todista, että jos n on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin

$$\sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \geq 0 \\ k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n}} \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} = 2^{n-1}.$$

Ratkaisu. Tieto

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n, \; k_i \geq 0,$$

sitoo k_i:t siten, että n voidaan esittää positiivisten kokonaislukujen summana, missä lukua i käytetään k_i kertaa. Multinomikertoimet (vasemman puolen summattavat) puolestaan ilmaisevat, kuinka monella tavalla voimme laittaa edelliset luvut jonoon, kun sama numero voi olla mukana useasti. Vasemman puolen lauseke siis ilmaisee, kuinka monella tavalla luku n voidaan esittää positiivisten kokonaislukujen summana, kun summattavien eri järjestyksiä pidetään eri summina.

Todistetaan induktiolla n:n suhteen, että tällaisia tapoja on 2^{n-1}, jolloin annettu tehtävä tulee ratkaistuksi.

Tapaus $n = 1$ on selvä: $1 = 1$ on ainoa tapa, ja $2^{1-1} = 1$.

Tehdään sitten induktio-oletus, että tapauksessa $n = m - 1$ tapoja on tasan 2^{m-2}.

Muodostetaan jokaisesta $m-1$:n esityksestä m:n esitys

A) lisäämällä +1 loppuun,

B) sulauttamalla +1 summan viimeiseen numeroon.

Koska $(m-1)$:n esitykset olivat keskenään erilaisia, ovat A-tyypin esitykset keskenään erilaisia, samoin B-tyypin. Koska A-tyypin esitykset päättyvät ykköseen ja B-tyypin esitykset eivät, ovat A-tyypin esitykset erilaisia kuin B-tyypin.

Osoitetaan vielä, että edellä saatiin kaikki esitykset m:lle. Jos jokin esitys

$$x_1 + \ldots + x_n = m$$

olisi jäänyt mainitsematta, voitaisiin tästä muodostaa $m-1$:n esitys pienentämällä viimeistä numeroa x_n yhdellä (tai poistamalla se, jos $x_n = 1$). Konstruktioiden A ja B perusteella tämä $(m-1)$:n esitys olisi jäänyt mainitsematta tapauksessa $n = (m-1)$. Tällöin $(m-1)$:llä olisi konstruktiossa käytettyjen 2^{m-2} esityksen lisäksi jokin muu esitys, mikä on ristiriidassa induktio-oletuksen kanssa.

Täten m:llä on tasan

$$2^{m-2} + 2^{m-2} = 2^{m-1}$$

esitystä positiivisten kokonaislukujen summana, ja induktio on valmis.

Tehtävien lähde: *KöMaL*, December 2002, *http://www.komal.hu/*.

Lisää laskuoppia

Matti Seppälä
Luonnonmaantieteen professori
Maantieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kirjoitukseni ”Laskutaito ja numeroiden lukutaito edelleen tarpeen” sai paljon palautetta. Jatkan keskustelua muutamilla esimerkeillä, jotka ehkä puhuttelevat oppilaita.

Kävin kerran Tikkurilassa maalikaupassa ostamassa purkin maalia. Valitsemani purkin hinta oli 50 markkaa. Minä tinkaamaan. Kauppias ryhtyi opettamaan minulle kauppamatematiikkaa: ”Minä en myy prosentteja, vaan nettohinnalla. Tänne tulee ihmisiä, jotka lähtevät pois, koska hintani kuultuaan sanovat, että saavat samasta purkista 20 prosentin alennuksen rautakaupasta huomaamatta, että siellä lähtöhinta on 70 markkaa.” En enää tinkinyt, vaan ostin purkin.

Paitakauppias ei saanut T-paitoja kaupaksi 25 markalla kappale, joten hän teki tarjouksen: Kolme paitaa 100 markalla. Kauppa alkoi käydä kuin siimaa.

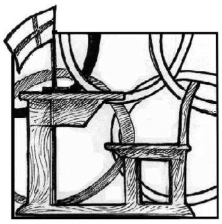
Lenkkitossuja myytiin 139 markalla pari. Sitten alkoi alennusmyynti. Suurilla julisteilla luvattiin 20 prosentin alennus, mutta lähtöhinta olikin samoissa tossuissa nyt listahinta 179 markkaa. Kauppa se on kun kannattaa. . .

Pesuaine maksoi kilon paketissa 3,20 euroa. Neljän kilon perhepakkauksen sai 13,60 eurolla. Ihmisillä on mielikuva, että suuret pakkauksen ovat halvempia kuin pienet ja laskeminen jää puolitiehen: $4 \cdot 20$ on 80, joten 60 senttiä luvun lopussa antaa kuvan, että halvalla saa.

Metsänrajatutkijat tiedottivat julkisuudessa, että ilmastonmuutos siirtää pohjoista metsänrajaa 500 kilometriä kohti napaa 100 vuodessa. Siis 5 km/vuosi. Mitä tuo tarkoittaa nopeutena päivässä? Noin 13 metriä 24 tunnissa. Etana ei tahdo pysyä mukana, kun puut siirtyvät niin nopeasti kohti pohjoista. Uskokoon ken tahtoo.

Yksiköissä erehdytään sekoittamalla esimerkiksi hehtaarit ja neliökilometrit. Tehdään satakertainen virhe. Vielä hankalampia ovat tilavuusmitat.

Rahasta ei tajuta vanhan pennin ja sentin eroa. Tätä ruokkivat vielä käyttöön otetut penniajalta periytyvät pyöristyssäännöt, vaikka arvon ero on kuusinkertainen. Huutokaupoissa mentiin aikaisemmin hinnoissa ylöspäin kahden tai viiden markan korotuksin. Nyt korotus voi olla vähintään kaksi euroa. Edullista myyjän kannalta. Saksassa lehtitietojen mukaan eräät kauppiaat jättivät hintalaput muuttamatta euroon siirryttäessä, vaikka yksi euro on noin kaksi vanhaa saksanmarkkaa. Bensiinin hinnassa muutaman sentin ero ei näytä kauhistuttavan ihmisiä samalla tavalla kuin muutaman pennin ero aikaisemmin. Kuitenkin viiden sentin ero litrahinnassa merkitsee 20 litran tankkauksessa euron eroa loppuhinnassa.



Minne katosi laskutaito?

Aarno Laitinen

Suomeen naitu venäläinen nainen luuli, että hänen suomalaista koulua käyvä 12-vuotias poikansa on jotenkin alikehittynyt, kun pojan samanikäiset pietarilaiset serkut olivat paljon pitemmällä koulunkäynnissä.

Äiti ihmetteli, onko pojassa jotain vikaa, kun tämä ei osaa edes kertotaulua pietarilaisten serkkujensa tavoin. Opettaja lohdutti äitiä, ettei suomalaislapsille ole vielä opetettu kuin kertotaulun alkeet.

Nuoret aikuiset neidit eivät myyjättärinä näytä osaavan alkeellista yhteenlaskua tai kertolaskua toritiskillä ilman taskulaskinta. Kahdella kertominen vielä onnistuu jotenkuten, mutta jos ostaa kolme kiloa punajuuria, kilohinnan kertominen kolmella on jo ylivoimaista.

Kovin usein saa rahasta väärin takaisin. Liika raha on helppo palauttaa, mutta jos saa liian vähän takaisin, on noloa huomauttaa. Joissakin korttipeleissä on jo vaikea löytää kirjanpitäjää, kun yksinkertainen yhteenlaskutaitokin puuttuu häkellyttävän monilta.

Jos uutisissa kuvataan jotakin asiaa numeroilla, ne ovat kovin usein väärin. Kerran televisiossa kerrottiin, että jokainen suomalainen kuluttaa energiaa öljyksi muutettuna noin 3 000 tonnia. Ympäristöasioille omistautunut tutkiva toimittaja halusi kuvata energian tuhlausta. Hänen laskelmansa mukaan Suomi kuluttaisi energiaa 15 000 000 000 öljytonnin edestä, jonka hinta olisi yli 2 000 000 000 000 euroa (kaksi biljoonaa) eli lähes 20-kertaisesti Suomen kansantulo.

Samassa ohjelmassa kerrottiin, että puolet energiasta voitaisiin säästää, jos lamput vaihdettaisiin vähemmän kuluttaviin. Laskutaidoton ympäristötoimittaja ei ilmeisesti tiennyt, että valaistus kuluttaa vain prosentin koko energiasta, ja vaikka sammuttaisi kaikki lamput ja eläisi pärevalolla, energian kulutus laskisi vain prosentin. Todennäköisesti tuotanto putoaisi paljon enemmän, sillä hämärässä monia asioita on hankala tehdä.

Harrastukseksi etsin lehdistä ja televisiosta laskuvirheitä, sillä jos numerot ja laskut voivat vain olla virheellisiä, yleensä ne ovat sitä.

Numerotkin alkavat olla akateemisesti koulutetuille tv-toimittajille hämärä käsite. Meille opetettiin koulussa lukusanat näin: yksi, kaksi, kolme, neljä, viisi.

Ilmeisesti nykyopin mukaan lukusanat ovat yksi, pari, kolme, neljä, viisi.

Lukusana kaksi on jostain syystä melkein kadonnut suomen kielestä ja sen on korvannut pari. Kun ei olla oikein selvillä numeroiden merkityksestä, epämääräinen sana pari on usein vielä muodossa parisen. Television meteorologit ennustavat säätä, että huomenna odotetaan lämpöä noin tai lähes parisenkymmentä astetta. Selkeä luku epämääräistetään kolmeen kertaan.

Nuoret taksinkuljettajat ilmoittavan 20 euron matkan hinnan: ”Parisenkymmentä euroa.” Sanaan on ikäänkuin kätketty toivomus, että enemmäkin voisi maksaa, kun ei kerran selkeästi sanota, että hinta on 20 euroa. Todennöisesti kuljettaja ei ymmärrä numeroita.

TV1:n kulttuuriohjelma Voimalassa oli joukko näyttelijöitä, ohjaajia ja teatterijohtajia, jotka pitivät suorastaan nöyryyttävänä sitä, että kulttuurissa joudutaan laskemaan kustannuksia. Kulttuurin tehtävä on tuottaa kulttuuria eikä laskea rahoja, sanoivat kulttuuri-ihmiset.

Esimerkiksi Lappeenrannan kaupunginteatterin johtaja ei ilmiselvästi tiennyt, mikä merkitys on niillä numeroilla, jotka ovat desimaalipilkun jälkeen verrattuna niihin, jotka ovat ennen desimaalipilkkua. Sen verran voisi Lappeenranta sijoittaa lisää kulttuuriin, että panisi teatterijohtajansa edes peruskoulun ala-asteen matematiikan tunneille.

Suomalaisissa kouluissa on ollut pakkokreikkaa, pakkolatinaa, pakkovenäjää ja pakkoruotsia, mutta jostakin syystä kaikkien tieteiden, viisauden ja suhteellisuudentajun perustana oleva matematiikka on jonkinlainen vapaaehtoisluontoinen sivuaine, jota ei oikeastaan tarvitse osata.

Laskutaidottomien ja haluttomien teatterijohtajien lisäksi meillä on paljon laskutaidottomia kansanedustajia, kunnanvaltuutettuja, ammattiliittojohtajia ja muita päättäjiä.

Kun kansanedustajat vaativat kilvan erilaisia ilmaispalveluja, he eivät halua laskea kuinka paljon ne tosiasiassa maksavat. Lääkärien ja sairaanhoitajien mielestä ihmisten terveys on niin kallis asia, että on sopimatonta laskea sen kustannuksia.

Opiskelijoiden mielestä yhteiskunnan pitää maksaa heille ainakin minimipalkan verran opintorahaa. Lisäksi heidän pitää saada viettää mukavaa opiskelijaelämää niin kauan kuin haluavat – kustannuksista piittaamatta.

Harmaan talouden tutkinnasta mukavan leipäpuun hankkineet verovoudit väittävät, että valtiolta jää saamatta lähes 10 miljardia euroa verotuloja vuodessa. Jos väite pitäisi pakkansa, Suomessa olisi lähes koko kansantalouden kokoinen harmaan liiketoiminnan sektori.

Kulttuuriväki vaatii silloin tällöin, että sen pitää saada rahaa ainakin yhtä paljon kuin puolustusvoimat. Vaatimus perustuu täydelliseen laskutaidottomuuteen, sillä kulttuuriväki laskee omiksi määrärahoikseen vain valtion budjetissa yhden otsikon alla olevan määrärahan.

Jos se vaivautuisi laskemaan kulttuurimäärärahat valtion budjetin muiltakin momenteilta, lisäisi siihen kuntien määrärahat, säätiöiden, sponsorien ja yksityisten kulttuurin kuluttajien rahat, kulttuurilta pitäisi ottaa yli puolet pois ennen kuin sen rahat olisivat samaa luokkaa kuin armeijan.

Kun eduskunnassa puuhataan koululasten iltapäivähoitoa, en ole huomannut kenenkään laskeneen, mitä se maksaa. Olen onnellinen siitä, ettei lapsena tarvinnut mennä koulun jälkeen sosiaalidemokraattisen hoivatädin huostaan leikkimään kunnan hyväksymiä perinneleikkejä ja lukemaan apurahoilla tuotettuja selkosatuja. Paljon antoisampaa oli pelata poikien kanssa sököä ja oppia todennäköisyyslaskenta käytännössä.

Kolumni on julkaistu *Iltalehden* viikonloppuliitteessä lauantaina 24.4.2004, ja se julkaistaan Solmussa kirjoittajansa luvalla.