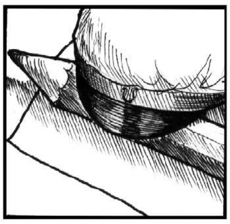

Opettaja, vaadi perusalgebran osaaminen!

Kyösti Tarvainen
PhD, yliopettaja
Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

Algebran perustaitojen ongelma

Insinööriopintonsa aloittavien ylioppilaiden matemaattisissa taidoissa esiintyy erittäin vakavia puutteita. Esimerkiksi Helsingin ammattikorkeakoulun rakennusosastolla tehdyissä diagnostisissa testeissä tyypillisesti vain puolet uusista ylioppilaista osaa ratkaista yhtälöparin, kolmasosa kaikki potenssilaskusäännöt, neljäsosa murtolukujen ja murtolausekkeiden laskusäännöt; muutamat ylioppilaat eivät osaa ratkaista yksinkertaistakaan yhtälöä.

Vaikka ammattikorkeakoulun tekniikan opinnoissa matematiikkaa käytetään useassa kurssissa ja sen takia oppilailla on yleensä hyvä motivaatio oppia sitä, puutteet perustaidoissa eivät parane itsestään opintojen kuluessa. Siksi ammattikorkeakouluissa on ryhdytty toimenpiteisiin, joilla matematiikan perusosaaminen pyritään saamaan nopeasti kuntoon.

Yksi keino ovat perusmatematiikan testit, jotka on läpäistävä – testi on suoritettava niin monta kertaa, kunnes osoittaa osaavansa perusasiat. Helsingin ammattikorkeakoulussa tällaisia kokeita on järjestänyt yliopettaja *Pertti Toivonen* (1998). Espoon-Vantaan teknillisessä ammattikorkeakoulussa on vastaavanlainen testi (Peltola, 2001). Seuraavassa selostetaan Helsingin ammattikorkeakoulun rakennusosastolle kehitettyä perusalgebran kohentamisjärjestelmää, joka on toteutettu vuosina 2000–2002 kolmella ylioppilasluokalla ja kolmella ammattikoulupohjaisella luokalla.

Perusalgebran testi

Kahdella ensimmäisellä tunnilla on pidetty laaja 102 tehtävän diagnostinen testi, joka käsittää algebraa, geometriaa, differentiaali- ja integraalilaskentaa. Testin jälkeen algebran perusteita on kerrattu ylioppilailla 14 oppituntia. Kertauksen jälkeen on pidetty perusalgebran ensimmäinen testi. Se käsittää seuraavat 11 tehtävätyyppiä; yhden uusintatestin tehtävät ovat esimerkkeinä.

A. Algebran lausekkeiden käsittely: samanmuotoisten termien yhdistäminen, sulkujen poisto

Sievennä seuraavat lausekkeet:

a) $2a + 3ab + 4a^2 + 3ab$

b) $x + y - (1 + x - y) + 1 + y$

c) $5 - (4 - (a - b)) - b$

B. Algebran lausekkeiden käsittely: summan kertominen ja jakaminen

Poista sulut, sievennä lausekkeet:

a) $5(2a + 3b)$

b) $ab - a(3 - b)$

c) $\dfrac{6a - 3b}{3}$

d) $\dfrac{ma + mab + m}{m}$

C. Murtolausekkeiden kerto- ja jakolasku

Sievennä seuraavat lausekkeet:

a) $m\dfrac{kg}{m}$

b) $\dfrac{6a}{7b}\dfrac{14c}{12a}$

c) $\dfrac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{kg}}$

d) $\dfrac{kg}{\frac{kg}{m^3}}$

e) $\dfrac{\frac{a}{b}}{a}$

D. Murtolausekkeiden supistaminen

Supista ne lausekkeet, jotka voi supistaa:

a) $\dfrac{x + a}{x + b}$

b) $\dfrac{6a}{12a^2}$

c) $\dfrac{a(x + y)b}{2(x + y)}$

d) $\dfrac{abc}{bc}$

E. Murtolausekkeiden yhteenlasku

Suorita yhteen- ja vähennyslaskut:

a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{a}{3} + \dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{a}{b} + 1$

d) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$

e) $\dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2}$

F. Ensimmäisen asteen yhtälö: tavalliset "x-yhtälöt"

Ratkaise seuraavat yhtälöt:

a) $2x + 1 = 4(x - 3) + 8$

b) $\dfrac{x + 1}{3} + \dfrac{2x + 1}{5} = 2$

G. Ensimmäisen asteen yhtälö: suureen ratkaiseminen kaavasta

Ratkaise kysytty suure annetusta yhtälöstä:

a) $\sigma = \dfrac{F}{A}$, F?

b) $l_1 = l_2 + \alpha t$, t?

c) $p = 100\dfrac{a - b}{a}$, a?

H. Lineaarinen yhtälöpari

Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$$

I. Yhtälöt, joissa potensseja tai neliöjuuria

Seuraavien tehtävien kaavoissa kaikki suureet ovat positiivisia. Ratkaise kysytty suure.

a) $c^2 = 4a^2 + b^2$, b?

b) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, r?

c) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, b?

J. Toisen asteen yhtälö

Ratkaise seuraavat yhtälöt:

a) $x^2 - 9 = 9$

b) $x^2 + 4x = 0$

c) $x^2 + x - 6 = 0$

K. Potenssilaskusäännöt

Sovella potenssilaskusääntöjä seuraaviin lausekkeisiin:

a) $(2xy)^3$

b) $\left(\frac{3ab}{2c}\right)^2$

c) $x^3y^4x^5y^2$

d) $(x^3)^4$

e) $\frac{a^8}{a^4}$

f) e^0+1

g) $a^{-2}-\frac{1}{a^2}$

Uusintatestien kulku

Esimerkiksi eräällä ylioppilasluokalla ensimmäisen testin kaikki tehtävät ratkaisi oikein joka toinen. Testiä läpäisemättömät saivat pakollisia kotitehtäviä niistä tehtävätyypeistä, joita eivät hallinneet. Lisätehtävät oli otettu Teknisten ammattien matematiikka 2Z -kirjasta (Kinnunen et al., 1985). Jokainen tehtävätyyppi tuli suorittaa niin monta kertaa, että se osattiin. Seuraava taulukko näyttää, miten ylioppilaat kyseisellä luokalla saivat tehtävätyyppejä suoritetuiksi.

Taulukko. Ylioppilaiden suorittamattomien tehtävätyyppien väheneminen; rivi kuvaa yhden henkilön kehitystä. Yksi henkilö tarvitsi 4 uusintakertaa. Kuusitoista opiskelijaa suoritti kaikki tehtävät ensimmäisessä testissä, eivätkä he siksi esiinny tässä taulukossa.

0	1	2	3
BD	B		
DIK	K		
CDEIK	C		
CK			
BCDGI	D		
BCIJK	K		
DCJK	D		
CDEGIK	DEG	G	
EI			
CK	CK		
CFI	F		
CDE	CE		
ABCEFK	ABCEFK	CEF	
BEFIJK	BEFK	EK	K
FGK	F		
K	K		

Sarakkeet:
(0) Perusalgebran testissä suorittamattomat tehtävät.
(1) 1. uusintatestissä suorittamattomat tehtävät.
(2) 2. uusintatestissä suorittamattomat tehtävät.
(3) 3. uusintatestissä suorittamattomat tehtävät.

Ammattikoulupohjaisilla luokilla huonoa lähtötasoa kuvaa se, että vain noin joka viides osaa ratkaista yksinkertaisen yhtälön, esimerkiksi yhtälön. Näillä luokilla algebran opetukseen on käytetty ensin 74 oppituntia. Sitten on pidetty perusalgebran testi, jonka tyypillisesti neljännes luokasta läpäisee ensimmäisellä kerralla; jotkut tarvitsevat viitisen uusintaa.

Kukaan ei ole purnannut – kaikki oppilaat ovat kokeneet perusalgebran kohentamisprojektin kotitehtävineen ja uusintatesteineen mielekkääksi. Vaikka kaikki suorittavat kaikki tehtävätyypit, virheitä tulee jatkossakin, koska laskentarutiinien hankkiminen on laiminlyöty aiemmissa opinnoissa.

Opiskelijoiden näkemyksiä huonon osaamisen syistä

Kun ylioppilailta on kyselty, miksi he eivät ole oppineet matematiikan perusasioita lukiossa, he eivät ole moittineet matematiikan opettajia epäpäteviksi; päinvastoin moni on kiitellyt opettajansa perusteellista ja innostavaa opetusta. Opiskelijoiden esittämät syyt huonoon osaamiseen voidaan luokitella seuraaviin neljään ryhmään, joiden perässä on henkilökohtaisia kommentteja ammattikorkeakoulun opettajan näkökulmasta.

Lukion oppimäärän laajuus. Asioita on niin paljon, että niitä ei ehditä käydä kunnolla läpi. *Kommentti:* Ottaen huomioon matematiikan perusasioiden surkean osaamisen, aihepiirien ja aineiston karsintaa olisi tehtävä paljon. On tärkeää, että kaikki oppivat matematiikan perusteet hyvin lukiossa ja aiemmissa opinnoissa. Hyvien perustaitojen turvin sitten ne, jotka tarvitsevat paljon matematiikkaa ammattiopinnoissaan, oppivat tarvitsemansa matematiikan osa-alueet kyllä myöhemminkin: tiedämme, että niistä lukiolaisista, jotka 1950-, 1960-, 1970-luvuilla suorittivat laajuudeltaan nykyistä huomattavasti suppeamman oppimäärän, on tullut esimerkiksi maailmanmenestystä saavuttaneiden kännyköiden ja risteilyalusten suunnittelijoita, kansainvälisiä matematiikan tutkijoita.

Motivaatio. Monella opiskelijalla ei lukiossa ole ollut motivaatiota opiskella matematiikkaa; ei ole ollut tietoa siitä, että tulee tarvitsemaan matematiikkaa ammattiopinnoissaan. *Kommentti:* Matematiikan motivaatio-ongelma alkaa ilmeisesti jo ala-asteella, kun peleihin ja muuhun arkipäivään liittyvä aritmetiikka on opittu, ja päättyy vasta korkeakouluissa, joissa matematiikkaa toden teolla käytetään eri aloilla. Muistan, kuinka lukion matematiikan opettajani *Ahti Kantanen* kertoi heti aluksi erittäin painokkaasti, että matematiikkaa tulevat tarvitsemaan myöhemmissä opinnoissaan kaikki paitsi papit. Hän ei yrittänyt koko ajan esittää, kuinka juuri opiskelemamme asiat olisivat välittömästi tarpeen käytännön ongelmissa. Se, että nykyisin usein yritetään jatkuvasti vakuutella matematiikan hyödyllisyyttä ongelmanratkaisuilla, on oppilaiden aliarvioimista ja johtaa ongelmien käsittelyyn, joilla on vähän tekemistä varsinaisen, ammattiopinnoissa ja matematiikan opinnoissa tarvittavan matematiikan kanssa, sekä kirjojen paisutteluun niin, että oppilaiden on vaikea hahmottaa matematiikan keskeisiä asioita. Martio (2001) vertaa ongelmanratkaisun korostamista 1970-luvun virheeseen "uuteen matematiikkaan" ja esittää, että suomalaisten koululaisten menestyminen eräissä kansainvälisissä vertailuissa perustuu sellaiseen osaamiseen ongelmien ratkaisuissa, mikä ei kuvasta varsinaisen matematiikan osaamista. Varmasti monet ongelmanratkaisut ovat lukiossa motivoivia, mutta tärkeintä olisi luoda matemaattiset valmiudet ammattialojen todellisten ongelmien käsittelyyn ja matematiikan opiskeluun korkeakouluissa. Opettajien on tunnettava matemaattiset tarpeet korkeakouluopinnoissa ja välitettävä tätä tietoutta oppilaille motivaatioksi. Globaalissa maailmantaloudessa Suomen hyvinvoinnin ylläpito perustuu teknologiseen osaamiseen, jossa matematiikalla on ratkaisevampi merkitys kuin yleisesti tiedetään.

Vähäiset vaatimukset. Monet opiskelijat moittivat lukio-opetustaan siitä, että niistä pääsi liian helposti läpi osaamatta edes perusasioita; poissaoloja sallittiin; pakollisia kotitehtäviä toivottiin nyt jälkikäteen. *Kommentti:* Korkeakouluissa vaaditaan todellista eikä suhteellista osaamista. Absoluuttista osaamista perusasioissa on vaadittava jo aiemmin: ammattikorkeakouluissa näkee paljon ylioppilaita, jotka ovat lukiossa tottuneet siihen, että kursseista pääsee läpi vähäisin tiedoin, ja jotka tajuavat realiteetit liian myöhään joutuen lopulta lopettamaan osaamattomuuden suohon vajonneet opintonsa. Opiskelijoiden oman edun vuoksi matematiikan opettajan tulee vaatia matematiikan perusteiden osaaminen kaikilta oppilailta – mitään sivistyksellistä vahinkoa ei tapahdu, vaikka sitten myöhemmin osoittautuukin, että jotkut eivät matematiikkaa tarvitse.

Hitaammin oppivien tukeminen. Lukion opettajiansa ovat eräät opiskelijat arvostelleet siitä, että he kiinnittivät huomionsa hyvin menestyviin oppilaisiin ja jättivät hitaammin matematiikkaa oppivat oman onnensa nojaan. *Kommentti:* Matematiikassa tosiaan perinteisesti kunnioitetaan huippuosaajia, mutta jokaisen opettajan tulisi kuitenkin tietää, kuinka laajasti matematiikkaa tarvitaan jatko-opinnoissa ja kuinka tärkeää siksi on kärsivällisesti varmistaa, että kaikki oppivat hyvin matematiikan perusasiat. Moni hitaasti matematiikkaa oppiva ei myöhemmin sitä aktiivisesti käytä ammattielämässä, mutta tarvitsee sitä korkeakouluopinnoissa. Olen opettanut monia lukion matematiikassa kuutosen saaneita opiskelijoita, jotka ovat menestyneet hyvin matematiikassa motivoiduttuaan sitä harjoittelemaan ja joista on tullut hyviä insinöörejä.

Johtopäätöksiä ja ehdotuksia

Kurssimuotoisessakin lukiossa on huolehdittava perusasioiden osaamisesta, ettei käy niin, että opiskelija pääsee jokaisesta kurssista läpi opittuaan pintapuolisesti joitain uusia ideoita, osaamatta kuitenkaan matematiikan perusteita. Tämä koskee myös lyhyen matematiikan lukijoita. Esimerkiksi rakennusosastolla opiskelevista ylioppilaista noin kolmasosa on suorittanut lyhyen matematiikan. Siis myös lyhyen matematiikan opettajan on opiskelijoiden oman edun vuoksi vaadittava, että he osaavat hyvin matematiikan perusteet. Etukäteen lukiossa ei voi tietää, ketkä tulevat myöhemmin tarvitsemaan matematiikkaa.

Vaikka korkeakoulujen ammattiaineiden kannalta on tärkeintä, että opiskelijat hallitsevat rutiininomaisesti perusmatematiikan, jota ammattiaineet sitten käyttävät hyväksi omia ilmiöitään kuvatessaan ja niiden ongelmia ratkaistessaan, on erittäin tärkeää, että opetettavat asiat perustellaan hyvin. Perustelut edistävät oppilaiden omakohtaista ajattelua – vastakohtana on se ikävä tilanne, että opiskelija kokee matematiikan tylsänä kaavakokoelmana. Lukiossa ja ammattikouluissa perustelujen ei tarvitse olla korkeakoulutasoisia. Vaikeat täsmälliset perustelut voidaan esittää alaviitteissä tai liitteissä lahjakkaimpien opiskelijoiden hyödyksi.

Matematiikan perusteita opiskeltaessa on myös opittava muutamia asioita ulkoa kuten esimerkiksi trigonometristen funktioiden määritelmät, jotka vain noin puolet rakennusosaston uusista ylioppilaista muisti. Kun esimerkiksi statiikassa jatkuvasti esiintyy sinejä ja kosineja, ei opiskelija ehdi oppitunneilla kaavakokoelmaa selaten saada selville niiden määrittelyjä. Se, että muistaa perusmääritelmät ja -tulokset, joita matematiikassa ei ole paljon, on nykyisenkin kasvatustieteellisen perussuuntauksen, konstruktivismin, mukaista: ihmisen täytyy rakentaa omaa osaamista, ja yhtenä osatekijänä siinä on perusasioiden muistaminen.

Ammattikorkeakouluissa uusia asioita opetettaessa näkee, kuinka harjaantumattomia useat opiskelijat ovat hahmottamaan ja painamaan mieleensä opetettavan asian keskeisiä määritelmiä ja tuloksia. Kaavakokoelmien käytöllä on ollut tässä suhteessa turmiollinen vaikutus. Kaavakokoelman sijasta opettaja voi selvästi sanoa, mitkä asiat täytyy osata ja muistaa, ja hän voi kokeessa antaa vähemmän tärkeät yhtälöt. Kaavakokoelmien käytön kritiikkiä esitettiin jo Kivelän (1994) artikkelissa.

Ylioppilaskirjoitukset

Matematiikan perusteiden oppimiseksi jo lukiossa on esitetty erittäin hyvä ehdotus: matematiikan ylioppilaskirjoitusten jakaminen kahteen osaan (Toivonen, 1995). Kaksiosaista koetta ovat MAOL ja SMFL kannattaneet (Björkman, Parviainen, 2000). Ensimmäinen osa käsittäisi pakollisten kurssien keskeisten sisältöjen hallintaa mittaavia, lähinnä mekaanisia tehtäviä. Siihen sisältyisi siten edellisen kaltaisia perusalgebran tehtäviä sekä eräitä geometrian ja trigonometrian tehtäviä sekä mekaanisia derivointi- ja integrointitehtäviä. Taulukkokirjojen käyttö ei olisi sallittua. Toinen osa käsittäisi matematiikan soveltamiseen ja ongelmien ratkaisuun liittyviä tehtäviä, joissa matemaattinen malli on ensin itse muodostettava ja sitten ratkaistava.

Myös Ylioppilastutkintolautakunnan vuonna 1998 asettama matematiikan kokeen kehittämisryhmä piti kaksiosaista koetta kaikin puolin hyvänä, mutta katsoi kuitenkin, ettei tässä vaiheessa käytännön järjestelyjen vaikeuden vuoksi ole mahdollista ehdottaa kahteen kokeeseen siirtymistä (Lahtinen, 1999). Nyt olisikin pohdittava, miten käytännön järjestelyt voitaisiin toteuttaa. Ehkä hankalin puoli alkuperäisessä ehdotuksessa oli kokeen kaksipäiväisyys. Kuitenkin matematiikan taidot voidaan varmasti testata myös nykyisen kuuden tunnin aikana. Kaksiosainen koe voitaisiin toteuttaa esimerkiksi seuraavasti: ensin on 2 tunnin matematiikan perusteiden koe, jossa on ratkaistava ilman taulukkokirjaa esimerkiksi 40 suoraviivaista, mekaanista tehtävää; ajan loputtua vastauspaperit kerätään pois ja jaetaan soveltavia tehtäviä neljän tunnin ajaksi. Arvostelussa voitaisiin kumpaakin osaa painottaa yhtä paljon.

Viitteet

Björkman, Jouni ja Pentti Parviainen (2000), Matematiikan ja fysiikan osaaminen hyödyllistä yhteiskunnassa, Tekniikan Akateemiset, 4/2000.

Kinnunen, Launonen, Sorvali, Toivonen (1985), Teknisten ammattien matematiikka 2Z, WSOY.

Kivelä, Simo, 1994, Minne olet menossa, lukion matematiikka, Dimensio 4/94.

Lahtinen, Aatos (1999), Ylioppilastutkinnon matematiikan kokeen uudistus, Dimensio 4/99.

Martio, Olli (2001), Osataanko matematiikkaa sittenkään?, Yliopisto-lehti 10/01.

Peltola (2001), Matematiikan osaamistasoa on parannettava, Dimensio 4/01.

Toivonen, Pertti (1995), Esitutkinta matematiikan yo-kokeeseen, Dimensio 5/95.

Toivonen, Pertti (1998), Insinöörikoulutuksen matematiikan opetuksen ongelmia, Helsingin ammattikorkeakoulun julkaisuja. Sarja B: Raportit 2.

Artikkeli on julkaistu aikasemmin *Dimension* numerossa 5/03, ja sen Solmussa julkaisuun on saatu lupa sekä lehdeltä että artikkelin kirjoittajalta.