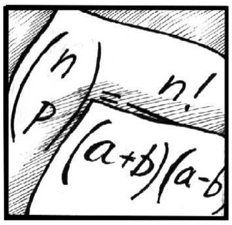

Tuomaksen tehtäviä

Solmun tämänkertaiset tehtävät ja yhden valmiin ratkaisun on laatinut *Tuomas Korppi* Helsingistä. Voit lähettää ratkaisuehdotuksesi vielä ratkaisemattomiin tehtäviin 2, 3, 4 ja 5 Solmuun joko sähköpostilla osoitteeseen

toimitus@solmu.math.helsinki.fi

tai kirjeenä osoitteeseen

Solmun toimitus
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68
00014 Helsingin yliopisto.

Tehtävä 1. Etsittävä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} aX &= 2Y \\ bZ &= 2Y \\ X - Y + Z &= 2 \end{cases}$$

ratkaisut, joissa X, Y, Z, a, b ovat positiivisia kokonaislukuja ja $a, b > 2$. Huomaatko ratkaisuna saatavissa luvuissa mitään tuttua? Jos huomaat, keksitkö yhteyttä löytämäsi tuttuuden ja yhtälöiden välille?

Ratkaisu. Ratkaisemalla X ja Z kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja sijoittamalla jälkimmäiseen saadaan

$$\frac{2}{a}Y - Y + \frac{2}{b}Y = 2.$$

Lisäämällä Y puolittain sekä jakamalla Y:llä saadaan

$$(1) \qquad \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1 + \frac{2}{Y}.$$

Siis välttämättä

$$(2) \qquad \frac{2}{a} + \frac{2}{b} > 1.$$

Jos $a \geq 6$ ja $b \geq 3$, niin

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,$$

joten (2) ei voi päteä. Koska $b \geq 3$ on oletus, on välttämättä $a < 6$. Koska tilanne on symmetrinen, myös $b < 6$.

Oletetaan, että $a \geq 4$. Jos $b \geq 4$, niin

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \leq \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1.$$

Tämä on mahdotonta. Jos siis toinen luvuista a, b on vähintään neljä, on toisen oltava kolme.

Olemme nyt saaneet karsittua pois kaikki muut (a, b)-kandidaatit paitsi $(a = 3, b = 3)$, $(a = 4, b = 3)$, $(a = 3, b = 4)$, $(a = 3, b = 5)$ ja $(a = 5, b = 3)$.

Ratkaisemalla Y yhtälöstä (1) saadaan

$$Y = \frac{2}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - 1},$$

ja sijoittamalla yo. kandidaatit ylläolevaan yhtälöön saadaan kandidaatit $(a = 3, b = 3, Y = 6)$, $(a = 4, b = 3, Y = 12)$, $(a = 3, b = 4, Y = 12)$, $(a = 5, b = 3, Y = 30)$, $(a = 3, b = 5, Y = 30)$.

Sijoittamalla kahteen ensimmäiseen yhtälöön saadaan seuraava taulukko ratkaisuista:

a	b	X	Y	Z
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
4	3	6	12	8
3	5	20	30	12
5	3	12	30	20

Huomataan, että ylläolevat luvut ovat säännöllisten monitahokkaiden tunnuslukuja: $a =$ kuinka monta särmää tulee kärkeen, $b =$ kuinka monta sivua on tahkolla, $X =$ kärkien lukumäärä, $Y =$ särmien lukumäärä, $Z =$ tahkojen lukumäärä. Taulukossa käydään läpi kaikki mahdolliset säännölliset monitahokkaat.

Mitä tekemistä sitten on säännöllisillä monitahokkailla ja alun yhtälöryhmällä?

Jokaisella särmällä on kaksi kärkeä, ja jokainen kärki on a:n särmän kärki. Ensimmäinen yhtälö $2Y = aX$ seuraa tästä tosiseikasta[1].

Jokainen särmä on kahden tahkon sivu, ja jokaisella tahkolla on b sivua. Toinen yhtälö $2Y = bZ$ seuraa tästä tosiseikasta.

Kolmas yhtälö on peräisin algebrallisesta topologiasta, ja se sanoo, että jos kappale, joka saadaan pallonpinnasta venyttämällä ja vääntämällä, jaetaan monikulmioihin, on aina

(3) kärkien lkm $-$ särmien lkm $+$ tahkojen lkm $= 2$.

Jatkotehtävä 2. Ratkaise ensimmäisen tehtävän yhtälöryhmä tapauksessa, jossa a, b, X, Y, Z ovat kokonaislukuja ja $a, b \geq 2$. Et voi nyt konstruoida monitahokkaita, jotka täsmäävät ratkaisuihin, mutta löydätkö sellaiset yleistetyt ”monitahokkaat”, joissa tahkot ja särmät saavat olla kaarevia?

Jatkotehtävä 3. Jos yllä pallon pinta olisi jonkun muun mallinen kappale, esimerkiksi torus (munkkirinkilän pinta), pätisi vastaava yhtälö kuin (3), mutta kakkosen paikalla olisi joku muu luku. Toruksen tapauksessa tuo luku olisi 0. Voit myös miettiä alun yhtälöryhmän ratkaisuja, kun kolmas yhtälö korvataan yhtälöllä

$$X - Y + Z = 0.$$

Jatkotehtävä 4. Jalkapallo on tehty 5- ja 6-kulmioista. Jokaiseen kärkeen tulee kolme särmää. Jokaisella 5-kulmiolla on yhteinen sivu 5:n eri 6-kulmion kanssa, ja jokaisella 6-kulmiolla on yhteinen sivu 3:n eri 5-kulmion kanssa. Pystytkö näiden tietojen avulla päättelemään, kuinka monta 5- ja kuinka monta 6-kulmiota jalkapallossa on? Yhtälö (3) pätee tässäkin tapauksessa.

Tehtävä 5. Olkoon A joukko, joka sisältää $2n$ pistettä, jotka sijaitsevat tasavälein yksikköympyrän kehällä. Alussa pisteet ovat valkoisia. Ne väritetään yksi kerrallaan, jossain järjestyksessä, mustiksi. Olkoot väritys-hetket $1, 2, \ldots, 2n$.

Sanomme, että piste $a \in A$ on värityksen reunapiste hetkellä t, mikäli hetken t värityksen jälkeen vähintään toinen pisteen a naapuripisteistä on eri värinen kuin a.

Osoitettava, että on olemassa hetki t, jona kaksi antipodaalista pistettä ovat värityksen reunapisteitä. Pisteet (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat *antipodaalisia*, mikäli $x_2 = -x_1$ ja $y_2 = -y_1$.

Vaihtoehtoinen muotoilu tehtävään 5. Parillinen määrä ryöväreitä istuu piirissä. Piiri on täsmälleen ympyrän muotoinen, ja ryövärit istuvat tasavälein. Ryöväripomo jakaa piiriissä istuville ryöväreille yksi ryöväri kerrallaan heidän osuutensa ryöstösaaliista. Jos ryöväri, joka on jo saanut osansa saaliista, ja ryöväri, joka ei ole vielä saanut osaansa saaliista, istuvat vierekkäin, molemmat ryövärit kyräilevät. Jos kaksi kyräilevää ryöväriä istuu täsmälleen vastapäätä toisiaan, he huomaavat toistensa kyräilevän, ja ryntäävät toistensa kimppuun.

Ryöväripomo yrittää valita sellaisen saaliinjakojärjestyksen, että ei syntyisi tappelua. Todista, että se on mahdotonta.

[1] Tutkitaan nimittäin kysymystä: *Kuinka monta erilaista paria (x, y) voidaan muodostaa, joissa y on tutkittavan monikulmion särmä ja x on särmän y kärki?* Vastaus tähän kysymykseen voidaan laskea kahdella tavalla: Joko laskemalla särmät ja kertomalla tulos kahdella, jolloin saadaan lukumääräksi $2Y$, tai laskemalla kärjet ja kertomalla tulos a:lla, jolloin saadaan lukumääräksi aX. Koska laskimme saman lukumäärän kahdella tavalla, on laskujen annettava sama vastaus, eli $aX = 2Y$.