Solmun 2/2004 tehtävien ratkaisut

Solmussa 2/2004 oli helpohkoja tehtäviä, joiden ratkaisut esitetään seuraavassa.

1. Olkoon $S_1 = 1$, $S_2 = 2+3$, $S_3 = 4+5+6, \ldots$. Laske S_{17}.

Ratkaisu. Summia laskettaessa huomataan, että summan viimeinen luku on kolmioluku eli muotoa $\frac{n(n+1)}{2}$. Havaitaan myös, että summan ensimmäinen luku on $(n-1)$:s komioluku lisättynä 1, joillon saamme S_n:lle seuraavan lausekkeen:

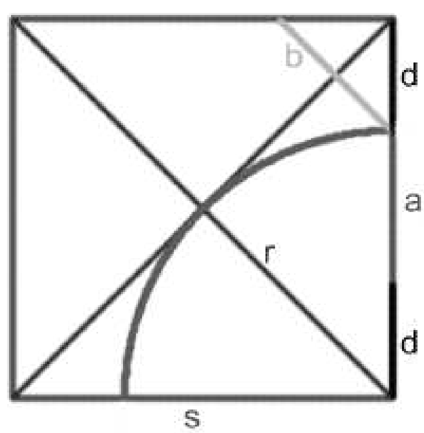
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n-1)}{2} + 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 2 + \frac{n(n-1)}{2} \\ &\quad + 3 + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n^2(n-1)}{2} + (1+2+3+4+\ldots+n) \\ &= \frac{n(n^2-n)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n^2+1)}{2} \end{aligned}$$

Näin ollen

$$S_{17} = \frac{17 \cdot (17^2+1)}{2} = \frac{17 \cdot 290}{2} = 2465.$$

2. Keskiaikaiset kivenhakkaajat käyttivät tätä metodia rakentaessaan tarkkoja kahdeksankulmioita annetun neliön sisälle. Avaa harppisi niin, että sen säde on puolet neliön halkaisijasta. Piirrä ympyrän kaari siten, että sen keskipiste on neliön kulmassa. Merkitse ne kaksi kohtaa, jotka leikkaavat neliön sivut. Tee sama kaikille neliön kulmille, jolloin saat 8 pistettä, jotka ovat kahdeksankulmion kulmia. Onko syntyvä kahdeksankulmio täysin säännöllinen kahdeksankulmio? Todista.

Ratkaisu. Merkitään neliön sivua s:llä sekä kahdeksankulmion sivujen pituuksia a:lla ja b:llä. Katso muut merkinnät alla olevasta kuvasta.



Pythagoraan lauseen mukaan

$$r = \frac{s\sqrt{2}}{2}.$$

Koska $s = r + d$, niin

$$d = s(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Kahdeksankulmion sivun pituudeksi saadaan

$$a = s - 2d = s - 2s(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = s(\sqrt{2} - 1).$$

Pythagoraan lauseen mukaan $b^2 = 2d^2$ eli $b = 2\sqrt{2}$. Näin ollen

$$b = s\sqrt{2}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = s(\sqrt{2} - 1) = a.$$

Koska neliön sisään piirretyn kahdeksankulmion kaikki sivut ovat samanpituisia ja kahdeksankulmio on kiertäen symmetrinen, on se säännöllinen.

3. Osoita, että jos kolme alkulukua, kaikki suurempia kuin 3, muodostavat aritmeettisen lukujonon, niin jonon peräkkäisten lukujen erotus on jaollinen kuudella. Esitä joitakin esimerkkejä kolmesta alkuluvusta koostuvasta aritmeettisestä lukujonosta, jotka sisältävät luvun kolme, ja näytä, että jokaisessa tapauksessa jonon peräkkäisten lukujen erotus ei ole jaollinen kuudella.

Ratkaisu. Olkoot P, Q ja S kolme alkulukua aritmeettisessä lukujonossa sekä d peräkkäisten lukujen erotus. Lukujono on siis $P, P + d, P + 2d$. Kaikki kolme alkulukua ovat suurempia kuin 3, joten niiden on oltava parittomia ja d:n on oltava parillinen, koska kahden parittoman luvun erotus on aina parillinen, $(2n + 1) - (2k + 1) = 2(n - k)$.

Laskemme modulo 6: Parillisten lukujen jäännökset modulo 6 ovat 0, 2 tai 4 ja parittomien lukujen jäännökset modulo 6 ovat 1, 3 tai 5. Tutkimiemme alkulukujen on oltava kongruentteja lukujen 1 tai 5 kanssa (mod 6), koska jos ne olisivat kongruentteja 3:n kanssa, niin ne olisivat jaollisia 3:lla, eikä kyseisiä alkulukuja olisikaan.

Olkoon P nyt kongruentti 1:llä (mod 6), siis $P + d$ on kongruentti yhden kanssa seuraavista:

$$\begin{aligned} 1 + 0 &= 1 \pmod 6, \\ 1 + 2 &= 3 \pmod 6, \\ 1 + 4 &= 5 \pmod 6. \end{aligned}$$

Koska $P + d$ on alkuluku, niin se ei voi olla kongruentti 3:n kanssa (mod 6), joten d:n on oltava kongruentti luvun 0 tai 4 kanssa (mod 6). Siis $P + 2d$ on kongruentti yhden kanssa seuraavista:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cdot 0 &= 1 \pmod 6, \\ 1 + 2 \cdot 4 &= 1 + 7 = 9 \equiv 3 \pmod 6. \end{aligned}$$

Koska myös $P + 2d$ on alkuluku, niin se ei voi olla kongruentti 3:n kanssa (mod 6), joten d on kongruentti 0:lla (mod 6).

Toisaalta, jos P on kongruentti 5:n kanssa (mod 6), niin $P + d$ on kongruentti yhden kanssa seuraavista:

$$\begin{aligned} 5 + 0 &= 5 \pmod 6, \\ 5 + 2 &= 7 \equiv 1 \pmod 6, \\ 5 + 4 &= 9 \equiv 3 \pmod 6. \end{aligned}$$

Koska $P + d$ on alkuluku, niin se ei voi olla kongruentti 3:n kanssa (mod 6), joten d:n on oltava kongruentti luvun 0 tai 2 kanssa (mod 6). Siis $P + 2d$ on kongruentti yhden kanssa seuraavista:

$$\begin{aligned} 5 + 2 \cdot 0 &= 5 \pmod 6, \\ 5 + 2 \cdot 2 &= 5 + 4 = 9 \equiv 3 \pmod 6. \end{aligned}$$

Koska myös $P + 2d$ on alkuluku, niin se ei voi olla kongruentti 3:n kanssa (mod 6), joten d on kongruentti 0:lla (mod 6).

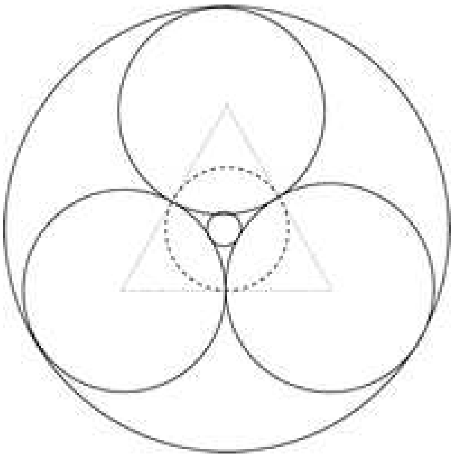
Tästä kaikesta seuraa, että d on kaikissa tapaauksissa kongruentti 0:n kanssa (mod 6), eli kun jaetaan kuudella, jäännös on 0. Siis d on jaollinen kuudella, mikä oli todistettava.

Esimerkkejä aritmeettisistä lukujonoista, jotka sisältävät luvun 3:

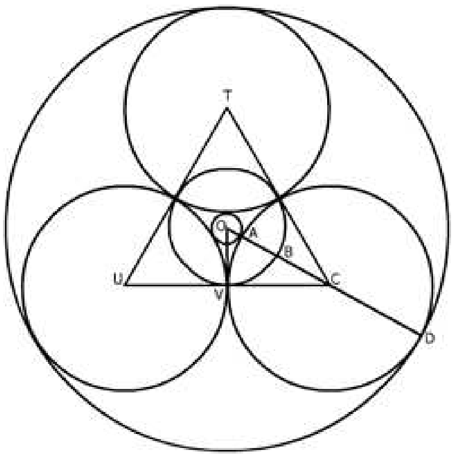
$$\begin{array}{ll} 3, 5, 7 & (d = 2), \\ 3, 7, 11 & (d = 4), \\ 3, 11, 19 & (d = 8), \\ 3, 13, 23 & (d = 10), \\ 3, 17, 31 & (d = 14), \\ 3, 23, 43 & (d = 20). \end{array}$$

Näissä esimerkeissä mikään lukujen erotus ei ole jaollinen kuudella, mutta onko tämä totta kaikille aritmeettisille lukujonoille, jotka sisältävät luvun 3? Kyllä, koska jos ensimmäinen luku on 3 ja erotus on jaollinen kuudella, olkoon se $6k$, niin toinen luku on $3 + 6k$, joka on jaollinen kolmella, eli se ei ole alkuluku. Siis lukua kolme sisältävää aritmeettistä lukujonoa, jonka peräkkäisten lukujen erotus on jaollinen kuudella, ei ole olemassa.

4. Ota kolme yksikköympyrää, jotka koskettavat toisiaan. Muodosta kolme ympyrää C_1, C_2 ja C_3, joiden säteet ovat r_1, r_2 ja r_3, kuten seuraavassa kuvassa. Ympyrät, jotka ovat tangenttina kaikille kolmelle yksikköympyrälle, ovat C_1 ja C_3, joista C_1 on pienempi. Ympyrä, joka menee yksikköympyröiden tangenttien kolmen pisteen läpi, on C_2. Etsi säteet r_1, r_2 ja r_3 ja näytä, että $r_1 r_3 = r_2^2$.



Ratkaisu. Löytääksemme kysytyt säteet $OA = r_1$, $OB = r_2$ ja $OD = r_3$ tarkastelemme alla olevaa kuviota. Kun piirrämme janan pisteestä O janan UC keskipisteeseen V, niin koska säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan, saamme $OA = r_1$. Koska kolmio TCU on tasasivuinen, niin kulma $TCU = 60°$, ja koska OC puolittaa kulman OCV, niin kulma $OCV = 30°$.



Koska $OC = OA + AC$, niin

$$\frac{CV}{OA + AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Koska $AC = CV = 1$ ja $OA = r_1$, niin

$$\frac{1}{r_1 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

joten

$$r_1 + 1 = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

ja edelleen

$$r_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

Säteen r_1 avulla voimme ratkaista r_2:n ja r_3:n. Koska $OV = r_2$, $CV = 1$ ja kulma $OCV = 30°$, niin

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Koska $OD = OA + AC + CD$, niin

$$r_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 + 1 + 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1.$$

Nyt

$$\begin{aligned} r_1 r_3 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \\ &= \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = r_2^2. \end{aligned}$$

Lähde: *NRICH*, University of Cambridge, `http://nrich.maths.org`.