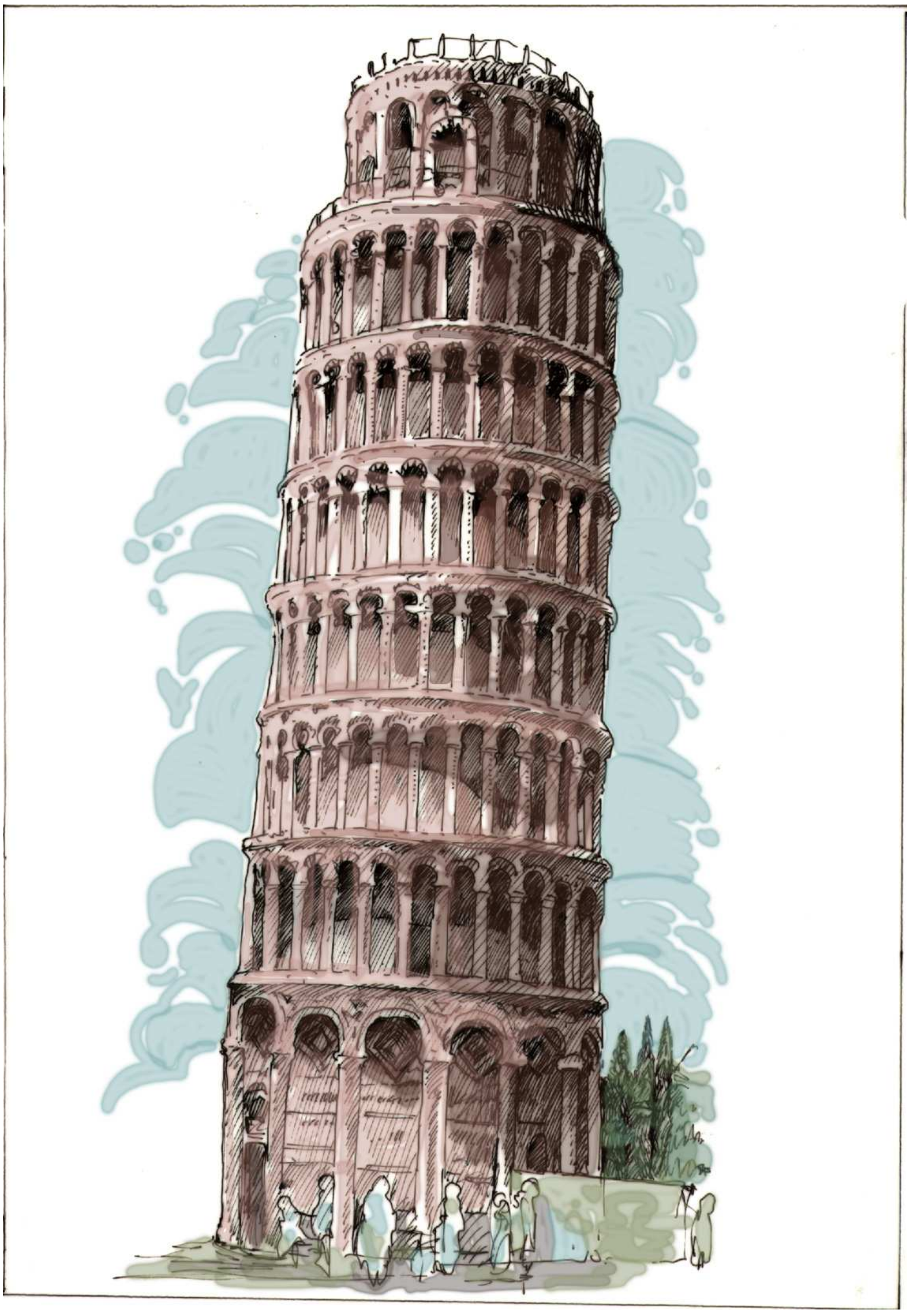
Solmu

Matematiikkalehti
1/2005

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 1/2005

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

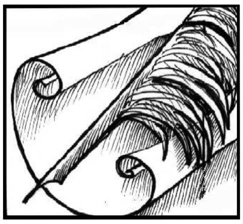
http://solmu.math.helsinki.fi/

Numeroon 2/2005 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään huhtikuun 2005 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa sekä Suomen Kulttuurirahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys



PISA-tutkimus vain osatotuus suomalaisten matematiikan taidoista

PISA-tutkimuksen tulokset (`http://www.jyu.fi/ktl/pisa/`) ovat herättäneet tyytyväisyyttä ja ylpeyttä Suomessa. On uutisoitu, että meillä peruskoulun viimeisen luokan oppilaat ovat matematiikan huippuosaajia.

Kuitenkin yliopistojen ja ammattikorkeakoulujen matematiikan opettajat ovat huolissaan, sillä uusien opiskelijoiden matematiikan taidot ovat heikentyneet dramaattisesti. Kaksi esimerkkiä tästä: 1. Laajassa TIMSS 1999 -tutkimuksessa suomalaiset koululaiset menestyivät algebrassa ja geometriassa keskimääräistä huonommin. 2. Jotta reputtajien määrä ylioppilaskokeessa ei nousisi kohtuuttoman suureksi, on viime aikoina kokeen hyväksymisraja jouduttu asettamaan hälyttävän alas, jopa 6 pistettä 60:stä on riittänyt.

Selityksenä tähän ristiriitaan on, että PISA-tutkimuksessa mitattiin arkielämän matematiikan taitoja, lähinnä eräänlaista matemaattista lukutaitoa. Tämä sanotaan raportissakin selvästi; tutkimuksessa arvioiduista taidoista käytetään englanninkielistä nimitystä ”mathematical literacy”. Sellainen matematiikka, mitä tarvitaan esimerkiksi lukio- ja ammattiopinnoissa, ei ollut mukana. Arkielämän taidot ovat varmasti arvokkaita, mutta eivät riittäviä.

Tutkimuksen 85 tehtävästä on julkaistu parikymmentä. (HS 14.12.2005 julkaisi 9 tehtävää.) Tehtävät ovat yksinkertaisia numeerisia laskuja, pikku ongelmia tai päättelyitä, tilastollisten graafisten esitysten tarkastelua, tilanteiden arviointia, joissa on oleellista luetun tekstin ymmärtäminen. Algebrasta tai geometriasta ei ole oikeastaan mitään. Tehtävät ovat kuitenkin tutkimuksen tavoitteiden mukaisia: arkielämän taitoja on ollut tarkoituskin tutkia.

PISA-tutkimuksessa jää siten täysin avoimeksi, miten hyvin osataan esimerkiksi laskea murtoluvuilla, ratkaista yksinkertaisia yhtälöitä, tehdä varsinaisia geometrisia päättelyitä, laskea kappaleiden tilavuuksia, käsitellä algebran lausekkeita. Algebra on kuitenkin matematiikassa peruskoulun jälkeisten opintojen kannalta keskeisin yksittäinen osa-alue.

Peruskoulussa pitäisi oppia matematiikan perusasiat, joiden varaan voidaan myöhemmin rakentaa lisää. Laskimien käyttökään ei muuta tilannetta: vaikka laskin laskisikin murtoluvuilla, myös käsin laskeminen on osattava, koska se on algebrallisten lausekkeiden käsittelyn pohja. Jatko-opiskelu tulee mahdottomaksi ellei perusta ole kunnossa.

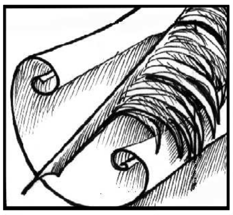
Yksi syy lisääntyvään huonoon osaamiseen ylioppilaskokeessa ja korkeakouluopintojen alussa onkin ilmeisesti jo peruskoulussa saadun pohjan heikkous. Uusia vaikeampia asioita ei kyetä omaksumaan, koska huomattava energia menee vielä lukiossa peruskoulutason asioiden pohdiskeluun. Kierre jatkuu jatko-opinnoissa: lukion asioita ei hallita ja eteenpäin meno vaikeutuu.

PISA-tutkimus tuo hyödyllistä tietoa arkielämässä tarpeellisesta matemaattisesta lukutaidosta ja yksinkertaisten ongelmien ratkaisukyvystä. Tällainen taito ei vain riitä yhä voimakkaammin matematiikkaa hyödyntävässä maailmassa. Kunnollista matemaattista pohjaa tarvitaan etenkin teknillisillä ja luonnontieteellisillä aloilla, biologia mukaanluettuna. PISA-tutkimus kertoo hyvin vähän tästä pohjasta, joka tulisi luoda jo peruskoulussa. Sen vuoksi olisi ehdottoman tarpeellista, että jatkossa Suomi osallistuisi myös niihin kansainvälisiin arviointeihin, joissa arvioidaan jatko-opintojen kannalta keskeisten matematiikan taitojen hallintaa.

Kari Astala, *matematiikan professori, Suomen matemaattisen yhdistyksen puheenjohtaja*
Simo K. Kivelä, *matematiikan yliopistonlehtori, Teknillinen korkeakoulu*
Pekka Koskela, *matematiikan professori, Jyväskylän yliopisto*
Olli Martio, *matematiikan professori, Helsingin yliopisto*
Marjatta Näätänen, *dosentti, Suomen matemaattisen yhdistyksen varapuheenjohtaja*
Kyösti Tarvainen, *matematiikan yliopettaja, Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia*

ja 201 yliopistojen, korkeakoulujen ja ammattikorkeakoulujen matematiikan opettajaa

Pääkirjoitus



Surffailua ketunhäntä kainalossa

Vapaita avoimen lähdekoodin ohjelmistoja kehittävä Mozilla-säätiö julkaisi viime vuoden lopulla 1.0 version Firefox-selaimesta. Ohjelmasta on kirjoitettu lehdissä paljon. Matemaatikoille merkittävä piirre on sisäänrakennettu tuki matemaattisten kaavojen ja symbolien MathML-esityskielelle. Tästä on hyötyä esimerkiksi Solmun numerossa 2/2004 esitellyn matematiikan verkkosanakirjan käytössä.

Avoimen lähdekoodin kehitysmallille Firefox on huomattava aluevaltaus. Aikaisemmin on totuttu ajattelemaan, että koska avoimen lähdekoodiston ohjelmistojen käyttäjät ovat samalla myös kehittäjiä, tuloksena syntyy ainoastaan kokeneille käyttäjille soveltuvia ohjelmistoja. Peruskäyttäjät eivät osaa tehdä ohjelmiin haluamiaan muutoksia ja asiantuntijoiden tarpeet ovat erilaiset. Firefox-selaimen helppokäyttöisyys ja menestys peruskäyttäjien parissa osoittavat tämän käsityksen vääräksi.

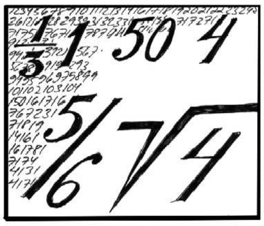
Tärkeä selitys Firefoxin suosioon on ollut sen maine turvallisena selaimena. Menestystä on varmasti osaltaan auttanut markkinajohtaja Internet Explorerin tietoturva-aukkojen saama kriittinen julkisuus. Tutkimusten mukaan erilaisia haittaohjelmia on 80 prosentissa maailman Windows-tietokoneista. Haittaohjelmien tärkein leviämiskanava ovat verkkosivut ja Internet Explorerin aukot, joista monet liittyvät ActiveX-teknologiaan. Vaihtoehtoselaimet, kuten Firefox ja Opera, eivät tue ActiveX:ää. Tämän kirjoituksen kirjoittamishetkellä Firefoxistakin on jo ehditty julkaista versio 1.0.1, jossa korjataan tietoturvaan liittyviä, vaikkakin käytännön merkitykseltään melko vähäisiä puutteita.

Onkin turha odottaa ohjelmia, joissa ei ole tietoturvaan vaikuttavia bugeja. Qmailin tapaiset suhteellisen yksinkertaiset ja lähes vainoharhaisesti tietoturvaa silmällä pitäen kirjoitetut sovellukset sekä jotkut, alunpitäen 1960-luvulla ohjelmoidut keskustietokonekoodit pääsevät ehkä kaikkein lähimmäksi tätä lähes mahdotonta saavutusta.

Mikään verkkoselain ei tule tähän yltämään näköpiirissä olevassa tulevaisuudessa. Kysymys on erittäin monimutkaisesta ohjelmistosta, jota joudutaan jatkuvasti mukauttamaan muuttuviin standardeihin. Lisäksi verkkoselain on suorassa yhteydessä sekä potentiaalisia virhetilanteita aiheuttavaan käyttäjään että vihamieliseen ulkomaailmaan, ja siksi tietoturvan kannalta ajateltuna vaarallisempaa sovellusta on vaikea kuvitella. Verkkoselaimen pitäminen erillään käyttöjärjestelmästä ja muista suorittimen muistiavaruudessa ajettavista sovelluksista parantaa jo itsessään ratkaisevasti tilannetta.

Antti Rasila

Toimitussihteerin palsta



Potenssien vaihdannaisuudesta ja liitännäisyydestä

Lajos Lóczi
Eötvös Loránd -yliopisto, Unkari

Yhteen- ja kertolasku noudattavat molemmat vaihdantalakia

$$a + b = b + a \text{ ja } a \cdot b = b \cdot a$$

ja liitäntälakia

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ ja } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

kaikilla reaaliluvuilla a, b ja c. Potenssiin korotus ei kuitenkaan ole vaihdannainen eikä liitännäinen, sillä yleensä

$$a^b \neq b^a \text{ ja } a^{(b^c)} \neq (a^b)^c.$$

Tästä huolimatta yhtäsuuruus saattaa olla voimassa tietyissä tapauksissa. Tarkoituksemme on löytää kaikki positiiviset reaalilukuparit (x, y) ja kolmikot (x, y, z), jotka täyttävät ehdot

(1) $$x^y = y^x$$

ja vastaavasti

(2) $$x^{(y^z)} = (x^y)^z.$$

Tutkimme näiden yhtälöiden rationaaliluku- ja reaalilukuratkaisuja.

Vaihdannaisuus

Aluksi haluamme löytää positiivisen reaalilukuratkaisun tapaukseen (1). (Rajoitumme vain positiivisiin ratkaisuihin, sillä potenssiin korotukset eivät ole yleisesti määriteltyjä negatiivisille reaaliluvuille. Myöskään tilanne, jossa muuttujat ovat nollia, ei kiinnosta meitä.) Yritetään aluksi arvata joitain ratkaisuja. Löydämme pian ratkaisun $x = 2$ ja $y = 4$ (tai päinvastoin). Koska (1):llä ei näytä olevan muita positiivisia kokonaislukuratkaisuja, kokeilemme joitain neliö- ja kuutiojuuria. Jos olemme onnekkaita, keksimme ratkaisun $x = \sqrt{3}$ ja $y = 3\sqrt{3}$, sillä

$$(3\sqrt{3})^{\sqrt{3}} = (\sqrt{3}^3)^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}^{3\sqrt{3}}.$$

Asian ydin on, että $3\sqrt{3}$ voidaan kirjoittaa myös $\sqrt{3}^3$. Jos tutkimme asiaa edelleen, osumme pariin $x = \sqrt[3]{4}$ ja $y = 4 \cdot \sqrt[3]{4}$, joka on ratkaisu, sillä

$$(4 \cdot \sqrt[3]{4})^{\sqrt[3]{4}} = (\sqrt[3]{4}^4)^{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{4}^{4 \cdot \sqrt[3]{4}}.$$

Tällä kertaa yhtäsuuruus $4 \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4}^4$ on avainasemassa. Havaitsemme, että olennaisesti kaikissa esimerkeissä vallitsee tilanne $y = vx$ ja $vx = x^v$. Lähdemme etenemään tästä seikasta.

Uuden muuttujan käyttöönotto

Esitämme y:n muodossa $y = vx$, missä v on reaalilukumuuttuja, eli asetamme $v = \frac{y}{x} > 0$. Silloin (1) tulee muotoon

$$(vx)^x = y^x = x^y = x^{vx} = (x^v)^x.$$

Tässä jokainen termi on positiivinen, joten jos korotamme yhtälöketjun oikean- ja vasemmanpuoleisimman osan potenssiin $\frac{1}{x}$, saamme ratkaisuna relaation $vx = x^v$. Kertomalla $\frac{1}{x}$:llä saamme $v = x^{v-1}$. Jos $v \neq 1$, eli $x \neq y$, niin korottamalla potenssiin $\frac{1}{v-1}$ saamme $x = v^{\frac{1}{v-1}}$. Vastaavasti y:lle saadaan

$$y = vx = v \cdot v^{\frac{1}{v-1}} = v^{\frac{1}{v-1}+1} = v^{\frac{v}{v-1}} = x^v.$$

Jos $v = 1$, niin $x = y$.

Muuttujalle x saatu muoto esiintyy myöhemmin useita kertoja, joten asetamme $h(v) = v^{\frac{1}{v-1}}$. Funktion h määrittelyalue on positiivisten reaalilukujen joukko, josta on poistettu 1, ja sen arvojoukko on positiivisten reaalilukujen osajoukko.

Meillä on nyt mahdolliset ratkaisut, jotka ovat itse asiassa ratkaisut yhtälölle (1): jos $v = 1$ ja x on mielivaltainen positiivinen reaaliluku, niin $y = x$ on selvästi triviaali ratkaisu. Jos $v \neq 1$, niin $x = h(v)$ ja $y = v \cdot h(v)$ ovat ei-triviaalit ratkaisut, sillä kuten juuri havaitsimme, $y = vx = x^v$ ja $y^x = (x^v)^x = x^{vx} = x^y$.

Ensimmäisen tuloksen saatiin asettamalla kaikki positiiviset reaaliratkaisut (x, y) yhtälölle $x^y = y^x$ muotoon (x, x) ja $(h(v), v \cdot h(v))$ $(x > 0,\ v > 0,\ v \neq 1)$.

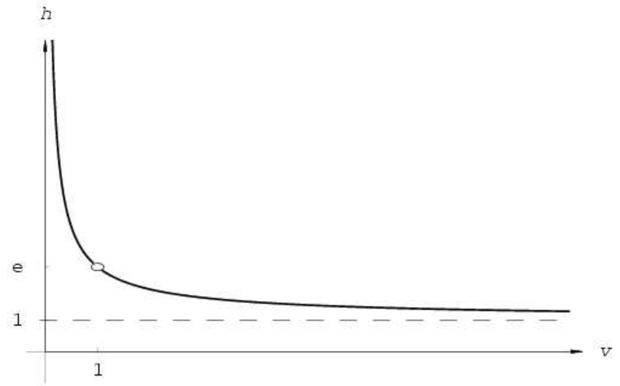
Funktiolla h on mielenkiintoisia ominaisuuksia. Jos $v > 0$ ja $v \neq 1$, niin $h(v)$ on arvo, joka kerrottuna v:llä tai korotettuna potenssiin v tuottaa saman tuloksen: $v \cdot h(v) = h(v)^v$, kuten olemme todistaneet. Toinen funktionaaliyhtälö, jonka h toteuttaa, on $v \cdot h(v) = h(\frac{1}{v})$ tai yhtäpitävästi $h(v) = \frac{1}{v} \cdot h(\frac{1}{v})$, kuten on helposti tarkistettavissa.

Tästä seuraa esimerkiksi, että ei-triviaalit ratkaisut voidaan kirjoittaa myös muotoon $(h(v), h(\frac{1}{v}))$. Näin ollen ratkaisu (x, y) on muunnettavissa ratkaisuksi (y, x) sijoituksella $v \mapsto \frac{1}{v}$.

Funktio h ei ole määritelty arvolle $v = 1$. Voidaan kuitenkin osoittaa, että se on aidosti vähenevä ja

$$\lim_{v \to 1} h(v) = e$$

(missä $e = 2{,}71828\ldots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku).



Kuva 1. $h(v) = v^{\frac{1}{v-1}}$.

Hieman analyysiä

Nyt haluaisimme saada (1):n ratkaisuista kuvan. Triviaaliratkaisut ($y = x$, kun $x, y > 0$) muodostavat xy-tason ensimmäisen neljänneksen puolittajan. Ei-triviaaliratkaisut eivät kuitenkaan ole tavallista muotoa $y = f(x)$, koska y:tä ei ole ilmaistu suoraan x:n avulla, vaan sekä x että y ovat molemmat parametrin v funktioita. Vähintäänkin nähdään, että jokaista h:n arvojoukkoon kuuluvaa x:ää kohti on olemassa täsmälleen yksi sellainen y, $y \neq x$, siten että $x^y = y^x$. Tämä merkitsee funktion $f : x \mapsto y$ olemassaoloa. Tätä funktiota käyttäen ei-triviaalit ratkaisut voidaan kirjoittaa muotoon $(x, f(x))$: jos h^{-1} merkitsee h:n käänteisfunktiota (joka on olemassa aidon monotonisuuden takia), niin $x = h(v)$ merkitsee, että $v = h^{-1}(x)$ ja täten $(h(v), v \cdot h(v)) = (x, h^{-1}(x) \cdot x)$ on se mitä vaadimme (kun $f(x) = x \cdot h^{-1}(x)$). Tämä käsittely ei kuitenkaan anna lisäinformaatiota, koska v:n ratkaiseminen lausekkeesta $x = h(v)$ – funktion h^{-1} määrittäminen – ei näytä mahdolliselta alkeisfunktiota käyttäen.

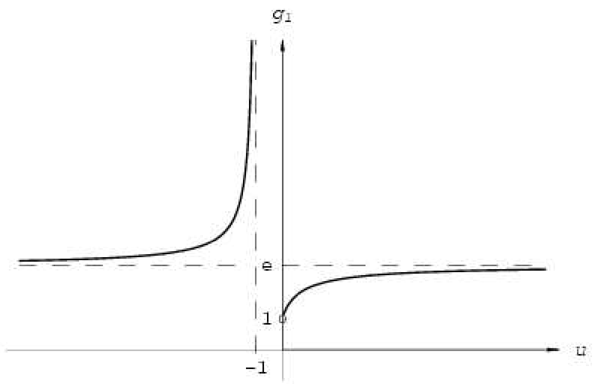
Tutkimme nyt funktioiden $h(v)$ ja $v \cdot h(v)$ käyttäytymistä parametriesityksessä, josta pystymme luonnostelemaan ei-triviaaliratkaisujen kuvaajan. Esittämällä tämä käyrä yhdessä triviaaliratkaisujen käyrän kanssa samassa koordinaatistossa saamme yhtälön (1) täydellisen positiivisen reaalilukuratkaisun.

Tarvitsemme funktion raja-arvon ja derivaatan käsitteitä (yhdessä joidenkin tunnettujen raja-arvojen kanssa), joten nämä todistukset jätetään tekemättä tai ainoastaan luonnostellaan. Hieman yksinkertaistaaksemme – ja nähdäksemme muutamia muita mukavia relaatioita – otamme jälleen käyttöön uuden muuttujan: parametrisoimme uudelleen koordinaattifunktiomme. Merkitköön u $h(v)$:n eksponenttia eli olkoon $u = \frac{1}{v-1}$. Silloin $v = 1 + \frac{1}{u}$. Tätä uutta muuttujaa käyttäen saamme kaksi funktiotamme muotoon

$$h(v) = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \text{ ja } v \cdot h(v) = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}.$$

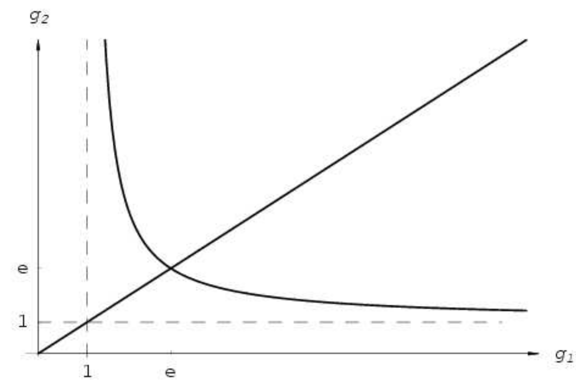
Kutsutaan näitä uusia funktioita vastaavasti $g_1(u)$:ksi ja $g_2(u)$:ksi. On helppo nähdä, että g_1:n ja g_2:n kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $x = -\frac{1}{2}$ suhteen xy-tasossa, koska x-akselin pisteen u kuva tässä peilauksessa on $(-u-1)$ ja sijoitus $u \mapsto (-u-1)$ muuttaa g_1:n g_2:ksi, koska $g_1(-u-1) = g_2(u)$ ja $g_2(-u-1) = g_1(u)$.

Riittää siis, kun tutkitaan funktiota g_1. Vastaavan funktion g_2 ominaisuudet ovat tämän jälkeen helposti johdettavissa. Koska v käy läpi positiiviset reaaliluvut, lukuun ottamatta lukua 1, on helppo nähdä, että sijoituksen jälkeen u käy läpi välin $\mathbb{R}\backslash[-1,0]$. Tämä on siis g_1:n määrittelyalue. Funktion g_1 käyttäytyminen määrittelyalueen päätepisteissä saadaan käyttämällä seuraavia tunnettuja raja-arvoja: $\lim_{u\to+\infty} g_1(u) = e$ alhaalta ja $\lim_{u\to0+} g_1(u) = 1$ ylhäältä, koska sijoitus $\omega = \frac{1}{u}$ muuttaa sen raja-arvoksi $\lim_{\omega\to+\infty} \sqrt[\omega]{\omega+1}$. Edelleen $\lim_{u\to-1-} g_1(u) = +\infty$, koska kantaluku lähestyy nollaa yläpuolelta, kun eksponentti lähestyy lukua -1. Lopulta $\lim_{u\to-\infty} g_1(u) = e$ yläpuolelta. Tämän näkee, kun tekee sijoituksen $\omega = -u$. Funktio g_1 on jatkuva määrittelyalueellaan. Voidaan todistaa, etta se on aidosti kasvava väleillä $(-\infty,-1)$ ja $(0,+\infty)$. Sen kuvaaja on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2. $g_1(u) = \left(1+\frac{1}{u}\right)^u$.

Nyt olemme valmiit piirtämään ei-triviaalit ratkaisut parametrisoinnilla $(g_1(u), g_2(u)), u \in \mathbb{R}\backslash[-1,0]$. Ne on esitetty kuvassa 3. Luonnollisesti tämä on yhtäpitävää alkuperäisen parametrisoinnin $(h(v), v\cdot h(v))$, $(v > 0, v \neq 1)$ kanssa. Kun u kasvaa $-\infty$:sta -1:een, pisteet $(g_1(u), g_2(u))$ määrittävät alemman oikeanpuoleisen kaaren kuvaajassa, koska ensimmäinen koordinaatti kasvaa e:stä $+\infty$:ään, toisen vähetessä aidosti e:stä 1:een. Kääntäen, kun u kasvaa 0:sta $+\infty$:ään, pisteet $(g_1(u), g_2(u))$ kuvaavat ylemmän vasemman osan kaaresta, koska ensimmäinen koordinaatti kasvaa 1:stä e:hen ja toinen koordinaatti vähenee $+\infty$:stä e:hen. 45° kulmassa oleva suora, kuten jo tiedämme, tulee triviaaleista ratkaisuista. Täten kuva 3 sisältää kaikki positiiviset parit (x, y), joissa vastaavat potenssit ovat vaihdannaisia. Ratkaisujen symmetrisyys ilmenee kuvaajan symmetrisyydessä suhteessa suoraan $y = x$. Triviaalit ja ei-triviaalit ratkaisut kohtaavat pisteessä (e, e).



Kuva 3.

Joitakin yksinkertaisia seurauksia

Edellä tehty analyysi tarkoittaa esimerkiksi, ettei potenssi ole vaihdannainen, jos kantaluku ja eksponentti ovat eri lukuja ja suuruudeltaan alle 1, koska ei-triviaalitapauksessa g_1:n ja g_2:n molempien arvot ovat > 1. Samoin jos $x, y > e$ ja $x \neq y$, niin yhtälöllä $x^y = y^x$ ei ole ratkaisuja. Lisäksi parametriesityksen korvaus lausekkeessa x^y tuottaa lausekkeen

$$h(v)^{v\cdot h(v)} = v^{\frac{v\, v^{\frac{v}{v-1}}}{v-1}}.$$

Voidaan todistaa, että tämän funktion arvojoukko on väli $(e^e, +\infty)$, mikä merkitsee esimerkiksi, että jos $x^y < e^e$ ja $x \neq y$, niin $x^y \neq y^x$.

Kokonais- ja rationaalilukuratkaisut

Positiivisen reaalilukuratkaisun jälkeen siirrytään tarkastelemaan yhtälön $x^y = y^x$ niitä ratkaisuja, jotka ovat kokonais- tai rationaalilukuja. On olemassa triviaaliratkaisuja – jokaisella kokonais- tai rationaaliluvulla x, kun $x > 0$ ja $y = x$ ovat sopivasti valittuja – ja ei-triviaaliratkaisuja. Kokonaislukuratkaisut voidaan päätellä käyttämällä kuvan 3 kuvaajaa: ylempi haara sisältää ainoastaan kokonaislukukoordinaattisen pisteen $(x, y) = (2, 4)$, koska ensimmäinen koordinaatti täyttää ehdon $1 < x < e$, kun taas tiedosta $e < 3$ seuraa $x = 2$ (ja vastaavasti $y = 4$). Symmetriasta johtuen ainoa kokonaislukkukoordinaattinen piste alemmalla haaralla on (4,2). Nämä ovat (1):n kokonaislukuratkaisut.

Jotta saataisiin rationaalisia ratkaisuja, niin parametrin v arvot on määrättävä sellaisiksi, että molemmat parin $(h(v), v \cdot h(v))$ jäsenistä ovat positiivisia rationaalilukuja. Jos $h(v)$ ja $v \cdot h(v)$ ovat rationaalilukuja, niin myös v:n on oltava rationaaliluku, koska $h(v)$ on positiivinen. Voimmekin olettaa, että $v = \frac{p}{q}$, missä p ja q ovat yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Epätriviaaleja ratkaisuja etsittäessä täytyy olla $v \neq 1$ ja $p \neq q$. Jos sijoitetaan $v \mapsto \frac{1}{v}$, niin vain x ja y vaihtuvat keskenään, joten on tarpeellista tutkia vain tapausta $v > 1$ (tai yhtäpitävästi $p > q$). Tämä tarkoittaa kuvan 3 kuvaajan ylemmän vasemman haaran tutkimista. Olkoon $p > q > 1$. Sijoittamalla $\frac{p}{q} = v$ saadaan

$$h(v) = (\frac{p}{q})^{\frac{q}{p-q}}.$$

Kun $m = p - q$, niin $m > 1$ on kokonaisluku. Osoitetaan ensin, että jos $m > 1$, niin $h(\frac{p}{q}) = \sqrt[m]{\frac{p^q}{q^q}}$ ei voi olla rationaaliluku. Koska p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä, niin murtoluku $\frac{p^q}{q^q}$ on sievennetyssä muodossa. Tällaisen murtoluvun m:s juuri voi olla rationaalinen vain, jos sekä osoittaja että nimittäjä ovat m:nsiä potensseja.

Olkoon $\sqrt[m]{\frac{r}{s}} = \frac{a}{b}$, missä r, s ja a, b ovat keskenään jaottomia lukuja (voidaan olettaa, että $r, s, a, b > 0$). Tällöin on voimassa $\frac{r}{s} = \frac{a^m}{b^m}$ ja edelleen a^m ja b^m ovat keskenään jaottomia. Koska supistettu muoto rationaaliluvuista on yksikäsitteinen (osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia), päättelemme, että r ja s ovat m. potensseja.

Näin ollen – kun tehdään vastaoletus, että $h(\frac{p}{q})$ on rationaalinen – on voimassa $p^q = a^m$ ja $q^q = b^m$. Nyt q:lla ja m:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, koska $p = q + m$ ja p:n ja m:n suurin yhteinen tekijä on 1, mistä seuraa, että p ja q ovat m:nsiä potensseja. Lopuksi otetaan mielivaltainen luku p:n alkulukuhajotelmasta. Jos sen eksponenttia merkitään k:lla, niin sen eksponentti p:n hajotelmassa on $p^q = k \cdot q$, joka on jaollinen m:llä. Koska m:n ja q:n suurin yhteinen tekijä on 1, huomataan, että k on jaollinen m:llä, ja siksi p on m:s potenssi. Samalla tavalla osoitetaan, että myös q on m:s potenssi.

Nyt yhtäsuuruus $m = p - q$ ei voi olla voimassa, koska kahden m:nnen eri potenssin erotus on suurempi kuin m. Jos nimittäin $t_1 > t_2 > 0$ ovat kokonaislukuja, niin

$$t_1^m - t_2^m = (t_1 - t_2)(t_1^{m-1} + t_1^{m-2}t_2 + ... + t_1 t_2^{m-2} + t_2^{m-1}),$$

ja oikea puoli on suurempi kuin $(t_1 - t_2) \cdot m \cdot t_2^{m-1}$, joka on vähintään yhtä suuri kuin m.

Olemme siis osoittaneet, että jos $m = p - q > 1$, niin $h(\frac{p}{q})$ on irrationaalinen.

Tapauksessa $m = 1$ (ts. $p = q + 1$) $h(v) = (\frac{q+1}{q})^q$ on selvästi rationaalinen. Tällöin $v \cdot h(v) = (\frac{q+1}{q})^{q+1}$. Käyttämällä q:n sijasta n:ää saadaan rationaaliratkaisu

$$x = (1 + \frac{1}{n})^n \text{ ja } y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1},$$

tai päinvastoin, kokonaisluvuilla $n \geq 1$. (Jos $n = 1$, niin kaava antaa jo löydetyn kokonaislukuratkaisun $x = 2$ ja $y = 4$.) Näin ollen nämä ratkaisut ovat ne käyrän (kuva 3) pisteet, joissa molemmat koordinaatit ovat rationaalilukuja.

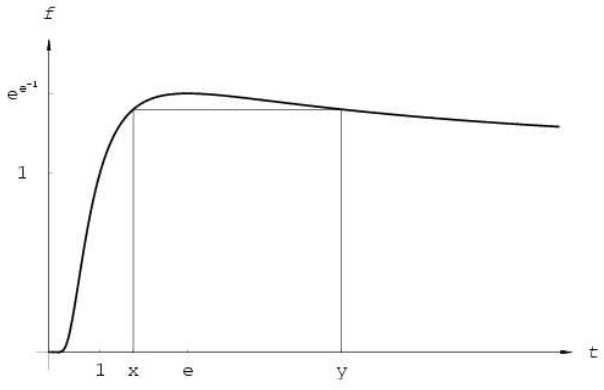
Kyseiset jonot $x = (1 + \frac{1}{n})^n$ ja $y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ovat tärkeitä reaalianalyysissä, koska ne lähestyvät lukua e, kun $n \to +\infty$: tämä vakio määritellään yleensä näiden jonojen raja-arvona. Olemme näyttäneet toteen niiden erään toisen mielenkiintoisen ominaisuuden, nimittäin sen, että niiden toisiaan vastaavat termit ovat ainoat (positiiviset ja erisuuret) rationaaliluvut, joille potenssit x^y ja y^x ovat vaihdannaisia.

Toisenlainen lähestymistapa

Lopuksi esitetään toisenlainen lähestymistapa, jolla saadaan tietoa yhtälön $x^y = y^x$ ratkaisuista. Jos korotetaan yhtälön molemmat puolet potenssiin $\frac{1}{xy}$ $(x, y > 0)$, saadaan $x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$, mikä edellyttää saman funktion (ei välttämättä eri muuttujien) kahden arvon yhtäsuuruutta: alkuperäinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $f(x) = f(y)$ kanssa, kun $f(t) = t^{\frac{1}{t}}$, $t > 0$.

Saamme triviaaliratkaisun, kun $x = y$. Kysymys kuuluukin, voiko yhtälö päteä, kun $x \neq y$? Analyysiä jatkamalla osoitetaan (käyttämällä raja-arvoa ja funktion monotonisuutta), että funktio f on välillä $(0, 1)$ bijektio ja kuvaa välit $(1, e)$ ja (e, ∞) välille $(1, e^{\frac{1}{e}})$. (Fuktio on aidosti kasvava välillä $(1, e)$ ja aidosti vähenevä välillä (e, ∞).) Funktion f jatkuvuuden avulla voidaan osoittaa, että alkuperäisellä yhtälöllä on eitriviaaliratkaisuja: jokaista $1 < x < e$ kohti on olemassa täsmälleen yksi y $(e < y < +\infty)$ siten, että $f(x) = f(y)$, ja kääntäen jokaista $e < x < +\infty$ kohti on olemassa täsmälleen yksi y $(1 < y < e)$ siten, että $f(x) = f(y)$, katso kuva 4. Jos $x \in (0, 1]$ tai $x = e$, vain $y = x$ antaa tuloksen $f(x) = f(y)$.

Yhteenvetona, jos $x \in (0, 1]$ tai $x = e$, niin on olemassa yksikäsitteinen y, kun taas jos $x \in (1, e)$ tai $x \in (e, +\infty)$, niin on olemassa kaksi y:tä siten, että $x^y = y^x$. Tällä lähestymistavalla saadaan selville helposti ratkaisujen määrä, mutta ei itse ratkaisuja.



Kuva 4. $f(t) = t^{\frac{1}{t}}$.

Liitännäisyys

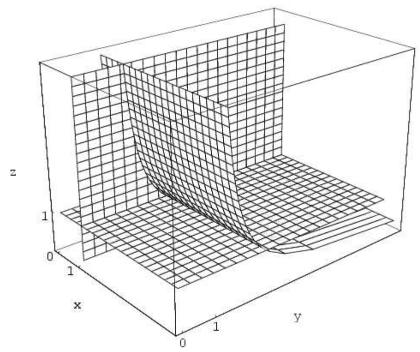
Tarkoituksena on määrittää kaikki ne positiiviset luvut x, y, z, joille on voimassa

$$(x^y)^z = x^{(y^z)}.$$

Yhtälön vasen puoli on selvästi sama kuin x^{yz}. Jos $x \neq 1$, niin saadaan $yz = y^z$. Tämän yhtälön saimme juuri vaihdannaisessa tapauksessa. Jos $z = 1$, niin jokainen positiivinen y on ratkaisu, muulloin $y = h(z)$.

Tämän vuoksi saamme ratkaisuiksi kaikki positiiviset luvut x, y, z, joiden potenssit täyttävät seuraavat ehdot (katso kuva 5):

$$(1, y, z), \text{ missä } y, z > 0,$$
$$(x, y, 1), \text{ missä } x, y > 0, \; x \neq 1,$$
$$(x, h(z), z), \text{ missä } x, z > 0, \; x \neq 1, \; z \neq 1.$$



Kuva 5.

Kokonais- ja rationaalilukuratkaisut

Vaihdannaisen tapauksen tutkimisesta saatiin tuloksena rationaaliratkaisut. Lähtemällä reaalilukuratkaisuista päädytään siihen tulokseen, että positiiviset rationaalilukupotenssit ovat liitännäisiä, jos kolmikko (x, y, z) kuuluu johonkin seuraavista luokista:

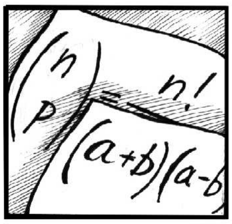
$$(1, y, z), \text{ missä } y, z > 0 \text{ ovat rationaalilukuja,}$$
$$(x, y, 1), \text{ missä } x, y > 0, \text{ ovat rationaalilukuja, } x \neq 1,$$
$$\left(x, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{n+1}{n}\right), \text{ missä } 0 < x \neq 1$$
on rationaaliluku ja n positiivinen kokonaisluku,
$$\left(x, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \frac{n}{n+1}\right), \text{ missä } 0 < x \neq 1$$
on rationaaliluku ja n on positiivinen kokonaisluku.

Kaksi ensimmäistä tapausta ovat triviaaleja. Kaksi jälkimmäistä johtuvat ratkaisuista $(x, h(z), z)$, koska vaihdannaisessa tapauksessa on koottu yhteen kaikki rationaaliluvut v, joilla $h(v)$ on myös rationaaliluku. (Korvaa v nyt z:lla.) Silloin havaitsemme, että jos $v = \frac{p}{q}$, kun $p > q \geq 1$ ja p, q ovat kokonaislukuja, niin $h(v)$ on rationaalinen, jos ja vain jos $p = q + 1$, mikä johtaa kolmanteen tapaukseen (kun korvataan q n:llä ja sallitaan myös, että $q = 1$). Lopuksi, jos jälleen $v = \frac{p}{q}$, mutta tällä kertaa $p > q \geq 1$, niin vaihdannaisen tapauksen todistus on oikea, kun vaihdetaan p ja q keskenään ja saadaan ainoaksi mahdollisuudeksi $q = p + 1$. Tämä on kuvattu neljännellä rivillä. (Tapaus $p = q$ on jo käsitelty yllä, koska tässä $z \neq 1$.)

Samoin kuin kokonaislukuratkaisuissa kolmas rivi ylhäältä antaa kokonaislukuratkaisuja vain, jos $n = 1$, mutta viimeinen rivi ei koskaan, joten yhtälön (2) positiiviset kokonaislukuratkaisut ovat seuraavassa:

$$(1, y, z), \text{ missä } y, z > 0 \text{ ovat kokonaislukuja,}$$
$$(x, y, 1), \text{ missä } x, y > 0 \text{ ovat kokonaislukuja, } x \neq 1,$$
$$(x, 2, 2), \text{ missä } x > 1 \text{ on kokonaisluku.}$$

Lähde: *KöMaL*, `http://www.komal.hu`.
Artikkelin kääntämiseen ja Solmussa julkaisuun on saatu lupa sekä lehdeltä että artikkelin kirjoittajalta.
Käännös ja ladonta: ***Anneli Ketola*** ja ***Anja Koistinen***



Taikasummat ja -tulot

Monien tuntemalla taikaneliöllä

$$\begin{array}{ccc} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{array}$$

on ominaisuus, että kun kolme lukua sen jokaisella kolmella rivillä tai jokaisessa kolmessa sarakkeessa tai kahdella lävistäjällä lasketaan yhteen, niin summaksi tulee sama luku 15. Tätä lukua kutsutaan neliön *taikasummaksi*.

Vähemmän tunnettua on, että jos jokaisella rivillä olevat kolme lukua kerrotaan keskenään ja näin saadut kolme tuloa lasketaan yhteen,

$$8 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 9 \cdot 2 = 225,$$

saadaan sama summa kuin kertomalla kaikissa sarakkeissa olevat kolme lukua keskenään ja laskemalla näin saadut kolme tuloa yhteen:

$$8 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \cdot 9 + 6 \cdot 7 \cdot 2 = 225.$$

Tätä lukua kutsutaan neliön *taikatuloksi*.

Seuraavaksi kerrotaan rivin luvut pareittain keskenään joka rivillä ja lasketaan ne yhteen,

$$(8{\cdot}1+1{\cdot}6+6{\cdot}8)+(3{\cdot}5+5{\cdot}7+7{\cdot}3)+(4{\cdot}9+9{\cdot}2+2{\cdot}4) = 195.$$

Sitten tehdään sama sarakkeittain,

$$(8{\cdot}3+3{\cdot}4+4{\cdot}8)+(1{\cdot}5+5{\cdot}9+9{\cdot}1)+(6{\cdot}7+7{\cdot}2+2{\cdot}6) = 195.$$

Tulokset ovat jälleen samat! Tätä lukua kutsutaan neliön *pareittain lasketuksi taikatuloksi*.

Muut 3×3 -taikaneliöt, joissa esiintyvät luvut yhdestä yhdeksään, ovat vain yllä olevan taikaneliön peilikuvia tai siitä kierrolla saatuja, kuten

$$\begin{array}{ccc} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{array} \quad \text{tai} \quad \begin{array}{ccc} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{array} \quad \text{tai} \quad \begin{array}{ccc} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{array}$$

Kaikissa näissä esimerkeissä olevat taikasummat, taikatulot ja pareittain lasketut taikatulot ovat samat kuin ensimmäisessä taikaneliössä. Taikaneliöitä voi kuitenkin muodostaa myös käyttämällä muitakin yhdeksänlukuisia lukujoukkoja. Alla on kolme esimerkkiä.

TAIKANELIÖ:	$\begin{array}{ccc} 9 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 10 & 3 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 9 \\ 11 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 6 & 5 & 13 \\ 15 & 8 & 1 \\ 3 & 11 & 10 \end{array}$
Taikasumma:	18	18	24
Taikatulo:	468	414	840
Pareittain laskettu taikatulo:	294	285	489

Löydätkö muita 3×3 -taikaneliöitä?

Edellä olevia esimerkkejä voi tietenkin kiertää tai peilata tai neliön luvut voi kertoa jollain vakiolla. Uudet neliöt ovat edelleen taikaneliöitä, eikä ole vaikea huomata, että saaduilla taikaneliöillä on edelleen taikatulon ja pareittain lasketun taikatulon ominaisuudet.

Minkä tahansa taikaneliön lukuihin voi myös lisätä saman vakion ja tuloksena on selvästi uusi taikaneliö. Tässä tapauksessa ei ole aivan ilmiselvää, että uudella neliöllä on edelleen taikatulon ja pareittain lasketun taikatulon ominaisuudet.

Yritä tehdä oma taikaneliö laittamalla muutama luku neliöön ja lisäämällä loput luvut siten, että rivit, sarakkeet ja lävistäjät summautuvat samaan lukuun. Joka kerta, kun onnistut tekemään taikaneliön, sinun kannattaa tarkistaa, että taikatulon ja pareittain lasketun taikatulon ominaisuudet toimivat myös.

Kun olet onnistunut tekemään muutaman lisäesimerkin, saatat huomata, että taikasumma on aina kolme kertaa taikaneliön keskimmäinen luku. Erityisesti näyttää siltä, että taikasumma on aina kolmen monikerta.

Selvitetään seuraavaksi järjestelmällinen tapa löytää kaikki 3×3 -taikaneliöt.

Olkoon keskimmäinen luku x, ja olkoon jokaisen rivin, sarakkeen tai lävistäjän taikasumma R.

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & x & * \\ * & * & * \end{array}$$

Laske keskimmäinen sarake, keskimmäinen rivi ja molemmat lävistäjät yhteen saaden näin $4R$.

$$\begin{array}{ccc} \backslash & | & / \\ - & x & - \\ / & | & \backslash \end{array}$$

Tämä summa sisältää keskimmäisen luvun 4 kertaa ja kaikki muut luvut kerran, joten sen täytyy summautua kaikkien lukujen summaan $3R$ yhteenlaskettuna 3 kertaa keskimmäinen luku. Siis

$$4R = 3R + 3x,$$

josta saadaan

$$R = 3x.$$

Tämä kertoo myös sen, että kaikkien lukujen summa neliössä on $9x$.

Nyt voit tehdä omat taikaneliösi. Valitset vain keskimmäisen luvun ja kaksi lukua muualle neliöön, jonka jälkeen täytät koko taikaneliön siten, että jokainen rivi summautuu samaan lukuun kuin 3 kertaa keskimmäinen numero.

Esimerkiksi, jos luku keskellä on 7, rivin summan täytyy olla 21, eli luvuista

$$\begin{array}{ccc} 8 & * & 10 \\ * & 7 & * \\ * & * & * \end{array}$$

saadaan taikaneliö

$$\begin{array}{ccc} 8 & 3 & 10 \\ 9 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & 6 \end{array}$$

Jos "kulmiksi" valitaan $x + a$ ja $x + b$, siis

$$\begin{array}{ccc} x+a & * & x+b \\ * & x & * \\ * & * & * \end{array}$$

niin tällöin taikaneliö on

$$\begin{array}{ccc} x+a & x-a-b & x+b \\ x-a+b & x & x+a-b \\ x-b & x+a+b & x-a \end{array}$$

Ainoastaan perusalgebraa käyttäen on mahdollista tarkistaa, että yleinen 3×3 -taikaneliö täyttää taikatulon ja parittain lasketun taikatulon ominaisuudet. Tämän toteaminen jää kiinnostuneen lukijan omaksi harjoitukseksi.

Mitä tapahtuu 5×5 -taikaneliössä? Kokeile alla olevaa esimerkkiä.

10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15
4	12	25	8	16

Mitä havaitset?

Lähde: *NRICH*, University of Cambridge, *http://nrich.maths.org/*.
Käännös ja ladonta: ***Kalle Siljander***

Sisarusongelma – paradoksi ehdollisesta todennäköisyydestä

Saara Lehto ja Tommi Sottinen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Todennäköisyyslaskenta on täynnä erilaisia paradokseilta tuntuvia ongelmia. Monet niistä liittyvät ehdolliseen todennäköisyyteen. Paradoksi syntyy, jos kysymys tai annetut tiedot ymmärretään väärin. Tutkimme tässä yhtä tällaista ongelmaa.

Sisarusongelma: Äidillä on kaksi lasta, joista toinen on tyttö. Mikä on todennäköisyys, että toinen on poika?

Oletamme, että tytöt ja pojat syntyvät toisistaan riippumatta samalla todennäköisyydellä 1/2.

Väärä vastaus: 1/2.

Virheellinen ratkaisu perustuu seuraavaan päättelyyn. Äidillä on tyttö. Seuraava lapsi on joko poika tai tyttö. Todennäköisyys, että se on poika on 1/2.

On totta, että pojan syntymätodennäköisyys on 1/2, mutta kysytäänkö ongelmassa tätä?

Oikea vastaus: 2/3.

Mietitään tilannetta huolellisemmin. Perheessä on kaksi lasta. Jos äiti luettelee lapset ikäjärjestyksessä, mahdollisuuksia ovat:

1. tyttö–tyttö,
2. tyttö–poika,
3. poika–tyttö,
4. poika–poika.

Periaatteessa kaikki nämä vaihtoehdot ovat yhtä todennäköisiä. Koska tiedämme, että perhessä on tyttö, on vaihtoehto 4 kuitenkin mahdoton. Vaihtoehdot 1–3 ovat sen sijaan edelleen yhtä todennäköisiä. Näistä vaihtoehdoista kahdessa on poika. Siten todennäköisyys, että perheessä on poika on 2/3.

Ongelman systemaattinen mallinnus

Miten sitten todennäköisyyslaskennan ongelmia tulisi ratkoa? Tässä esitetyt ratkaisut lienevät molemmat ensi silmäyksellä uskottavia. Ne ovat kuitenkin vain tähän erikoistapaukseen sopivia. Esitämmekin seuraavassa systemaattisemman tavan oikean ratkaisun löytämiseen.

Unohdetaan aluksi varsinaisen kysymyksen pohtiminen ja tarkastellaan rauhassa tehtävän tilannetta.

(a) Äidillä on kaksi lasta. Mahdollisia tapahtumia ovat siis järjestetyt parit TT, TP, PT ja PP, missä T = tyttö ja P = poika.

(b) Toinen lapsista on tyttö. Mahdollisia pareja ovat siis TT, TP ja PT. Sanotaan, että tapahtuma

$$\mathsf{TT\ tai\ TP\ tai\ PT} \quad = \quad \mathsf{ei\,PP}$$

on sattunut.

(c) Kysytty tapahtuma "toinen lapsista on poika" on puolestaan

$$\mathsf{TP\ tai\ PT\ tai\ PP} \quad = \quad \mathsf{ei\,TT}.$$

(d) Koska tytöt ja pojat syntyvät toisistaan riippumattomasti samalla todennäköisyydellä $1/2$, on jokaisen järjestetyn tyttö/poika-parin todennäköisyys sama $1/4$.

Ongelmassa kysytään, mikä on todennäköisyys, että toinen lapsista on poika, kun tiedetään, että toinen lapsista on tyttö. Eli mikä on todennäköisyys, että tapahtuma "TP tai PT tai PP" sattuu ehdolla, että tapahtuma "TT tai TP tai PT" on sattunut. Kyseessä on siis ehdollinen todennäköisyys ja se merkitään

$$\mathbf{P}(\mathsf{TP\ tai\ PT\ tai\ PP} \,|\, \mathsf{TT\ tai\ TP\ tai\ PT})$$

$$= \mathbf{P}(\,\mathsf{ei\,TT} \,|\, \mathsf{ei\,PP}).$$

Tässä siis $\mathbf{P}$ tarkoittaa todennäköisyyttä ja merkin $|$ voi lukea "ehdolla".

Nyt tehtävä on oikein muotoiltu. Jäljellä on enää vastauksen laskeminen. Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän nojalla

$$\mathbf{P}(\,\mathsf{ei\,TT} \,|\, \mathsf{ei\,PP}) \quad = \quad \frac{\mathbf{P}\Big((\,\mathsf{ei\,TT})\ \mathsf{ja}\ (\,\mathsf{ei\,PP})\Big)}{\mathbf{P}\Big(\,\mathsf{ei\,PP}\Big)}.$$

Alakerta on helppo laskea. Nimittäin

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\,\mathsf{ei\,PP}) &= 1-\mathbf{P}(\mathsf{PP})\\ &= 1-\frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Yläkerran laskemiseksi huomaamme, että

$$(\,\mathsf{ei\,TT})\ \mathsf{ja}\ (\,\mathsf{ei\,PP}) \quad = \quad \mathsf{TP\ tai\ PT}.$$

Siispä

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big((\,\mathsf{ei\,TT})\ \mathsf{ja}\ (\,\mathsf{ei\,PP})\Big) &= \mathbf{P}\Big(\mathsf{TP\ tai\ PT}\Big)\\ &= \mathbf{P}(\mathsf{TP})+\mathbf{P}(\mathsf{PT})\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Olemme siis saaneet vastauksen

$$\mathbf{P}(\,\mathsf{ei\,TT} \,|\, \mathsf{ei\,PP}) \quad = \quad \frac{1/2}{3/4} \quad = \quad \frac{2}{3}.$$

Ratkaisussa olennaista oli oivaltaa, että tehtävänannon "toinen lapsista" voi olla yhtä hyvin lapsista nuorempi kuin vanhempikin. Väärä vastaus ei ottanut tätä huomioon vaan vastasi eri kysymykseen

$$\mathbf{P}(2.\ \text{lapsi on poika} \,|\, 1.\ \text{lapsi on tyttö})$$

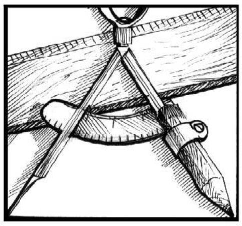
$$= \quad \mathbf{P}(\mathsf{TP\ tai\ PP} \,|\, \mathsf{TP\ tai\ TT}).$$

Lopuksi jätämme lukijalle ratkaistavaksi seuraavan kolmen lapsen sisarusongelman.

Ongelma: Äidillä on 3 lasta, joista yksi on tyttö. Mikä on todennäköisyys, että äidillä on poika?

Oikea vastaus on $6/7$. Virheajattelulla saataisiin tulos $3/4$. Lisää todennäköisyyslaskentaankin liittyviä paradokseja löytyy esimerkiksi netistä osoitteista

- `home1.gte.net/deleyd/random/probprdx.html`
- `mathforum.org/dr.math/faq/faq.classic.problems.html`
- `www.math.hmc.edu/funfacts/`
- `www.cut-the-knot.org/probability.shtml`



Trigonometriset funktiot

Pekka Alestalo
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Johdanto

Trigonometriset funktiot määritellään lukiokursseissa joko kolmioiden sivujen pituuksien suhteina tai hieman yleisemmin yksikköympyrän avulla. Määritelmä on havainnollinen, mutta siihen liittyy yksi vakava puute: Miten lasketaan esimerkisi $\sin(50°)$ kymmenen desimaalin tarkkuudella, niin kuin se monista laskimista saadaan?

Karkea likiarvo saadaan tietysti astemittaa ja viivotinta käyttämällä. Toinen mahdollisuus on laskea esimerkiksi puolikkaan kulman kaavoja toistuvasti käyttämällä $\sin(\pi/2^n)$ ja $\cos(\pi/2^n)$ suurilla n ja sen jälkeen yhteenlaskukaavojen avulla muita likiarvoja.

Mutta eikö funktion arvon pitäisi olla tarkasti laskettavissa pelkästään määritelmän avulla? Tämän kirjoituksen tarkoituksena on johtaa sinille ja kosinille sellaiset määritelmät, jotka toteuttavat myös tämän ehdon. Päättelyn seuraamiseen tarvitaan alkeellisia tietoja integraalilaskennasta ja lukujonon raja-arvosta. Lisäksi käytämme summamerkintää

$$\sum_{k=0}^{m} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_m.$$

Huomattakoon, että jonosta voidaan valita parillisia ja parittomia indeksejä vastaavat summat muodossa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_{2k} &= a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n},\\ \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} &= a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}.\end{aligned}$$

Lähdetään liikkeelle seuraavista trigonometristen funktioiden ominaisuuksista:

- $\sin x$ ja $\cos x$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$
- $\cos 0 = 1$
- $\sin(-x) = -\sin x$ ja $\cos(-x) = \cos x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$
- $D(\sin x) = \cos x$ ja $D(\cos x) = -\sin x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

Tässä muuttuja x on pelkkä reaaliluku, mutta helpoin tapa ominaisuuksien perustelemiseksi on tulkita se radiaaneissa annetuksi kulman arvoksi ja sijoittaa piste $(\cos x, \sin x)$ origokeskiselle 1-säteiselle ympyrälle. Kaikki muut sinin ja kosinin ominaisuudet seuraavat näistä neljästä kohdasta, ja itse asiassa kolmannessa kohdassa riittää vain ensimmäinen yhtälö, koska toinen seuraa siitä yhdessä derivaattoja koskevien ehtojen kanssa. Jos unohdamme kaiken muun, niin jaksollisuuteen tarvitaan vielä lisävaatimuksena jokin yhteys lukuun π, esimerkiksi muodossa $\sin\pi = 0$ tai $\cos(\pi/2) = 0$, mutta näitä emme tarvitse tässä tarinassa.

Likiarvojen laskeminen

Johdamme seuraavaksi menetelmän trigonometristen funktioiden arvojen laskemiseksi millä tahansa tarkkuudella. Käytämme yllä mainittuja ominaisuuksia suuntaviittoina.

Sijoittamalla $x = 0$ kaavaan $\sin(-x) = -\sin x$ nähdään, että $\sin 0 = 0$. Lisäksi

$$D(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2\sin x\cos x - 2\cos x\sin x = 0,$$

joten $\sin^2 x + \cos^2 x$ on vakio. Sijoittamalla $x = 0$ nähdään, että tämän vakion arvo on 1, joten päädyimme tuttuun kaavaan

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}.$$

Tämän perusteella $-1 \le \sin x \le 1$ ja $-1 \le \cos x \le 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Osoittautuu, että sinille ja kosinille saadaan yhä tarkempia approksimaatioita integroimalla toistuvasti epäyhtälöä $\cos x \le 1$. Oletetaan aluksi, että $x \ge 0$. Kirjoitetaan muuttujan paikalle t ja integroidaan epäyhtälön molemmat puolet muuttujan t suhteen välillä $[0, x]$:

$$\cos t \le 1 \Longrightarrow \int_0^x \cos t\, dt \le \int_0^x 1\, dt \Longleftrightarrow \sin x \le x;$$

muista, että epäyhtälön suunta säilyy integroinnissa, vaikka funktiot eivät olisikaan positiivisia. Seuraavassa vaiheessa sijoitetaan tulokseen taas muuttuja t ja integroidaan välillä $[0, x]$:

$$\sin t \le t \Longrightarrow \int_0^x \sin t\, dt \le \int_0^x t\, dt \Longrightarrow 1 - \cos x \le \frac{1}{2}x^2.$$

Jatketaan samalla periaatteella neljä kertaa, jolloin saadaan seuraavat epäyhtälöt:

$$\begin{aligned}
x - \sin x &\le \frac{1}{2\cdot 3}x^3\\
-1 + \frac{1}{2}x^2 + \cos x &\le \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4\\
-x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \sin x &\le \frac{1}{5!}x^5\\
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cos x &\le \frac{1}{6!}x^6
\end{aligned}$$

Kokoamalla nämä tulokset yhteen saadaan arviot

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \le \quad \cos x \quad &\le 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4,\\
x - \frac{1}{3!}x^3 \le \quad \sin x \quad &\le x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5,
\end{aligned}$$

kun $x \ge 0$. Kosinin parillisuuden ($\cos(-x) = \cos x$) nojalla ylemmät epäyhtälöt ovat voimassa kaikilla $x \in \mathbb{R}$, mutta sinin parittomuuden ($\sin(-x) = -\sin x$) vuoksi alempien epäyhtälöiden suunta vaihtuu arvoilla $x < 0$. Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on kuitenkin voimassa

$$\begin{aligned}
\left|\cos x - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4)\right| &\le \frac{1}{6!}x^6,\\
\left|\sin x - (x - \frac{1}{3!}x^3)\right| &\le \frac{1}{5!}|x|^5.
\end{aligned}$$

Jatkamalla integroimista päästään yhä tarkempiin approksimaatioihin ja yleisesti

$$\begin{aligned}
\left|\cos x - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right| &\le \frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2},\\
\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right| &\le \frac{1}{(2n+3)!}|x|^{2n+3}
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Summalausekkeiden muodon keksiminen saattaa tuntua ensi silmäyksellä vaikealta, mutta siihen ei ole muuta apua kuin kokeilu. Auki kirjoitettuna

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} &= \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0)!}x^{2\cdot 0} + \frac{(-1)^1}{(2\cdot 1)!}x^{2\cdot 1}\\
&\quad + \frac{(-1)^2}{(2\cdot 2)!}x^{2\cdot 2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},
\end{aligned}$$

joka antaa täsmälleen oikeaa muotoa olevan polynomin. Täsmällisyyttä kaipaavat lukijat voivat todistaa epäyhtälöt oikeiksi käyttämällä matemaattista induktiota.

Osoitetaan seuraavaksi, että oikean puolen ylärajat lähestyvät nollaa jokaisella kiinteällä x, kun $n \to \infty$. Koska lausekkeet ovat hyvin samankaltaiset, tutkitaan vain kosinia. Merkitään siis $a_n = x^{2n+2}/(2n+2)!$ ja osoitetaan, että $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Tarkastellaan jonon kahden peräkkäisen termin suhdetta:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{x^{2(n+1)+2}/(2(n+1)+2)!}{x^{2n+2}/(2n+2)!}\\
&= \frac{(2n+2)!x^{2n+4}}{(2n+4)!x^{2n+2}}\\
&= \frac{x^2}{(2n+4)(2n+3)} < \frac{x^2}{4n^2},
\end{aligned}$$

sillä $(2n+4)! = (2n+4)(2n+3)\cdot(2n+2)!$. Tästä seuraa, että $a_{n+1}/a_n < 1/2$, kunhan vain $n > |x|/\sqrt{2}$. Toisin sanoen, tämän kiinteän rajan jälkeen jonon seuraava termi on aina alle puolet edellisestä. Koska jonon termit ovat positiivisia, ne lähestyvät tämän vuoksi nollaa. Vastaava päättely sini-funktion tapauksessa jää lukijan harjoitustehtäväksi.

On vielä syytä korostaa sitä, että nämä epäyhtälöt seuraavat alussa mainituista yksinkertaisista ominaisuuksista: mitään muita trigonometriaa koskevia tietoja ei ole päättelyssä käytetty.

Lasketaan vielä esimerkkinä alussa mainittu $\sin(50°)$ niin tarkasti, että likiarvon virhe on alle 10^{-10}. Radiaaneissa mitattuna täytyy siis laskea $\sin(50\pi/180) = \sin(5\pi/18)$, joten muuttujan paikalle sijoitetaan $x = 5\pi/18 \approx 0{,}8726646262$. Vaadittu tarkkuus saavutetaan, jos

$$\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} < 10^{-10}.$$

Kokeilemalla eri n:n arvoja todetaan, että riittää valita $n = 5$, jolloin vaadittu approksimaatio on

$$\begin{aligned}\sin(50°) &\approx \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} \\ &\approx 0{,}7660444431,\end{aligned}$$

jossa todellakin kaikki desimaalit ovat oikein (välivaiheissa esiintyvät luvut kuten π täytyy laskea riittävän tarkasti!).

Entä varsinainen määritelmä?

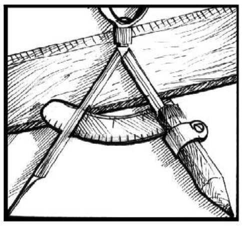
Johdimme yllä menetelmän sinin ja kosinin likiarvojen laskemiseen. Menetelmästä saadaan helposti myös tarkat määritelmät sille, mitä sini ja kosini oikeastaan ovat. Koska approksimaatioiden virhe lähestyy nollaa, voimme yksinkertaisesti sanoa, että

$$\begin{aligned}\cos x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots, \\ \sin x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots,\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Merkintä, jossa summan ylärajana on ääretön, tarkoittaa sarjakehitelmää. Sarjakehitelmän voi tulkita algoritmiksi, jolla funktion likiarvo voidaan laskea mielivaltaisen tarkasti, kunhan vain sarjan alusta otetaan riittävän monta (mutta kuitenkin äärellinen määrä!) termiä mukaan.

Voisimme nyt johtaa kaikki aikaisemmat ominaisuudet näistä määritelmistä lähtien. Tällöin tulee vastaan joitakin uusia ongelmia, joista suurin on kysymys siitä, saako sarjakehitelmiä derivoida termeittäin, eli voiko derivaatan viedä ongelmitta äärettömän summan sisälle. Tämä jääköön jo kirjoitukseni ulkopuolelle, mutta kehotan lukijaa derivoimaan sinin sarjakehitelmän termi kerrallaan summamerkinnän sisällä ja tutkimaan lopputulosta!

Lopuksi kehotan lukijaa palauttamaan mieleensä Solmussa 3/2003 ilmestyneen Markku Halmetojan hieman lennokkaamman kirjoituksen samasta aihepiiristä.



Kahvikupista kirurgiaan – matematiikan sovelluksia tutkimassa

Matti Lassas
Professori
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

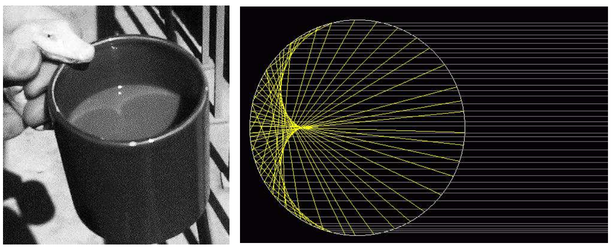
Tehdäänkö tutkimusta puhtaan totuuden tavoittelun vai sen tuottaman hyödyn takia? Vastaukset tähän kysymykseen ovat vaihdelleet ajan kuluessa. Kun Suomen yliopistojärjestelmä perustettiin, olivat koulutukselliset hyötynäkökohdat tärkeimpiä. Esimerkiksi perustettaessa Turun Akatemiaan ensimmäistä matematiikan professuuria ei itsenäisen tutkimuksen tekemistä rohkaistu. Päinvastoin oli tarkkaan määrätty, kenen oppeja oli noudatettava, sillä kaikki itse keksityt tai muuten uudet ajatukset katsottiin vanhoja tietoja halventaviksi. Myöhemmin yliopistot omaksuivat humboldtilaisen sivistysyliopistoihanteen ja yliopistot käsitettiin sivistyslaitoksiksi, joiden tehtäviin kuuluu perustutkimuksen edistäminen. Tämä näkyy Suomen matematiikan historiassa puhtaan matematiikan voittokulkuna ja merkittävien koulukuntien syntymisenä. Viime vuosisadan aikana yliopistot ovat kasvaneet huomattavan suuriksi tutkimus- ja koulutuslaitoksiksi ja kasvaneen koon myötä yliopistojen tehtävät ovat laajentuneet. Sivistyksen kotina toimimisen lisäksi yliopistoilta edellytetään kasvavaa yhteiskuntaa hyödyttävää toimintaa. Suomen matemaattisessa kentässä tämä on korostanut sovelletun matematiikan roolia.

Hyötynäkökulmasta tiedettä tarkastellen voidaankin provosoivasti kysyä: ”Mihin Suomi yleensä tarvitsee perustutkimusta, löytyväthän kaikki tutkimuksen tulokset nykyään internetistä?” Tämänkaltainen suhtautuminen tietoon sivuuttaa tieteen tärkeän sosiaalisen komponentin: Yhteiskunta ei voi hyödyntää uusimpia tutkimustuloksia ilman tutkimusyhteisöä, joka aktiivisesti harjoittaa tutkimusta. Samalla tavoin kuin kirjastolaitos on hyödytön ilman kirjojen lukijoita, ei uusin tutkimustieto voi olla käytettävissä ilman ihmisiä, jotka aktiivisesti sitä käyttävät.

Tarkastellaan seuraavaksi, kuinka matemaattinen tutkimus auttaa yhteiskuntaa, jossa elämme, sekä ihmiskuntaa yleensä. Siis – kuinka tutkimuksen tulokset siirtyvät yhteiskunnan voimavaroiksi? Tähän liittyy läheisesti kysymys siitä, pitäisikö meidän tutkia matematiikkaa sovelluksista lähtien vai pyrkiä ennemmin kehittämään abstraktia teoriaa, jolle saattaa myöhemmin löytyä tällä hetkellä tuntemattomia sovelluksia. Ennen näiden kysymysten käsittelyä, tarkastelemme ensin lyhyesti mitä matematiikka on.

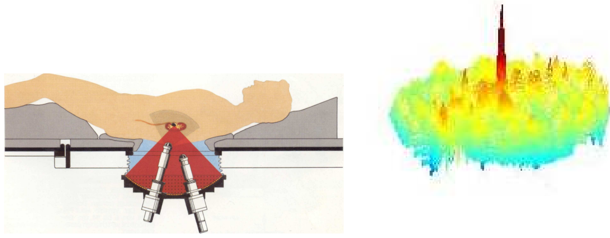
Matematiikkaa on usein verrattu kieleen, ja Galileo Galilei onkin sanonut: Luonnon lait on kirjoitettu matematiikan kielellä. Tässä vertauksessa on myös se osuva piirre, että kielen avulla kykenemme tekemään oivalluksia, jotka ilman kieltä olisivat saavuttamattomissa. Joskus matemaattinen kuvaus luonnon ilmiöistä on oikeampi kuin kuvauksen tekijä on aavistanutkaan. Esimerkiksi James Clerk Maxwell johti 1800-luvulla sähkömagnetismia koskevan teoriansa todistaakseen eetterin olemassaolon. Tässä yhteydessä eetterillä tarkoitettiin oletettua väliainetta, joka täyttäisi kaiken avaruuden ja jonka liikettä valo olisi. Tutkimuksissaan Maxwell havaitsi valoa koskevien matemaattisten laskelmien johtavan aaltoliikkeen malliin, ja olettaen, että aallot voivat edetä vain väliaineessa, Maxwell veti sen johtopäätöksen, että eetteriksi kutsutun väliaineen olisi oltava olemassa. Myöhemmin suhteellisuusteoria kumosi tämän tulkinnan, mutta tiedeyhteisö on yhä vakuuttunut siitä, että Maxwellin valon aaltoliikkemalli on oikea, vaikkei mitään eetterin kaltaista väliainetta olekaan. Tämä esimerkki osoittaa, kuinka matematiikan kieli mahdollistaa oikean ja kauniin mallin löytämisen, jopa huolimatta tulosten väärästä tulkinnasta.

Esteettisyyden tavoittelu tutkimuksessa voi paljastaa todellisuuden olemusta yllättävän tehokkaasti. Eräs 1900-luvun merkittävistä matemaatikoista, Alfred N. Whitehead totesikin: *Usein olemme lähimpänä käytäntöä ollessamme teoreettisimmillamme.* Valoittaaksemme tätä yllättävältä kuulostavaa lausetta tarkastelemme seuraavassa esimerkkejä tämänhetkisestä tutkimuksesta.



Kuva 1: Valon heijastus kahvikupissa. Kahvikupissa esiintyy kaustikki, eli käyrä, jota valonsäteet sivuavat.

Tarkastellaan valon välkettä kahvikupissa (Kuva 1). Kupissa esiintyy kaarien rajaama valoalue. Heijastumiskuvio voidaan selittää tarkastelemalla sitä, miten yhdensuuntaiset valonsäteet heijastuvat puoliympyrästä. Havaitaan, että heijastumiskuviot syntyvät samaan tapaan kuin suurennuslasissa – valo keskittyy pienelle alueelle, ikäänkuin polttopisteeksi. Koska kahvikuppi ei toimi virheettömänä suurennuslasina, valo ei keskity yhteen pisteseen, vaan pinnalle. Tätä kirkasta pintaa, jota valonsäteet sivuavat tangentiaalisesti kutsutaan kaustikiksi. Matemaatikkoja on kiinnostanut näiden polttopintojen muoto, ja modernissa geometriassa onkin kyetty luokittelemaan kaikki mahdolliset polttopinnat, jotka valo voi synnyttää. Tällainen luokittelutulos, joka tunnetaan Rene Thomin luokittelulauseena, on tyypillinen esimerkki kauniista tuloksesta. Entä, kuinka tällaistä tulosta voidaan sitten soveltaa?



Kuva 2. Ultraääniterapiassa ääniaallot fokusoituvat ja tuottavat lämpöä. Vasemmalla: Skemaattinen kuva Richard Wolf -yhtymän ultraääniaaltojen fokusoijasta. Oikealla: Kuopion yliopiston inversioryhmän simulaatioita fokusoituvan aallon amplitudista.

Lääketieteellisiä soveluksia kaustikkien luokittelulle löytyy muun muuassa kehitteillä olevasta hoitomuodosta, niin kutsutusta verettömästä kirurgiasta. Tässä esimerkiksi Kuopion yliopiston inversioryhmässä tutkitussa tekniikassa potilasta pyritään kirurgisesti leikkaamaan korkeataajuisen äänen, ultraäänen avulla. (Kuva 2)

Potilaan sisään muodostetaan alue, jossa äänen voimakkuus on erittäin iso. Voitaisiin sanoa, että kudoksen sisään muodostetaan äänestä aineeton ultraääniveitsi, joka kykenee leikkaamaan kudosta. Tarkemmin sanottuna potilaaseen suunnataan ääniaaltoja siten, että aaltojen energia keskittyy pienelle alueelle. Voimakkaat äänet tuottavat lämpöä, joka tappaa valitun kohdealueen solut. Tämä mahdollistaisi esimerkiksi aivokasvainten hoidon ilman, että instrumentteja tarvitsee työntää potilaan pään sisään.

Tällainen hoitomuoto yleistyessään saisi varmasti nykyisen kirurgian vaikuttamaan yhtä historialliselta kuin miltä kallojen poraaminen meistä nykyään vaikuttaa. Kuten äsken Maxwellin valoteoriaa käsiteltäessä todettiin, valo ja aaltoliike noudattavat samaa matemaattista mallia. Siispä tulos, joka luokittelee kaikki mahdolliset valon polttopintakuviot, luokittelee samalla kaikki mahdolliset pinnat, joille ääniaalto voi keskittyä. Kuvainnollisesti puhuen polttopintojen luokittelutulos kertoo kaikkien mahdollisten ultraääniveisten muodon eli kaikki ne instrumentit, jotka leikkaavalla lääkärillä voi olla käytössään.

Jotta potilaan pään sisään voitaisiin äänellä muodostaa ultraääniveitsi, on tietenkin tärkeää tietää tarkasti potilaan pään rakenne. Muutenhan ääniveitsi voitaisiin muodostaa väärään paikkaan, ja sen käyttäminen voisi olla kohtalokasta potilaalle. Kohtaamme siis kuvantamisongelman: Äänen nopeuden vaihtelut pään sisällä pitäisi selvittää ulkopuolelta tehtävin mittauksin.

Kuvantamistehtävä on tyypillinen esimerkki käänteisestä eli inversio-ongelmasta, jotka ovat myös Suomessa aktiivisen tutkimuksen kohteina. Tämän alueen matematiikassa tehtävänä on muodostaa kuvia annetun kappaleen, esimerkisi potilaan pään, sisäisestä rakenteesta luotaamalla sitä ulkopuolelta erilaisilla aalloilla, säteilyllä tai lämmöllä. Matemaattisesti muotoiltuna inversio-ongelmilla tarkoitetaan esimerkiksi seuraavan kaltaisia ongelmia: Annettua tyyppiä olevan osittaisdifferentiaaliyhtälön tuntemattomat kerroinfunktiot halutaan määrittää, kun yhtälön ratkaisujen arvot alueen reunalla tai jotkin niihin liittyvät tunnusluvut tunnetaan. Myös alue, jossa kerroinfunktiot halutaan selvittää voi olla tuntematon. Tällaiset ongelmat palautuvat usein geometrisiin ongelmiin, joissa tuntematon monisto halutaan selvittää moniston reunalla tehtävistä mittauksista.

Palatkaamme kuitenkin monistojen yleisistä inversio-ongelmista takaisin konkreettiseen lääketieteelliseen kuvantamiseen, erityisesti ääniaaltojen avulla. Yllättäen edelliset ultraäänikirurgissa käytetyt menetelmät löytävät sovelluksia myös kuvantamisessa. Aaltojen fokusoiminen kappaleen sisällä on osoittautunut teoreettisesti hyvin tehokkaaksi työkaluksi rakenteiden luotaamisessa. Mittauksista on matemaattista analyysin avulla mahdollista päätellä, fokusoituuko vaikkapa pään ulkopuolelta lähetetty aalto yhteen pisteeseen vai ei.

Tämänhetkisen teoreettisen tutkimuksen mukaan fokusointipisteistä voidaan muodostaa kolmiulotteinen kartta pään rakenteesta. Tulevaisuuden tutkimus yhteistyössä fyysikoiden ja insinööritieteiden edustajien kanssa tulee toivottavasti osoittamaan näiden menetelmien olevan tehokkaita myös käytännössä entistä tarkemman ultraäänikuvauksen kehittämisessä.

Edelliset esimerkit havainnollistavat sitä, kuinka matematiikan käyttö voi kytkeä yhteen eri aloja. Edellinen kahvikupissa esiintyvien polttopintojen luokittelu, joka varmasti tehtiin tavoittelematta yhteiskunnallista hyötyä, on käyttökelpoinen myös verettömän kirurgian ja lääketieteellisen kuvantamisen kehittämisessä. Usein pyrkimys todistaa mahdollisimman kauniita tuloksia johtaa tehokkaisiin ajatuksiin, jotka sovelluksissa osoittavat voimansa aivan kuten Alfred Whitehead totesikin.

Näiden esimerkkien valossa voimmekin nyt palata kysymykseen matematiikan ja sovellusten suhteesta. Mitään ristiriitaa hyödyllisten sovellusten tavoittelun ja puhtaan totuuden metsästyksen välillä ei välttämättä ole, vaan kysymys on pikemminkin tutkimustyön kahdesta eri puolesta. Ensinnäkin luovan ajattelun ja mielikuvituksen lennon synnyttämiä puhtaan matematiikan tuloksia voidaan soveltaa yllättävillä aloilla, kunhan tutkimuksen yhteydet käytäntöön havaitaan. Toisaalta matematiikka on edistynyt huomattavia askelia tutkiessaan muiden tieteiden herättämiä kysymyksiä.

On kuitenkin todettava, että toimiminen yhtäaikaa monien sovellusalojen ja puhtaan matematiikan parissa on vaikeaa yksittäiselle tutkijalle. Onneksi laaja-alaisuus, joka voi olla mahdotonta yksilölle, on mahdollista ryhmälle. Kehitys onkin kulkemassa suuntaan, jossa matematikot toimivat yhä enemmän ryhmissä. Tämä näkyy julkaisukulttuurissa: Aiemmin tutkimuksia julkaistiin yleensä yksin, nyt yhä enemmän ryhmissä. Tämä tutkimustoiminnan kasvava ryhmätoiminta tulee varmasti nopeuttamaan ja lisäämään tutkimustyön vaikutusta sovelluksissa. Tutkimusryhmien jäsenet voivat toimia linkkeinä ketjuissa, jotka kytkevät teoreettisen tutkimuksen käytännön ongelmiin. Koska tällaisessä ketjuissa tutkimuksen virikkeet syntyvät sekä sovelluksista että abstraktista teoriasta, havaitsemme, että tulevaisuuden sovellusorientoituneissa matematiikan tutkimusryhmissä on tilaa ja jopa välttämätöntä tarvetta sekä soveltajille että puhtaan matematiikan tutkijoille. Voimme siis nähdäkseni parhaiten hyödyttää yhteiskuntaa tutkimuksellamme muodostamalla laaja-alaisia ja tehokkaasti kommunikoivia ryhmiä.

Koska yliopistojen opetuksen tulee perustua tutkimukselle, voidaan edellisten tutkimusta koskevien kysymysten valossa tarkastella matematiikan opetuksen merkitystä nykyisille ja tuleville opiskelijoille, erityisesti Teknillisessä korkeakoulussa. Suoraan kysyttynä: Mihin opiskelijamme tarvitsevat matematiikkaa? Harva kyseenalaistaa korkeakoulussa opiskelevien tulevien diplomi-insinöörien tarvetta vieraiden kielten osaamiseen – kuinka he voisivat kommunikoida ilman niiden osaamista? Samoin voimme kysyä: Kuinka opiskelijamme voisivat lukea luonnon kieltä ilman matematiikan tuntemusta? Tarjoamalla kasaantuvaa tietoa, joka ei ajan kuluessa muutu, annamme opiskelijoille pohjan, jolle rakentaa koko elämänsä mittaisen tekniikan opiskelun ja kehittämisen.

On selvästi havaittavissa, että tulevaisuuden diplomi-insinöörit tarvitsevat yhä enemmän matematiikkaa, sillä monet tekniikan alat ovat voimakkaasti matematisoitumassa. Esimerkkinä tällaisesta alasta on röntgentomografia, jolla digitaaliset mittauslaitteet ovat kehittyneet aikaisemmin röntgenkuvauksessa käytettyjen filmien veroisiksi (Kuva 3). Nyt insinöörit saavat käyttöönsä numeromuotoista dataa filmikuvien sijasta. Tämä on merkittävä muutos, sillä filmikuvia ei tietenkään voinut käsitellä matemaattisesti kuten digitaalisia eli numerosarjoina esitettyjä kuvia. Tämän muutoksen aikana filmitekniikkaan erikoistuneet insinöörit äkisti totesivat olevansa alalla, jolla numeeriset menetelmät ovat merkittävä osa valmistettavasta tuotteesta. Onneksi teknillisten korkeakoulujen koulutus oli antanut heille matemaattiset valmiudet tällä muuttuneella alueella työskentelyyn. Tarve uusien algoritmien kehittämiseen sai heidät aloittamaan yhteistyön matemaatikkojen kanssa, ja tämän uuden alan ongelmat ovat osoittautuneet erittäin kiintoisiksi myös meille matemaatikoille. Vastaavanlaista laskentamenetelmien merkityksen kasvua on odotettavissa myös useilla muilla tekniikan aloilla, ja tähän muutokseen opiskelijoidemme on oltava valmiina.

Yhteenvetona matematiikan merkityksestä voi todeta, että tietoa, joka ei muutu, voidaan jatkuvasti käyttää uudelleen yhä uusin tavoin. Myös matematiikka ammentaa sovellusten kanssa tapahtuvasta vuorovaikutuksesta uusia kysymyksiä, jotka voivat muuttaa koko tieteenalaa. Toivoakseni voimme Teknillisessä korkeakoulussa luoda matematiikan ja muiden tieteiden kohtaamisareenan, jossa kaikki, fukseista professoreihin, osallistuvat tieteiden vuorovaikutukseen.

Kuva 3: Röntgenkuvausta Instrumentarium Imaging -yhtiössä, jossa filmit (vasemmalla) korvataan digitaalisilla sensoreilla (oikealla).

Lähteet:

[1] M.V. Berry: Waves and Thom's theorem. Advan. Phys. 25:1-26. 1976.

[2] C. Boyer: Tieteiden kuningatar. Osa 2: matematiikan historia, Art House, 1994

[3] I. Ekeland: Ennakoimattoman matematiikka. Art House, 2001.

[4] J. Gravesen: Catastrophe theory and caustics. SIAM Rev. 25 (1983), no. 2, 239–247.

[5] J. Grossman and P. Ion: On a portion of the well-known collaboration graph (1995). *Congressus Numerantium* 108 (1995) 129–131.

[6] M. Klinge, R. Knapas, A. Leikola, J. Strömberg: Helsingin yliopisto 1640-1990. 1. osa : Kuninkaallinen Turun akatemia 1640-1808, Otava, 1987.

[7] Y. Kurylev, M. Lassas, E. Somersalo: Focusing waves in elctromagnetic inverse problems. Proceedings of Inverse problems and spectral theory, Ed. H. Isozaki, *Contemporary Mathematics* 348 (2004) 11–22.

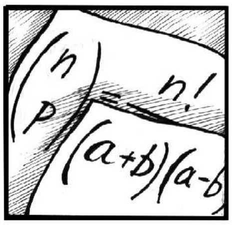
[8] J. Laari: Sivistysyliopisto – huomioita fraasin mielekkyydestä, Genesis-lehti 1/1998.

[9] M. Leinonen: Matematiikka vanhassa Turun akatemiassa. Arkhimedes N:o 2. 1952.

[10] M. Malinen, T. Huttunen and J. P. Kaipio: Thermal dose optimization method for ultrasound surgery, *Physics in Medicine and Biology* 48:745-762, 2003.

[11] Tataru, Daniel The X^s_θ spaces and unique continuation for solutions to the semilinear wave equation. *Comm. Partial Differential Equations* 21 (1996), no. 5-6, 841–887

Artikkeli perustuu kirjoittajan virkaanastujaisesitemään Teknillisessä korkeakoulussa 14.9.2004. Artikkeli on julkaistu Arkhimedes-lehden numerossa 5/2004, ja se julkaistaan Solmussa kirjoittajansa luvalla.



Solmun 2/2004 tehtävien ratkaisut

Solmussa 2/2004 oli helpohkoja tehtäviä, joiden ratkaisut esitetään seuraavassa.

1. Olkoon $S_1 = 1$, $S_2 = 2+3$, $S_3 = 4+5+6, \ldots$. Laske S_{17}.

Ratkaisu. Summia laskettaessa huomataan, että summan viimeinen luku on kolmioluku eli muotoa $\frac{n(n+1)}{2}$. Havaitaan myös, että summan ensimmäinen luku on $(n-1)$:s komioluku lisättynä 1, joillon saamme S_n:lle seuraavan lausekkeen:

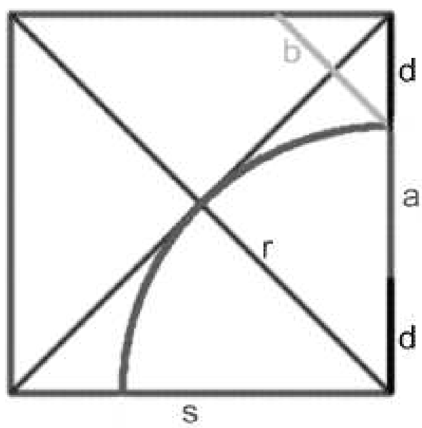
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n-1)}{2} + 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 2 + \frac{n(n-1)}{2} \\ &\quad + 3 + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n^2(n-1)}{2} + (1+2+3+4+\ldots+n) \\ &= \frac{n(n^2-n)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n^2+1)}{2} \end{aligned}$$

Näin ollen

$$S_{17} = \frac{17 \cdot (17^2+1)}{2} = \frac{17 \cdot 290}{2} = 2465.$$

2. Keskiaikaiset kivenhakkaajat käyttivät tätä metodia rakentaessaan tarkkoja kahdeksankulmioita annetun neliön sisälle. Avaa harppisi niin, että sen säde on puolet neliön halkaisijasta. Piirrä ympyrän kaari siten, että sen keskipiste on neliön kulmassa. Merkitse ne kaksi kohtaa, jotka leikkaavat neliön sivut. Tee sama kaikille neliön kulmille, jolloin saat 8 pistettä, jotka ovat kahdeksankulmion kulmia. Onko syntyvä kahdeksankulmio täysin säännöllinen kahdeksankulmio? Todista.

Ratkaisu. Merkitään neliön sivua s:llä sekä kahdeksankulmion sivujen pituuksia a:lla ja b:llä. Katso muut merkinnät alla olevasta kuvasta.



Pythagoraan lauseen mukaan

$$r = \frac{s\sqrt{2}}{2}.$$

Koska $s = r + d$, niin

$$d = s(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Kahdeksankulmion sivun pituudeksi saadaan

$$a = s - 2d = s - 2s(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = s(\sqrt{2} - 1).$$

Pythagoraan lauseen mukaan $b^2 = 2d^2$ eli $b = 2\sqrt{2}$. Näin ollen

$$b = s\sqrt{2}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = s(\sqrt{2} - 1) = a.$$

Koska neliön sisään piirretyn kahdeksankulmion kaikki sivut ovat samanpituisia ja kahdeksankulmio on kiertäen symmetrinen, on se säännöllinen.

3. Osoita, että jos kolme alkulukua, kaikki suurempia kuin 3, muodostavat aritmeettisen lukujonon, niin jonon peräkkäisten lukujen erotus on jaollinen kuudella. Esitä joitakin esimerkkejä kolmesta alkuluvusta koostuvasta aritmeettisestä lukujonosta, jotka sisältävät luvun kolme, ja näytä, että jokaisessa tapauksessa jonon peräkkäisten lukujen erotus ei ole jaollinen kuudella.

Ratkaisu. Olkoot P, Q ja S kolme alkulukua aritmeettisessä lukujonossa sekä d peräkkäisten lukujen erotus. Lukujono on siis $P, P + d, P + 2d$. Kaikki kolme alkulukua ovat suurempia kuin 3, joten niiden on oltava parittomia ja d:n on oltava parillinen, koska kahden parittoman luvun erotus on aina parillinen, $(2n + 1) - (2k + 1) = 2(n - k)$.

Laskemme modulo 6: Parillisten lukujen jäännökset modulo 6 ovat 0, 2 tai 4 ja parittomien lukujen jäännökset modulo 6 ovat 1, 3 tai 5. Tutkimiemme alkulukujen on oltava kongruentteja lukujen 1 tai 5 kanssa (mod 6), koska jos ne olisivat kongruentteja 3:n kanssa, niin ne olisivat jaollisia 3:lla, eikä kyseisiä alkulukuja olisikaan.

Olkoon P nyt kongruentti 1:llä (mod 6), siis $P + d$ on kongruentti yhden kanssa seuraavista:

$$\begin{aligned} 1 + 0 &= 1 \pmod 6, \\ 1 + 2 &= 3 \pmod 6, \\ 1 + 4 &= 5 \pmod 6. \end{aligned}$$

Koska $P + d$ on alkuluku, niin se ei voi olla kongruentti 3:n kanssa (mod 6), joten d:n on oltava kongruentti luvun 0 tai 4 kanssa (mod 6). Siis $P + 2d$ on kongruentti yhden kanssa seuraavista:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cdot 0 &= 1 \pmod 6, \\ 1 + 2 \cdot 4 &= 1 + 7 = 9 \equiv 3 \pmod 6. \end{aligned}$$

Koska myös $P + 2d$ on alkuluku, niin se ei voi olla kongruentti 3:n kanssa (mod 6), joten d on kongruentti 0:lla (mod 6).

Toisaalta, jos P on kongruentti 5:n kanssa (mod 6), niin $P + d$ on kongruentti yhden kanssa seuraavista:

$$\begin{aligned} 5 + 0 &= 5 \pmod 6, \\ 5 + 2 &= 7 \equiv 1 \pmod 6, \\ 5 + 4 &= 9 \equiv 3 \pmod 6. \end{aligned}$$

Koska $P + d$ on alkuluku, niin se ei voi olla kongruentti 3:n kanssa (mod 6), joten d:n on oltava kongruentti luvun 0 tai 2 kanssa (mod 6). Siis $P + 2d$ on kongruentti yhden kanssa seuraavista:

$$\begin{aligned} 5 + 2 \cdot 0 &= 5 \pmod 6, \\ 5 + 2 \cdot 2 &= 5 + 4 = 9 \equiv 3 \pmod 6. \end{aligned}$$

Koska myös $P + 2d$ on alkuluku, niin se ei voi olla kongruentti 3:n kanssa (mod 6), joten d on kongruentti 0:lla (mod 6).

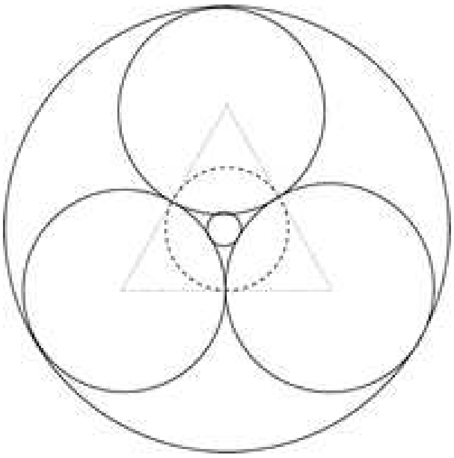
Tästä kaikesta seuraa, että d on kaikissa tapaauksissa kongruentti 0:n kanssa (mod 6), eli kun jaetaan kuudella, jäännös on 0. Siis d on jaollinen kuudella, mikä oli todistettava.

Esimerkkejä aritmeettisistä lukujonoista, jotka sisältävät luvun 3:

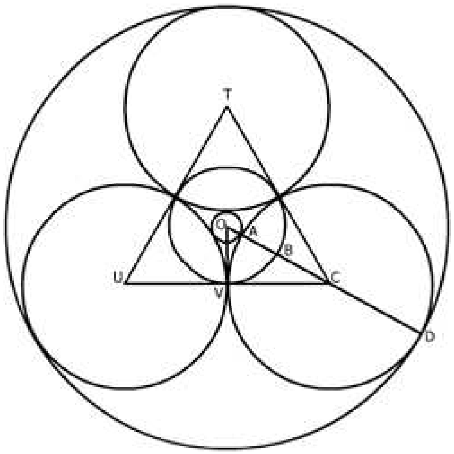
$$\begin{array}{ll} 3, 5, 7 & (d = 2), \\ 3, 7, 11 & (d = 4), \\ 3, 11, 19 & (d = 8), \\ 3, 13, 23 & (d = 10), \\ 3, 17, 31 & (d = 14), \\ 3, 23, 43 & (d = 20). \end{array}$$

Näissä esimerkeissä mikään lukujen erotus ei ole jaollinen kuudella, mutta onko tämä totta kaikille aritmeettisille lukujonoille, jotka sisältävät luvun 3? Kyllä, koska jos ensimmäinen luku on 3 ja erotus on jaollinen kuudella, olkoon se $6k$, niin toinen luku on $3 + 6k$, joka on jaollinen kolmella, eli se ei ole alkuluku. Siis lukua kolme sisältävää aritmeettistä lukujonoa, jonka peräkkäisten lukujen erotus on jaollinen kuudella, ei ole olemassa.

4. Ota kolme yksikköympyrää, jotka koskettavat toisiaan. Muodosta kolme ympyrää C_1, C_2 ja C_3, joiden säteet ovat r_1, r_2 ja r_3, kuten seuraavassa kuvassa. Ympyrät, jotka ovat tangenttina kaikille kolmelle yksikköympyrälle, ovat C_1 ja C_3, joista C_1 on pienempi. Ympyrä, joka menee yksikköympyröiden tangenttien kolmen pisteen läpi, on C_2. Etsi säteet r_1, r_2 ja r_3 ja näytä, että $r_1 r_3 = r_2^2$.



Ratkaisu. Löytääksemme kysytyt säteet $OA = r_1$, $OB = r_2$ ja $OD = r_3$ tarkastelemme alla olevaa kuviota. Kun piirrämme janan pisteestä O janan UC keskipisteeseen V, niin koska säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan, saamme $OA = r_1$. Koska kolmio TCU on tasasivuinen, niin kulma $TCU = 60°$, ja koska OC puolittaa kulman OCV, niin kulma $OCV = 30°$.



Koska $OC = OA + AC$, niin

$$\frac{CV}{OA + AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Koska $AC = CV = 1$ ja $OA = r_1$, niin

$$\frac{1}{r_1 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

joten

$$r_1 + 1 = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

ja edelleen

$$r_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

Säteen r_1 avulla voimme ratkaista r_2:n ja r_3:n. Koska $OV = r_2$, $CV = 1$ ja kulma $OCV = 30°$, niin

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

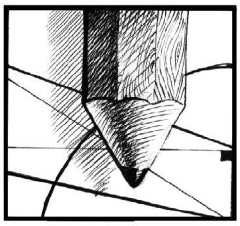
Koska $OD = OA + AC + CD$, niin

$$r_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 + 1 + 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1.$$

Nyt

$$\begin{aligned} r_1 r_3 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \\ &= \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = r_2^2. \end{aligned}$$

Lähde: *NRICH*, University of Cambridge, `http://nrich.maths.org`.



Niukan esittely

Tuomas Korppi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

∀: Hei kaikki, minä olen universaalikvanttori.

∃: Höh, *Aa*, mikäs titteli tuo nyt on olevinaan?

∀: Matemaatikot kutsuvat ylösalaisin käännettyä A:ta universaalikvanttoriksi.

∃: Jos kerran aletaan hienostelemaan, niin en minäkään sitten ole *Ee*, vaan eksistenssikvanttori.

∀: Palataan kuitenkin asiaan. Me seikkailemme kirjoitelmassa *Pelataan niukkaa.*

∃: Me pelaamme siellä kaikenlaisia pelejä.

∀: Kirjoitelma löytyy Solmu-lehden verkkoversiosta, ja sen osoite on `http://solmu.math.helsinki.fi/2005/1/`.

Klassisesta matematiikasta löytyy paljon mielenkiintoisia ongelmia ja niiden nerokkaita ratkaisuja.

∃: En minä vain ole löytänyt matematiikasta mitään mielenkiintoista. Matematiikkahan on vain kokoelma suttuisia kaavoja paperilla.

∀: Ehkä asiaan pitäisi syventyä. Kaavat ovat vain kieli asioiden ilmaisemiseen, ja ehkäpä ne kaavojen kuvailemat asiat ovat mielenkiintoisia.

∃: No siinä tapauksessa jonkun pitäisi kyllä kehittää houkuttelevampi tapa kuvata asioita.

Esimerkki tällaisesta ongelmasta on jatkuvuuden määritteleminen: Kuinka voisimme antaa matemaattisesti täsmällisen luonnehdinnan, jonka avulla voisimme erottaa jatkuvat funktiot muista funktioista?

∀: Jatkuvuus on venyvä ominaisuus. Jos jatkuvan funktion kuvaajaa venytetään eri tavoin, on tuloksena edelleen jatkuvan funktion kuvaaja.

∃: Kuinka sitten voisi *laskea*, onko funktio jatkuva? Laskun tuloshan on aina täsmällinen, eikä siinä ole mitään epämääräistä tai venyvää.

∀: En tiedä. Ehkä Tuomas kertoo, kunhan luemme hiukan pidemmälle.

Eräs ensimmäisenä mieleen tuleva tapa luonnehtia jatkuvuus on käyttää infinitesimaalisen pienen (eli äärettömän pienen) muutoksen käsitettä: Funktio on jatkuva, jos sen arvo muuttuu infinitesimaalisen vähän, kun pistettä, jossa funktion arvoa tutkitaan, muutetaan infinitesimaalisen vähän. Määritelmä toimii, jos infinitesimaalisen pienen luvun käsite saadaan kehitettyä toimivaksi. Infinitesimaalisen pienen luvun käsite saadaan kehitettyä (Abraham Robinsonin *Epästandardi analyysi*), mutta se on monimutkaista jopa matemaattisesti koulutetulle henkilölle.

$\exists$: Nyt Tuomas alkoi puhua jostain yliopistotason kamasta, joka vaatii vuosikausien perehtymistä. Jos jatkuvuuden ymmärtäminen vaatii yliopistotason opintoja, minä taidan mielummin lähteä pelaamaan pelejä.

$\forall$: Ehkä voisi löytyä joku tapa luonnehtia jatkuvuutta ilman, että täytyy viitata äärettömän pieniin lukuihin.

$\exists$: Just joo. Väitätkö muka, että voisimme viitata äärettömän pieneen muutokseen *kiertoilmauksella*, jossa itse asiassa puhutaan pelkästään äärellisen kokoisista luvuista? Vähän niin kuin poliittisesti korrektisti.

Differentiaali- ja integraalilaskennan kehitys suunnilleen vuosina 1600–1900 paljasti, että tällainen kiertoilmaus on olemassa. Funktio on jatkuva pisteessä a, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle kaikilla x, $|x - a| < \delta$, pätee $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

$\exists$: Tuosta minä en ymmärrä hölkäsen pöläystä.

$\forall$: Katso hiukan tarkemmin. Kyllä sinä ymmärrät kaikki merkit. ϵ ja δ ovat vain reaalilukumuuttujia.

$\exists$: No joo, mutta niistä muodostettu kokonaisuus on niin monimutkainen, ettei sitä pysty hahmottamaan.

Kiertoilmauksessa esiintyy kolminkertainen kvantifiointi "kaikilla ... on olemassa ... siten, että kaikilla ... pätee ...". Sen hahmottaminen on todella vaikeaa.

$\forall$: Kvantifiointi tarkoittaa ilmauksia "kaikki" ja "on olemassa".

Onneksi matemaattinen logiikka tarjoaa tavan hahmottaa sisäkkäisiä kvantifiointeja. Lause

"Kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle kaikilla x, $|x - a| < \delta$, pätee $|f(x) - f(a)| < \epsilon$"

ajatellaan pelinä, jossa pelaajat $\forall$ ja $\exists$ valitsevat vuorotellen arvoja muuttujille ϵ, δ ja x.

$\exists$: No niin, nyt päästiin asiaan.

$\forall$ yrittää valita arvot niin, että lauseen ehto $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ on epätosi, ja $\exists$ yrittää valita arvoja niin, että ehto on tosi. Lauseen totuus riippuu siitä, kummalla pelaajalla on voittostrategia. Jos voittostrategia on $\exists$:llä, on lause tosi, ja jos voittostrategia on $\forall$:lla, on lause epätosi. (Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen loogikot ovat muuten kunnostautuneet erilaisten logiikkaan liittyvien pelien tutkimuksessa.)

$\exists$: Pelataan jatkuvuuspeli pisteessä 0 funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = 5x$.

$\forall$: Valitsen ϵ:n arvon $0,1$!

$\exists$: Valitsen δ:n arvon $0,01$!

$\forall$: Valitsen x:n arvon $0,001$!

$\exists$: $|f(x) - f(0)| = 0,001 \cdot 5 = 0,005 < 0,1 = \epsilon$. Voitin!

Pelataan niukkaa-kirjoitelmaa lukiessa ei tarvitse tyytyä passiivisesti omaksumaan esitettyä asiaa, vaan lukija pääsee itse ratkomaan tehtäviä, joissa etsitään voittostrategioita jatkuvuutta kuvaaviin peleihin.

$\forall$: Ja vaikeissa kohdissa me annamme hyviä neuvoja.

$\exists$: Pelataan jatkuvuuspeli pisteessä 0 funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^{42}$.

$\forall$: Kuule, tämä teksti alkaa olla liian pitkä paperiversioon.

$\exists$: Lähdetäänkö sitten verkkoversioon pelaamaan? Osoitehan on `http://solmu.math.helsinki.fi/2005/1/`.

$\forall$: Lähdetään vaan. Vaikka lukija olisi tippunut kärryiltä tätä johdantoa lukiessa, se ei haittaa. Verkkoversiossa asiat selitetään huolellisesti alusta pitäen.

$\exists$: Eikä siellä puhuta mistään kolminkertaisista kvantifioinneista, vaan jatkuvuus määritellään suoraan pelin avulla.