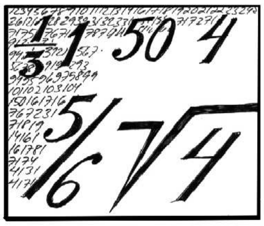

Täydellisistä luvuista

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Täydelliseksi luvuksi (*perfect number*) kutsutaan positiivista kokonaislukua, joka on itseään pienempien positiivisten tekijöidensä summa. Esimerkiksi luku 6 on täydellinen, sillä $6 = 1 + 2 + 3$. Samoin luku 28 on täydellinen, sillä sen itseään pienemmät positiiviset tekijät ovat 1, 2, 4, 7 ja 14 ja $1+2+4+7+14 = 28$. Täydelliset luvut ovat kiinnostaneet matematiikoita jo tuhansien vuosien ajan ja niihin liittyy eräitä matematiikan vanhimpia ratkaisemattomia ongelmia.

Eukleides lienee ensimmäinen täydellistä luvuista tuloksia julkaissut matematiikko. Hänen Elementansa on parhaiten tunnettu geometrian aksiomaattisesta esityksestä, mutta se sisältää myös merkittäviä lukuteorian tuloksia. Niistä tunnetuin on kaikkien aikojen kauneimmaksi matemaattiseksi todistukseksi mainittu todistus sille, että alkulukuja on ääretön määrä. Eukleides todisti myös, että kaikki muotoa

$$a = 2^{m-1}(2^m - 1)$$

olevat parilliset luvut, missä $2^m - 1$ on alkuluku, ovat täydellisiä. Vasta 1700-luvulla Euler onnistui todistamaan, että muita parillisia täydellisiä lukuja ei ole olemassa. Käymme läpi Eukleideen ja Eulerin todistukset esiteltyämme aluksi eräitä apukäsitteitä.

Aritmetiikan peruslauseen mukaan luvun $a \in \mathbb{Z}_+$ alkutekijähajotelma

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n},$$

missä a:n alkutekijät $p_1, p_2, ..., p_n$ ovat suuruusjärjestyksessä, on yksikäsitteisesti määrätty. Jos a on alkuluku, niin a tulkitaan yksitekijäiseksi tuloksi. Luvun *a kaikkien positiivisten tekijöiden* (a mukaan lukien) *summa* on

$$\sigma(a) = (1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{k_1}) \cdot (1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_n + p_n^2 + \ldots + p_n^{k_n}),$$

mikä geometrisen summan kaavan perusteella sievenee muotoon

$$\sigma(a) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{k_n+1} - 1}{p_n - 1}.$$

Alkuluvulle p on $\sigma(p) = 1 + p$ ja jos $\operatorname{syt}(a, b) = 1$, niin $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

Voimme nyt muotoilla täydellisyysehdon täsmällisesti ja todistaa Eukleideen ja Eulerin keksimät parillisia täydellisiä lukuja koskevat tulokset.

Määritelmä: *Luku $a \in \mathbb{Z}_+$ on täydellinen, jos sen kaikkien positiivisten tekijöiden summa on $2a$ eli $\sigma(a) = 2a$.*

Eukleides: *Jos $m \geq 2$ ja $2^m - 1$ on alkuluku, niin $a = 2^{m-1}(2^m - 1)$ on täydellinen luku.*

Todistus. Laskemme luvun $a = 2^{m-1}(2^m - 1)$ kaikkien positiivisten tekijöiden summan.

Koska $\mathrm{syt}(2^{m-1}, 2^m - 1) = 1$ ja $2^m - 1$ on alkuluku, on

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \sigma\bigl(2^{m-1}(2^m-1)\bigr) = \sigma\bigl(2^{m-1}\bigr)\sigma\bigl(2^m-1\bigr)\\ &= \frac{2^m-1}{2-1}(1+2^m-1) = 2^m(2^m-1) = 2a,\end{aligned}$$

joten a on täydellinen.

Euler: *Jos $a \in \mathbb{Z}_+$ on parillinen ja täydellinen luku, niin $a = 2^{m-1}(2^m - 1)$, missä $m \geq 2$ ja $2^m - 1$ on alkuluku.*

Todistus. Koska a on parillinen, voimme kirjoittaa sen muotoon $a = 2^{m-1}k$, missä $m \geq 2$ ja k on pariton. Tällöin $\mathrm{syt}(2^{m-1}, k) = 1$ ja

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \sigma\bigl(2^{m-1}k\bigr) = \sigma\bigl(2^{m-1}\bigr)\sigma(k)\\ &= \frac{2^m-1}{2-1}\sigma(k) = (2^m-1)\sigma(k).\end{aligned}$$

Toisaalta, koska a on täydellinen, on

$$\sigma(a) = 2a = 2\cdot 2^{m-1}k = 2^m k\ .$$

Näin saadaan yhtälö

$$(2^m-1)\sigma(k) = 2^m k.$$

Koska $\mathrm{syt}(2^m, 2^m - 1) = 1$, on aritmetiikan peruslauseen mukaan k:n ja $\sigma(k)$:n oltava $(2^m - 1)$:n ja 2^m:n samoja monikertoja eli on olemassa luku $c \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$k = c\cdot(2^m-1) \text{ ja } \sigma(k) = c\cdot 2^m\ .$$

Luvun k tekijöiden c ja $c\cdot(2^m - 1)$ summa on $c \cdot 2^m = \sigma(k)$, joten k:lla ei voi olla muita tekijöitä. Koska k:lla kuitenkin on tekijät 1 ja $2^m - 1$, ei ole muuta mahdollisuutta kuin $c = 1$ ja $k = 2^m - 1$ on alkuluku. Täten $a = 2^{m-1}(2^m - 1)$ ja väite on todistettu.

Yhdistämme Eukleideen ja Eulerin tulokset lauseeksi:

Lause: *Parillinen luku a on täydellinen jos ja vain jos $a = 2^{m-1}(2^m - 1)$, missä $m \geq 2$ ja $2^m - 1$ on alkuluku.*

Lause ratkaisee parillisten täydellisten lukujen ongelman lähes täydellisesti. Vain niiden lukumäärä jää arvoitukseksi. Parillisia, täydellisiä lukuja on yhtä paljon kuin muotoa $2^m - 1$ olevia alkulukuja eli *Mersennen alkulukuja*. Niitä otaksutaan olevan äärettömän monta, mutta otaksumaa ei toistaiseksi ole onnistuttu todistamaan.

Parittomista täydellisistä luvuista tiedetään vähemmän. Yhtään sellaista ei tunneta, eikä myöskään osata todistaa, että niitä ei olisi. Tiedetään kuitenkin, että lukua 10^{300} pienempiä parittomia täydellisiä lukuja ei ole olemassa. Parittomien täydellisten lukujen olemassaolo lienee matematiikan vanhin ratkaisematon ongelma.

Määrittelemme vielä *Eulerin funktion* ϕ, koska täydelliset luvut voidaan tavallaan karakterisoida sen avulla.

Määritelmä: *Jos m on positiivinen kokonaisluku, niin $\phi(m)$ on niiden lukua m pienempien positiivisten kokonaislukujen lukumäärä, joiden suurin yhteinen tekijä luvun m kanssa on 1. Erikseen sovitaan, että $\phi(1) = 1$.*

Esimerkiksi $\phi(12) = 4$. Eulerin funktiolla on seuraavia ominaisuuksia, joiden todistamisen jätämme harjoitustehtäväksi:

- Jos p on alkuluku, niin $\phi(p) = p - 1$.
- Jos p on alkuluku ja $m \in \mathbb{Z}_+$, niin $\phi(p^m) = p^m - p^{m-1}$.
- Jos p ja q ovat alkulukuja, niin $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$.
- Jos $\mathrm{syt}(a, b) = 1$, niin $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.
- Jos luvun $a \in \mathbb{Z}_+$ alkutekijähajotelma on $a = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}$, niin
$$\phi(a) = a\bigl(1-\frac{1}{p_1}\bigr)\bigl(1-\frac{1}{p_2}\bigr)\ldots\bigl(1-\frac{1}{p_n}\bigr).$$

Myös täydellisten lukujen ja Eulerin funktion välisen yhteyden todistamisen jätämme harjoitustehtäväksi:

Lause: *Luku $a \in \mathbb{Z}_+$, jonka alkutekijähajotelma on $a = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}$, on täydellinen jos ja vain jos*

$$\phi(a) = \frac{1}{2}\bigl(p_1^{k_1}-\frac{1}{p_1}\bigr)\bigl(p_2^{k_2}-\frac{1}{p_2}\bigr)\ldots\bigl(p_n^{k_n}-\frac{1}{p_n}\bigr).$$

Harjoitustehtäviä:

1. Määritä neljä pienintä täydellistä lukua.

2. Osoita, että täydellisen luvun kaikkien positiivisten tekijöiden käänteislukujen summa on 2.

3. Olkoon p alkuluku ja $m \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että p^m ei ole täydellinen luku.

4. Osoita, että jos pariton täydellinen luku on olemassa, niin sillä on vähintään kolme eri alkutekijää.

5. Olkoot $p_1, p_2, \ldots, p_n$ keskenään erisuuria, parittomia alkulukuja. Osoita, että $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ ei ole täydellinen luku.

6. Todista tekstissä esitetyt Eulerin funktion ominaisuudet sekä lause, jossa todetaan täydellisten lukujen ja Eulerin funktion välinen yhteys. Osoita erityisesti, että parilliset täydelliset luvut toteuttavat mainitussa lauseessa annetun yhtälön.

Kiitän professori Jorma Merikoskea ja dosentti Pekka Alestaloa kirjoitustani koskeneista arvokkaista huomautuksista.

Kirjallisuutta

1. J. Merikoski, K. Väänänen, T. Laurinolli, Matematiikan taito 11: Lukuteoria ja logiikka. Weilin+Göös, 1995.

2. E. Weisstein, Eric Weisstein's world of mathematics. Wolfram Research. http://mathworld.wolfram.com/

3. K. Väisälä, *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet*, Otava 1961.