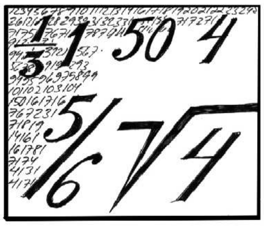


Verrannollisuudesta pintaa syvemmältä

Teuvo Laurinolli
International Baccalaureate, Tukholma

Johdanto

Yläkoulun matematiikan oppikirjan [1] tekstiä työstäessäni jouduin pohtimaan (suoraan) verrannollisuuden määritelmän muotoilua. Yleinen ehto sille, että positiivisia reaaliarvoja saavat muuttujat x ja y ovat verrannollisia, on, että kaikilla $p > 0$

(A) muuttujan x arvon p-kertaistuessa myös muuttujan y arvo p-kertaistuu.

Entäpä, jos yksinkertaisuuden vuoksi rajoituttaisiin vaatimaan ehdon voimassaolo vain jollakin tietyllä $p \neq 1$, esimerkiksi $p = 2$? Olisiko tämä matemaattisesti pätevä verrannollisuuden ehto? Eli seuraako yleinen ehto (A) esimerkiksi erityisestä ehdosta

(B) muuttujan x arvon kaksinkertaistuessa myös muuttujan y arvo kaksinkertaistuu?

On helppo nähdä, että ehto (A) on yhtäpitävä sen kanssa, että $y = cx$, missä c on positiivinen vakio (eli muuttujan y arvo, kun $x = 1$).

Kysymys voidaan matematisoida seuraavasti.

Ongelma. Olkoon f funktio, jonka määrittely- ja arvojoukkona ovat positiiviset reaaliluvut ja olkoon $f(1) = c$. Oletetaan, että

$$f(2x) = 2f(x) \text{ kaikilla } x > 0. \tag{1}$$

Onko silloin välttämättä

$$f(x) = cx \text{ kaikilla } x > 0? \tag{2}$$

Jäljempänä esitettävät vastaukset[1] ovat voimassa yleisemminkin, kun ehdossa (1) vakio 2 korvataan millä tahansa positiivisella vakiolla $p \neq 1$. On ilmeistä, että implikaation (1) $\Rightarrow$ (2) voimassaolo riippuu siitä, millaisia rajoituksia funktiolle f asetetaan. Tarkastelemme seuraavassa ensiksi tapausta, jossa f on derivoituva ja sitten tapausta, jossa f on ainoastaan jatkuva. Oletamme jatkossa ilman eri mainintaa, että funktion f määrittely- ja arvojoukkona ovat positiiviset reaaliluvut.

Tapaus 1: f derivoituva

Seuraava lause osoittaa, että tässä tapauksessa vastaus ongelmaamme on myönteinen, kun oletetaan lisäksi, että f:n derivaatalla on raja-arvo kohdassa $x = 0$.

[1] Esitin ongelman marraskuussa 2004 Jorma Merikoskelle, joka mobilisoi nopeasti pienen tutkijaryhmän pohtimaan sitä. Ryhmä kävi aiheesta vilkasta sähköpostikeskustelua marras-joulukuussa 2004. Keskustelun tulokset on esitetty kattavasti artikkelissa [2], johon tämä kirjoitus perustuu.

Lause 1. *Oletetaan, että f on kaikkialla derivoituva ja $\lim_{x\to 0} f'(x) = c$. Silloin implikaatio (1) $\Rightarrow$ (2) on voimassa.*

Todistus. Derivoimalla yhtälö $f(2x) = 2f(x)$ puolittain ja soveltamalla vasemmalla puolella ketjusääntöä saadaan $2f'(2x) = 2f'(x)$, josta edelleen $f'(2x) = f'(x)$. Tästä seuraa sijoittamalla $t = 2x$, että $f'(t) = f'(\frac{t}{2})$ ja edelleen induktiolla, että $f'(t) = f'(\frac{t}{2^n})$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

Siis

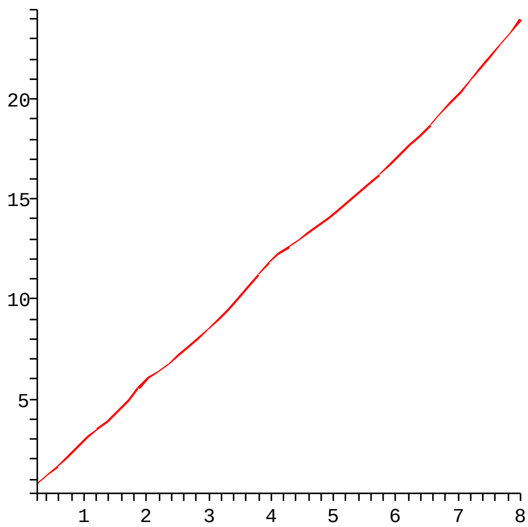
$$\begin{aligned} c = \lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{n\to\infty} f'(\tfrac{t}{2^n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} f'(t) = f'(t). \end{aligned}$$

Koska $f'(x) = c$ identtisesti, niin $f(x) = cx$ ja $c = f(1)$. $\square$

Didaktinen huomautus 1. Tarkasteltaessa empiiristen suureiden x ja y välistä riippuvuutta peruskoulutasolla voitaneen lauseen 1 oletusten katsoa olevan voimassa. Lauseen 1 tulos merkitsee silloin, että verrannollisuuden määritelmä voidaan yleisyyden kärsimättä yksinkertaistaa ehdoksi (B).

Tapaus 2: f jatkuva

Ruokahalu kasvaa syödessä. Säilyykö lause 1 voimassa, jos sen oletuksia kevennetään esimerkiksi vaatimalla funktiolta f ainoastaan jatkuvuutta? Vastaus on kielteinen, kuten seuraava vastaesimerkki osoittaa.



Kuva: Vastaesimerkin funktion kuvaaja välillä $[\frac{1}{4}, 8]$.

Vastaesimerkki. Määritellään funktio f paloittain asettamalla

$$f(x) = 2^{-n}x^2 + 2^{n+1}, \text{ kun } 2^n \leq x < 2^{n+1},$$

kaikilla kokonaisluvuilla n. Lukija voi harjoitustehtävänä todentaa, että f on kaikkialla jatkuva ja toteuttaa ehdon (1), mutta ei ehtoa (2).

Huomautus. Vastaesimerkin takana on intuitiivinen geometrinen konstruktio, jossa piirretään ensin jonkinlainen käyränpätkä funktiolle f välillä $1 \leq x < 2$ (tässä tapauksessa $f(x) = x^2 + 2$) ja siirretään sitten tämä pätkä sopivasti venytettynä väleille $2 \leq x < 4$, $4 \leq x < 8$ jne. sekä kutistettuna väleille $\frac{1}{2} \leq x < 1$, $\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$ jne. ja varmistetaan jatkuvuus liitoskohdissa.

Implikaation (1) $\Rightarrow$ (2) kaatuminen jatkuville funktioille haastaa meidät pohtimaan, onko ehtoa (1) mahdollista vahvistaa niin, että implikaatio olisi tässäkin tapauksessa pätevä. Seuraako (2) esimerkiksi ehdosta

$$(1+) \quad f(2x) = 2f(x) \text{ ja } f(3x) = 3f(x) \text{ kaikilla } x > 0$$

Lause 2 antaa tähän kysymykseen myönteisen vastauksen. Lauseen todistus perustuu kiinnostavalla tavalla seuraavaan Dirichlet'n tulokseen (ks. [3], s. 16).

Lemma. (Dirichlet) *Olkoon α irrationaaliluku. Luvut $m + n\alpha$, missä m ja n ovat mielivaltaisia kokonaislukuja, ovat tiheässä reaalilukujen joukossa. Toisin sanoen jokaisella reaalilukuvälillä, kuinka lyhyellä tahansa, on muotoa $m + n\alpha$ olevia lukuja.*

Lause 2. *Oletetaan, että f on kaikkialla jatkuva ja $f(1) = c$. Silloin implikaatio (1+) $\Rightarrow$ (2) on voimassa.*

Todistus. Olkoon $S = \{2^m 3^n \mid m \text{ ja } n \text{ ovat kokonaislukuja}\}$. Ehdosta (1+) seuraa induktiolla, että jos x kuuluu joukkoon S eli $x = 2^m 3^n$, niin $f(x) = cx$. Väite seuraa tästä, jos voimme näyttää, että S on tiheä positiivisten reaalilukujen joukossa. Jos nimittäin jatkuvat funktiot f ja cx yhtyvät f:n määrittelyjoukon tiheässä osajoukossa, niin ne yhtyvät koko määrittelyjoukossa. Mutta joukko S on tiheä positiivisten reaalilukujen joukossa jos ja vain jos sen logaritmijoukko

$$T = \ln S = \{m \ln 2 + n \ln 3 \mid m \text{ ja } n \text{ ovat kokonaislukuja}\}$$

on tiheä kaikkien reaalilukujen joukossa. Jakamalla joukon T alkiot luvulla $\ln 2$ saadaan joukko

$$U = \frac{T}{\ln 2} = \left\{ m + n\frac{\ln 3}{\ln 2} \;\middle|\; m \text{ ja } n \text{ ovat kokonaislukuja} \right\}.$$

Mutta Dirichlet'n lemman perusteella U on tiheä reaalilukujen joukossa, sillä luku $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ on irrationaalinen. Tällöin myös T on tiheä, joten väite on todistettu. $\square$

Didaktinen huomautus 2. Jos lähdetään siitä, että muuttujien x ja y riippuvuus on jatkuvaa (mutta ei välttämättä derivoituvaa), niin muuttujien verrannollisuusehto voidaan lauseen 2 nojalla pelkistää muotoon

(C) muuttujan x arvon kaksinkertaistuessa tai kolminkertaistuessa myös muuttujan y arvo kaksinkertaistuu tai kolminkertaistuu.

On helppo nähdä, että lauseen 2 ehdossa (1+) tekijät 2 ja 3 korvata millä tahansa positiivisilla luvuilla p ja q, joilla osamäärä $\frac{\ln q}{\ln p}$ on irrationaalinen. Näin on, jos luvuilla p ja q ei ole yhtään yhteistä potenssia ts. $p^m \neq q^n$ kaikilla kokonaisluvuilla m, n, minkä lukija voi harjoitustehtävänä todentaa. On siis voimassa yleinen tulos

Lause 3. *Oletetaan, että f on kaikkialla jatkuva ja $f(1) = c$. Oletetaan lisäksi, että*

$$f(px) = pf(x) \text{ ja } f(qx) = qf(x) \text{ kaikilla } x > 0,$$

missä p ja q ovat positiivisia lukuja, joilla $p^m \neq q^n$ kaikilla kokonaisluvuilla m, n. Silloin on $f(x) = cx$ kaikilla $x > 0$.

Viitteet

1. Teuvo Laurinolli, Erkki Luoma-aho, Timo Sankilampi, Kirsi Talvitie, Outi Vähä-Vahe, Laskutaito 8. WSOY. Helsinki, 2004.

2. Markku Halmetoja, Pentti Haukkanen, Teuvo Laurinolli, Jorma K. Merikoski, Timo Tossavainen and Ari Virtanen, On direct proportionality. Department of Mathematics, Statistics and Philosophy, University of Tampere, Report A 358, 2005. `http://mtl.uta.fi/matematiikka/julkaisut/OnDirectProportionality.pdf`

3. A. Browder, Mathematical Analysis: An Introduction. Springer, 1996.