Jaksollisista funktioista

Jukka Liukkonen
Yliopettaja
Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

Ympärillämme ja jopa sisällämme on runsaasti jaksollisina toistuvia ilmiöitä: päivä seuraa yötä, kesä talvea, sydän lyö tahdissa, mainingit keinuttavat venettä, varpuspöllö toistaa yks'totista vihellystään varhaiskevään hämärässä. Jaksollisen ilmiön matemaattinen malli on jaksollinen funktio. Millaisia jaksoja funktiolla voi olla? Onko jaksollisten funktioiden summa aina jaksollinen? Voiko kahden jaksollisen funktion summalla olla lyhyempiä jaksoja kuin yhteenlaskettavilla funktioilla?

Jaksollisten funktioiden perusominaisuuksia

Noudatamme yleistä käytäntöä ja merkisemme luonnollisten lukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, kokonaislukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{Z}$, rationaalilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{Q}$ ja reaalilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{R}$. Reaalilukua p sanotaan funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jaksoksi*, jos yhtälö $f(t + p) = f(t)$ toteutuu kaikilla reaaliluvuilla t. Tällöin merkitään

$$f(t + p) \equiv f(t).$$

Funktio f on *jaksollinen*, jos sillä on ainakin yksi nollasta eroava jakso. Kahden jakson p ja q summa ja erotus ovat jaksoja, sillä

$$\begin{aligned}&f(t + p + q) \equiv f(t + p) \equiv f(t),\\ &f(t + p - q) \equiv f(t + p - q + q) \equiv f(t + p) \equiv f(t).\end{aligned}$$

Valitsemalla $q = p$ ja toistamalla edellistä päättelyä havaitaan, että jakson p monikerta np on jakso kaikilla kokonaisluvuilla n.

Esimerkki 1.

(a) Funktio $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jaksollinen; jaksot muodostavat joukon $\{\, 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$.

(b) Mikä tahansa reaaliluku kelpaa vakiofunktion $f(t) \equiv c$ jaksoksi.

(c) Määrittelemme jokaista reaalilukua t kohti joukon $t + \mathbb{Q}$ asettamalla

$$t + \mathbb{Q} = \{\, t + r \mid r \in \mathbb{Q} \,\}. \tag{1}$$

Jos t_1 ja t_2 ovat reaalilukuja, on vain kaksi vaihtoehtoa: joko $t_1 + \mathbb{Q} = t_2 + \mathbb{Q}$ tai $t_1 + \mathbb{Q} \cap t_2 + \mathbb{Q} = \emptyset$. Toisin sanoen joukot (1) ovat keskenään *erillisiä*. Ehto $t_1 + \mathbb{Q} = t_2 + \mathbb{Q}$ toteutuu täsmälleen silloin, kun $t_1 - t_2 \in \mathbb{Q}$. Joukkojen (1) yhdiste on tietenkin koko $\mathbb{R}$. Tällaista kokoelmaa joukon $\mathbb{R}$ erillisiä osajoukkoja, joiden yhdiste on $\mathbb{R}$, kutsutaan joukon $\mathbb{R}$ *ositukseksi*, ja $\mathbb{R}$ on joukkojen (1) *erillinen yhdiste*. On tapana merkitä

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{\, t + \mathbb{Q} \mid t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Intuitiivisesti tuntuu selvältä, että jokaista joukon $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ alkiota $\Phi \subset \mathbb{R}$ voidaan valita edustamaan yksi joukon Φ alkio[1]; merkittäköön sitä symbolilla $\varphi(\Phi) \in \Phi$. Tällä tavoin saadaan ns. *valintakuvaus*

$$\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad \Phi \mapsto \varphi(\Phi).$$

Edellä sanotun perusteella kaikki rationaaliluvut ovat yhdistetyn kuvauksen

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \varphi(t + \mathbb{Q}).$$

jaksoja, kun taas yksikään irrationaaliluku ei ole jakso.

Jos funktion positiivisten jaksojen joukossa on pienin alkio, sitä sanotaan funktion *perusjaksoksi*. Edellisen esimerkin kuvauksilla f ja ϕ ei ole perusjaksoa. Sinifunktion perusjakso on 2π. Jatkuvan funktion jaksojen äärellinen raja-arvo on aina jakso:

Lemma 2. Jos p_n on jatkuvan funktion f jakso kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja $p_n \to p$ kun $n \to \infty$, raja-arvo p on funktion f jakso.

Todistus. Olkoon t reaaliluku. Koska $t+p_n \to t+p$ kun $n \to \infty$, jatkuvuuden perusteella $f(t+p_n) \to f(t+p)$ kun $n \to \infty$. Jos lisäksi $f(t+p_n) = f(t)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $f(t+p) = f(t)$.□

Lause 3. Jos jatkuva jaksollinen funktio ei ole vakiofunktio, sillä on perusjakso.

Todistus. Olkoon f jatkuva jaksollinen funktio. Merkitään

$$p = \inf \{\, q > 0 \mid q \text{ on funktion } f \text{ jakso} \,\};$$

ts. p on funktion f positiivisten jaksojen suurin alaraja[2]. Tapauksessa $p > 0$ luku p on perusjakso lemman 2 perusteella. Tapauksessa $p = 0$ funktio f on vakio, kuten seuraavasta ilmenee. Olkoon t_0 kiinteä reaaliluku ja $f(t_0) = s_0$. Riittää osoittaa, että $|f(t) - s_0| < \varepsilon$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ olipa $\varepsilon > 0$ miten pieni tahansa. Olkoon siis $\varepsilon > 0$. Jatkuvuuden määritelmän perusteella on olemassa $\delta > 0$, jolle $|f(t) - s_0| < \varepsilon$ kaikilla $t \in \,]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Valitsemme funktiolle f positiivisen jakson $p_\delta < \delta$. Väite seuraa siitä, että f toistaa itseään lukusuoran $\mathbb{R}$ peittävillä väleillä $[t_0 - kp_\delta, t_0 - kp_\delta + p_\delta[$, $k \in \mathbb{Z}$, sillä tällöin $|f(t) - s_0| < \varepsilon$ kaikilla $t \in [t_0 - kp_\delta, t_0 - kp_\delta + p_\delta[$. □

Kuten tarkkasilmäinen lukija huomasi, edellisen todistuksen tapauksessa $p = 0$ funktio f riitti olettaa jatkuvaksi vain yhdessä pistessä s_0. Siis jos funktiolla f on mielivaltaisen pieniä positiivisia jaksoja, ja f on jatkuva yhdessäkin pisteessä, niin f on itse asiassa vakiofunktio.

Reaalilukua $\delta > 0$ sanotaan reaalilukujen x ja y *yhteiseksi mitaksi*, jos $x = a\delta$ ja $y = b\delta$ joillakin kokonaisluvuilla a ja b. Lukuja x ja y sanotaan *yhteismitallisiksi*, jos niillä on yhteinen mitta; muussa tapauksessa x ja y ovat *yhteismitattomat*. Luku nolla on yhteismitallinen kaikkien muiden lukujen kanssa. On hyvin helppoa osoittaa, että x ja y ovat yhteismitattomat täsmälleen silloin, kun seuraava ehto on voimassa: jos $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $mx + ny = 0$, niin $m = n = 0$. Lukujen yhteismitattomuuden käsite muistuttaa siis vektorien lineaarisen riippumattomuuden käsitettä.[3]

Seuraavan lemman muotoilu ja todistus ovat lehtori Heikki Vistin käsialaa. Merkitsemme

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \{\, mx + ny \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}, \\ S_+(x,y) &= \{\, s \in S(x,y) \mid s > 0 \,\} \quad \text{ja} \\ \sigma(x,y) &= \inf S_+(x,y). \end{aligned}$$

Lemma 4. Luvut x ja y ovat yhteismitalliset, jos ja vain jos $\sigma(x,y) > 0$. Tällöin

(a) $S(x,y) = \{\, k\sigma(x,y) \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$,

(b) $\sigma(x,y)$ on lukujen x ja y yhteinen mitta, ja

(c) $\sigma(x,y)$ on tasan jaollinen kaikilla lukujen x ja y yhteisillä mitoilla.

Todistus. Olkoon δ lukujen x ja y yhteinen mitta, $a, b \in \mathbb{Z}$, $x = a\delta$, $y = b\delta$ ja $s \in S_+(x,y)$. Esitämme luvun s muodossa $s = mx + ny$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$. Koska $\delta > 0$ ja $s = (ma + nb)\delta > 0$, välttämättä $ma + nb \geq 1$ ja siis $s \geq \delta$. Näin ollen δ on joukon $S_+(x,y)$ eräs alaraja, ja $\sigma(x,y) \geq \delta > 0$. Näin olemme todistaneet, että lukujen x ja y yhteismitallisuudesta seuraa ehto $\sigma(x,y) > 0$.

Kääntäen: olkoon $\sigma(x,y) > 0$. Valitsemme alkion $s \in S_+(x,y)$, jolle $\sigma(x,y) \leq s < 2\sigma(x,y)$. Tapauksessa $\sigma(x,y) < s$ olisi olemassa $s' \in S_+(x,y)$, jolle $\sigma(x,y) \leq s' < s$. Selvästi $s - s' \in S_+(x,y)$ ja $s - s' < \sigma(x,y)$, mikä on ristiriidassa luvun $\sigma(x,y)$ määritelmän kanssa. Siis $\sigma(x,y) \geq s$, jolloin $\sigma(x,y) = s \in S_+(x,y)$ eli $\sigma(x,y) = \min S_+(x,y)$. Erityisesti $k\sigma(x,y) \in S(x,y)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Siis yhtälössä (a) oikea puoli on vasemman osajoukko. Näytämme vielä, että vasen puoli on oikean osajoukko. Jos olisi $s \in S(x,y)$ ja $k\sigma(x,y) <$

[1] Matemaattisessa mielessä kyseessä on syvällinen asia, ns. *valinta-aksiooma*.

[2] Luku a on reaalilukujoukon A *alaraja*, jos $a \leq x$ kaikilla $x \in A$. Jos joukolla on yksikin alaraja, joukkoa sanotaan *alhaalta rajoitetuksi*. Ns. *täydellisyysaksiooman* nojalla alhaalta rajoitetun epätyhjän joukon alarajojen joukossa on suurin alkio; sitä merkitään $\inf A$.

[3] Itse asiassa kysymys on juuri lineaarisesta riippumattomuudesta, jos $\mathbb{R}$ tulkitaan $\mathbb{Q}$-kertoimiseksi vektoriavaruudeksi ja x sekä y kyseisen avaruuden vektoreiksi.

$s < (k+1)\sigma(x,y)$ eräällä $k \in \mathbb{Z}$, luku $s - k\sigma(x,y)$ olisi aidosti pienempi joukon $S_+(x,y)$ alkio kuin $\sigma(x,y)$, mikä on ristiriita. Siis jokainen joukon $S(x,y)$ alkio on muotoa $k\sigma(x,y)$, $k \in \mathbb{Z}$. Täten (a) on tullut todistetuksi.

Väite (b) seuraa kohdasta (a) ja siitä, että $x, y \in S(x,y)$. Näin olemme todistaneet myös sen, että ehdosta $\sigma(x,y) > 0$ seuraa lukujen x ja y yhteismitallisuus.

Olkoot δ, a ja b kuten todistuksen alussa. Koska $\sigma(x,y) \in S(x,y)$, on olemassa luvut $m, n \in \mathbb{Z}$, joille $\sigma(x,y) = mx + ny = (ma+nb)\delta$. Tässä $ma + nb \in \mathbb{Z}$. Siten myös (c) on voimassa. □

Lemma 5. Olkoot x ja y yhteismitattomia lukuja. Tällöin $mx + ny$ saadaan mielivaltaisen lähelle nollaa valitsemalla kokonaislukukertoimet m ja n, $m \neq 0$ tai $n \neq 0$, sopivasti.

Todistus. Lemman 4 nojalla $\sigma(x,y) = 0$. □

Lemma 6. Jos funktiolla on keskenään yhteismitattomat jaksot, sillä on mielivaltaisen pieniä jaksoja.

Todistus. Olkoot p ja q funktion yhteismitattomat jaksot. Lemman 5 nojalla luku $mp + nq \neq 0$ saadaan mielivaltaisen lähelle nollaa valitsemalla kokonaislukukertoimet m ja n, $m \neq 0$ tai $n \neq 0$, sopivasti. Väite seuraa siitä, että $mp + nq$ on jakso. □

Lause 7. Jos jatkuvalla funktiolla on keskenään yhteismitattomat jaksot, funktio on vakio.

Todistus. Väite on välitön seuraus lauseesta 3 ja lemmasta 6. □

Jaksollisten funktioiden summa

Kahden jaksollisen funktion summa ei välttämättä ole jaksollinen, kuten seuraava esimerkki osoittaa:

Esimerkki 8. Tarkastelkaamme kahta kosinifunktiota

$$f(t) \equiv A\cos\left(\frac{2\pi t}{p} + \alpha\right) \text{ ja } g(t) \equiv B\cos\left(\frac{2\pi t}{q} + \beta\right),$$

joilla on yhteismitattomat perusjaksot p ja q. Jos summalla $(f+g)(t) \equiv f(t) + g(t)$ olisi jakso r, jakson yli otettu integraali olisi välttämättä nolla, sillä kummankin kosinifunktion integraalit yli kaikkien rajoitettujen välien muodostavat rajoitetun joukon. Tällöin nimittäin summan integraalin monikerta

$$\begin{aligned} n\int_t^{t+r} (f(s)+g(s))\,\mathrm{d}s &\equiv \int_t^{t+nr} (f(s)+g(s))\,\mathrm{d}s \\ &\equiv \int_t^{t+nr} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_t^{t+nr} g(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

ei voi kasvaa rajatta kokonaisluvun n kasvaessa rajatta. Siis

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \int_t^{t+r} (f(s)+g(s))\,\mathrm{d}s \\ &\equiv \int_t^{t+r} A\cos\left(\frac{2\pi s}{p}+\alpha\right)\mathrm{d}s + \int_t^{t+r} B\cos\left(\frac{2\pi s}{q}+\beta\right)\mathrm{d}s \\ &\equiv \frac{Ap}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi(t+r)}{p}+\alpha\right) - \frac{Ap}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{p}+\alpha\right) \\ &\quad + \frac{Bq}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi(t+r)}{q}+\beta\right) - \frac{Bq}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{q}+\beta\right) \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} &Ap\sin\left(\frac{2\pi t}{p}+\alpha\right) - Ap\sin\left(\frac{2\pi t}{p}+\frac{2\pi r}{p}+\alpha\right) \\ &\equiv Bq\sin\left(\frac{2\pi t}{q}+\frac{2\pi r}{q}+\beta\right) - Bq\sin\left(\frac{2\pi t}{q}+\beta\right). \end{aligned}$$

Yhtälön vasemman puolen eräs jakso on p. Toisaalta myös q on vasemman puolen jakso, sillä q on oikean puolen jakso. Vasemmalla puolella on siis jatkuva funktio, jolla on yhteismitattomat jaksot. Lauseen 7 perusteella vasen puoli on vakiofunktio, mutta se on mahdollista vain tapauksessa

$$\frac{2\pi r}{p} = m\cdot 2\pi \quad \text{eli} \quad r = mp,$$

missä $m \in \mathbb{Z}$. Oikea puoli on vakio vain, jos

$$\frac{2\pi r}{q} = n\cdot 2\pi \quad \text{eli} \quad r = nq,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin $np - mq = 0$, joten yhteismitattomuuden nojalla $n = m = 0$. Siis $r = 0$.

Johtopäätös: Jos kahdella kosinifunktiolla on yhteismitattomat perusjaksot, niiden summa ei ole jaksollinen. Sama koskee luonnollisesti myös sinifunktioita.

Yhteismitallisia perusjaksoja tarkasteltaessa yksiköksi voidaan valita yhteinen mitta. Näin ajatellen tarkastelut voidaan rajoittaa sellaisiin funktioihin, joiden perusjaksot ovat positiivisia kokonaislukuja.

Lemma 9. Olkoon funktiolla f jakso $p \in \mathbb{N}$ ja funktiolla g jakso $q \in \mathbb{N}$. Jos r on tasan jaollinen kummallakin luvuista p ja q, niin r on summan $f + g$ jakso.

Todistus. Olettakaamme, että r on sekä luvun p että luvun q monikerta. Tällöin r on sekä funktion f että funktion g jakso, joten r on summan $f + g$ jakso. □

Jos x ja $y \neq 0$ ovat reaalilukuja, merkitsemme

$$x \bmod y = x - \max\{\, my \mid m \in \mathbb{Z},\ my \le x \,\}.$$

Kokonaislukujen $m \geq 0$ ja $n > 0$ tapauksessa $m \bmod n$ tarkoittaa siis jakojäännöstä, kun m jaetaan luvulla n. Seuraava esimerkki osoittaa, että epäjatkuvan funktion ei tarvitse olla vakio, vaikka sillä onkin yhteismitattomat jaksot (vrt. lause 7).

Esimerkki 10. Olkoon ξ kiinteä irrationaaliluku. Jaamme reaaliluvut kahdeksi erilliseksi joukoksi sen perusteella, voidaanko ne esittää muodossa

$$m + n\xi, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

vai ei. Jos $m', n' \in \mathbb{Z}$ ja $m + n\xi = m' + n'\xi$, niin $m - m' = (n' - n)\xi$, jolloin luvun ξ irrationaalisuuden perusteella välttämättä $n = n'$ ja $m = m'$. Siis luvun esitys muodossa (2) on yksikäsitteinen. Määrittelemme funktiot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(t) = \begin{cases} m \bmod 3 + n\xi, & t = m + n\xi,\ m, n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{muulloin}, \end{cases}$$

ja

$$g(t) = \begin{cases} m \bmod 2 - n\xi, & t = m + n\xi,\ m, n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{muulloin}. \end{cases}$$

Funktion f eräs jakso on 3. Näytämme, että luku r, $0 < r < 3$, ei voi olla funktion f jakso. Jos $r = m + n\xi$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$, niin

$$f(1 + r) = (m + 1) \bmod 3 + n\xi \neq 1 = f(1).$$

Epäyhtälö nähdään välittömästi todeksi tutkimalla tapaukset $n = 0$ ja $n \neq 0$ erikseen. Jos r ei ole muotoa (2), myöskään $1 + r$ ei ole muotoa (2). Tällöin

$$f(1 + r) = 0 \neq 1 = f(1).$$

Siis funktiolla f on perusjakso 3. Samoin funktiolla g on perusjakso 2. On lisäksi ilmeistä, että summalla $f + g$ on jakso ξ. Lemman 9 nojalla summalla on myös jakson ξ kanssa yhteismitaton jakso $2 \cdot 3 = 6$. Lemman 6 mukaan funktiolla $f + g$ on tällöin mielivaltaisen pieniä jaksoja.

Johtopäätös: Vaikka kummallakin kahdesta funktiosta on perusjaksona kokonaisluku, funktioiden summalla voi olla ääretön määrä mielivaltaisen pieniä irrationaalisia jaksoja.

Lause 11. Olkoon funktiolla f perusjakso $p \in \mathbb{N}$ ja funktiolla g perusjakso $q \in \mathbb{N}$, missä lukujen p ja q suurin yhteinen tekijä on $\mathrm{syt}(p, q) = 1$. Jos $r = m/n$ on summan $f + g$ jakso, missä $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin m on jaollinen tulolla pq.

Todistus. Yhtälöstä

$$f(t + knr) + g(t + knr) \equiv f(t) + g(t)$$

saadaan kertoimella $k = q$

$$f(t + qm) \equiv f(t) \tag{3}$$

ja kertoimella $k = p$

$$g(t + pm) \equiv g(t). \tag{4}$$

Yhtälö (3) toteutuu vain, jos m on jaollinen luvulla p, sillä muulloin funktiolla f olisi jaksoa p lyhyempi positiivinen jakso $qm \bmod p$. Samoin (4) toteutuu vain, jos m on jaollinen luvulla q. □

Korollaari 12. Olkoon funktiolla f perusjakso $p \in \mathbb{N}$ ja funktiolla g perusjakso $q \in \mathbb{N}$, missä $\mathrm{syt}(p, q) = 1$. Jos $n \in \mathbb{N}$ ja pq/n on summan $f + g$ jakso, niin $\mathrm{syt}(pq, n) = 1$.

Esimerkki yhteismitallisista jaksoista

Korollaarin 12 innoittamina konstruimme esimerkin tapauksesta, jossa funktiolla f on perusjakso 3, funktiolla g on perusjakso 2, ja summalla $f + g$ on perusjakso $6/5$. Rakennamme esimerkin epäjatkuvista funktioista määrittelemällä niiden arvot nollaksi muualla paitsi pisteissä $n/5$, $n \in \mathbb{Z}$. Koska jokaisella funktioista f, g ja $f + g$ on jaksona 6, voimme rajoittaa tarkastelut funktioiden arvoihin pisteissä $n/5$, $0 \leq n < 30$. Lopuksi muutamme epäjatkuvat funktiot jatkuviksi operaatiolla, jota matemaatikot nimittävät konvoluutioksi; siinä jaksollisuusominaisuudet säilyvät.

Merkitsemme lyhyyden vuoksi

$$\begin{aligned} f_n &= f(n/5), \quad n = 0, 1, \ldots, 14, \\ g_n &= g(n/5), \quad n = 0, 1, \ldots, 9, \\ S_n &= (f + g)(n/5), \quad n = 0, 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Funktiolla $f+g$ on jaksona $6/5$, jos ja vain jos seuraavat yhtälöt ovat voimassa yht'aikaa:

$$\begin{aligned} S_0 &= f_0 + g_0 = f_6 + g_6 = f_{12} + g_2 && (5) \\ &= f_3 + g_8 = f_9 + g_4, \\ S_1 &= f_1 + g_1 = f_7 + g_7 = f_{13} + g_3 && (6) \\ &= f_4 + g_9 = f_{10} + g_5, \\ S_2 &= f_2 + g_2 = f_8 + g_8 = f_{14} + g_4 && (7) \\ &= f_5 + g_0 = f_{11} + g_6, \\ S_3 &= f_3 + g_3 = f_9 + g_9 = f_0 + g_5 && (8) \\ &= f_6 + g_1 = f_{12} + g_7, \\ S_4 &= f_4 + g_4 = f_{10} + g_0 = f_1 + g_6 && (9) \\ &= f_7 + g_2 = f_{13} + g_8, \\ S_5 &= f_5 + g_5 = f_{11} + g_1 = f_2 + g_7 && (10) \\ &= f_8 + g_3 = f_{14} + g_9. \end{aligned}$$

Kun yhtälöistä (5) ja (6) ratkaistaan $g_0, \ldots, g_9$ ja sijoitetaan yhtälöihin (7)–(10), saadaan

$$\begin{aligned} S_2 &= f_2 + S_0 - f_{12} = f_8 + S_0 - f_3 && (11)\\ &= f_{14} + S_0 - f_9 = f_5 + S_0 - f_0 \\ &= f_{11} + S_0 - f_6, \\ S_3 &= f_3 + S_1 - f_{13} = f_9 + S_1 - f_4 && (12)\\ &= f_0 + S_1 - f_{10} = f_6 + S_1 - f_1 \\ &= f_{12} + S_1 - f_7, \\ S_4 &= f_4 + S_0 - f_9 = f_{10} + S_0 - f_0 && (13)\\ &= f_1 + S_0 - f_6 = f_7 + S_0 - f_{12} \\ &= f_{13} + S_0 - f_3, \\ S_5 &= f_5 + S_1 - f_{10} = f_{11} + S_1 - f_1 && (14)\\ &= f_2 + S_1 - f_7 = f_8 + S_1 - f_{13} \\ &= f_{14} + S_1 - f_4. \end{aligned}$$

Yhtälöistä (11) ratkeavat

$$\begin{aligned} f_0 &= f_5 + S_0 - S_2, && (15)\\ f_3 &= f_8 + S_0 - S_2, && (16)\\ f_6 &= f_{11} + S_0 - S_2, && (17)\\ f_9 &= f_{14} + S_0 - S_2, && (18)\\ f_{12} &= f_2 + S_0 - S_2, && (19) \end{aligned}$$

ja yhtälöistä (14) ratkeavat

$$\begin{aligned} f_2 &= f_7 + S_5 - S_1, && (20)\\ f_5 &= f_{10} + S_5 - S_1, && (21)\\ f_8 &= f_{13} + S_5 - S_1, && (22)\\ f_{11} &= f_1 + S_5 - S_1, && (23)\\ f_{14} &= f_4 + S_5 - S_1. && (24) \end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöihin (12)–(13) saadaan

$$\begin{aligned} S_3 &= S_0 - S_2 + S_5, && (25)\\ S_4 &= S_1 + S_2 - S_5. && (26) \end{aligned}$$

Johtopäätös: Jos vakiot $S_0, \ldots, S_5$ toteuttavat ehdot (25) ja (26), yhtälöryhmällä (5)–(10) on äärettömän monta ratkaisua. Ne saadaan valitsemalla vapaasti arvot muuttujille f_1, f_4, f_7, f_{10}, f_{13} ja laskemalla muuttujille f_2, f_5, f_8, f_{11}, f_{14} arvot kaavoista (20)–(24). Tämän jälkeen muuttujille f_0, f_3, f_6, f_9, f_{12} lasketaan arvot kaavoista (15)–(19) ja muuttujille $g_0, \ldots, g_9$ yhtälöistä (5) ja (6). Jos vakiot $S_0, \ldots, S_5$ eivät toteuta ehtoja (25) ja (26), yhtälöryhmällä (5)–(10) ei ole yhtään ratkaisua.

Ehtojen (25) ja (26) toteutuessa ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} f_0 &= f_{10} - S_1 + S_3, & g_0 &= S_4 - f_{10},\\ f_2 &= f_7 - S_1 + S_5, & g_1 &= S_1 - f_1,\\ f_3 &= f_{13} - S_1 + S_3, & g_2 &= S_4 - f_7,\\ f_5 &= f_{10} - S_1 + S_5, & g_3 &= S_1 - f_{13},\\ f_6 &= f_1 - S_1 + S_3, & g_4 &= S_4 - f_4,\\ f_8 &= f_{13} - S_1 + S_5, & g_5 &= S_1 - f_{10},\\ f_9 &= f_4 - S_1 + S_3, & g_6 &= S_4 - f_1,\\ f_{11} &= f_1 - S_1 + S_5, & g_7 &= S_1 - f_7,\\ f_{12} &= f_7 - S_1 + S_3, & g_8 &= S_4 - f_{13},\\ f_{14} &= f_4 - S_1 + S_5, & g_9 &= S_1 - f_4. \end{aligned}$$

Esimerkki 13. Valitsemalla $S_0 = S_1 = S_2 = 0$, $S_3 = S_5 = 1$ ja $S_4 = -1$ ehdot (25) ja (26) toteutuvat. Asetamme $f_1 = 1$ ja $f_4 = f_7 = f_{10} = f_{13} = 0$. Silloin $f_0 = f_2 = f_3 = f_5 = f_8 = f_9 = f_{12} = f_{14} = 1$, $f_6 = f_{11} = 2$, $g_0 = g_1 = g_2 = g_4 = g_8 = -1$, $g_3 = g_5 = g_7 = g_9 = 0$ ja $g_6 = -2$. Funktioiden f, g ja $f + g$ arvoista saadaan seuraava taulukko:

t	$f(t)$	$g(t)$	$f(t) + g(t)$
0,0	1	-1	0
0,2	1	-1	0
0,4	1	-1	0
0,6	1	0	1
0,8	0	-1	-1
1,0	1	0	1
1,2	2	-2	0
1,4	0	0	0
1,6	1	-1	0
1,8	1	0	1
2,0	0	-1	-1
2,2	2	-1	1
2,4	1	-1	0
2,6	0	0	0
2,8	1	-1	0
3,0	1	0	1
3,2	1	-2	-1
3,4	1	0	1
3,6	1	-1	0
3,8	0	0	0
4,0	1	-1	0
4,2	2	-1	1
4,4	0	-1	-1
4,6	1	0	1
4,8	1	-1	0
5,0	0	0	0
5,2	2	-2	0
5,4	1	0	1
5,6	0	-1	-1
5,8	1	0	1

Taulukkoa ajatellaan jatkettavan jaksollisesti arvoille $t = n/5$, $n \in \mathbb{Z}$, missä $n < 0$ ja $30 \leq n$. Jos t ei ole muotoa $n/5$, $n \in \mathbb{Z}$, funktioiden arvot pisteessä t asetetaan nolliksi. Silloin funktion f perusjakso on 3, funktion g perusjakso on 2, ja funktion $f + g$ perusjakso on $6/5$.

Esimerkki 14. Muokkaamme esimerkin 13 muotoon, jossa esiintyy vain jatkuvia funktioita, tai itse asiassa ns. C^∞-funktioita eli sellaisia funktioita, joilla on kaikkien kertalukujen derivaatat. Käytämme rakennuspalikkana funktiosta

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} e^{t^2/(t^2-1)}, & -1 < t < 1, \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

skaalaamalla saatavia funktioita $\psi_a(t) = \psi(t/a)$, $a > 0$. Kuvaus ψ_a on nolla välin $]-a, a[$ ulkopuolella, se on aidosti vähenevä välillä [0,a[, $\psi(0) = 1$ ja $\psi_a(-t) = \psi_a(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Lisäksi funktiolla ψ_a on kaikkien kertalukujen derivaatat kaikissa lukusuoran pisteissä. Derivoituvuus pisteissä $-a$ ja a seuraa siitä, että eksponenttifunktio $t \mapsto e^t$ voittaa kasvussa kaikki polynomifunktiot, kun t kasvaa rajatta. Siirtämällä funktiota $\psi_{0,1}$ luvun $n/5$ verran saadaan kuvaukset

$$\theta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \theta(t) = \psi_{0,1}(t - n/5), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Funktio θ_n on nolla välin $]\, n/5 - 1/10\, ,\, n/5 + 1/10\, [$ ulkopuolella. Korvaamalla esimerkissä 13 funktio f funktiolla

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/5)\, \theta_n(t),$$

ja funktio g funktiolla

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n/5)\, \theta_n(t),$$

saamme C^∞-kuvaukset F, G ja $F + G$, joilla on samat jaksollisuusominaisuudet kuin funktioilla f, g ja $f + g$.

Lopuksi

Keksitkö itse mielenkiintoisia jaksollisiin funktioihin liittyviä ilmiöitä? Voidaanko esimerkki 8 yleistää muillekin kuin trigonometrisille funktioille? Onko olemassa funktioita f ja g, joista ensimmäisen perusjakso on 2, toisen perusjakso on 3 ja summan $f + g$ perusjakso on 6/7? Entä muut tapaukset, joita korollaari 12 ei sulje pois? Älä turhaudu! Ratkaisujen keksiminen voi olla hyvinkin hankalaa, eikä niihin kannata liikaa tuhlata aikaansa. Mikä sitten on liikaa – no jaa, riippuu kiinnostuksen määrästä. Itse käytin tämän jutun kirjoittamiseen puolet hiihtolomastani. Aikaisemmin olin miettinyt näitä asioita aina silloin tällöin muutamien kuukausien kuluessa.

Jos jokin käsite tai muu asia jäi hämäräksi, Tampereen teknillisen yliopiston verkkodokumentti *Johdatus korkeakoulumatematiikkaan* osoitteessa

`http://matwww.ee.tut.fi/jkkm/toc.html`

saattaa olla avuksi, vaikka periaatteessa lukion pitkän matematiikan pitäisi riittää.