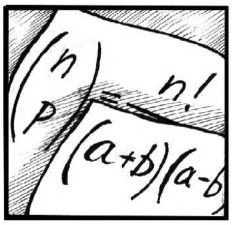

Tuomaksen tehtäviä

Tuomas Korppi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Tehtäväsi on auttaa ristinollaturnauksen järjestäjiä erilaisten turnausjärjestelmiä koskevien ongelmien kanssa. Sinun täytyy myös todistaa ratkaisusi oikeiksi.

Ensimmäinen turnausjärjestelmä on ”voittaja jatkoon” -tyyppinen: Ensin kaikki pelaajat arvotaan pareiksi, jotka pelaavat pelin ristinollaa voittoon saakka (tasapeli ei ole mahdollinen). Tämän jälkeen otteluiden voittajat pääsevät seuraavalle kierrokselle, ja häviäjät tippuvat. Jos pelaajia oli pariton määrä, pääsee ilman paria jäänyt pelaaja automaattisesti seuraavalle kierrokselle. Toisella kierroksella pelaajat arvotaan taas pareiksi, joiden pelaamien pelien voittajat pääsevät kolmannelle kierrokselle ja häviäjät tippuvat (taas, jos joku pelaaja jäi ilman paria, hän pääsee automaattisesti seuraavalle kierrokselle.) Jatketaan samoin, kunnes jäljellä on vain yksi pelaaja, turnauksen voittaja.

Alussa turnauksessa on n pelaajaa.

1. Kuinka monta peliä turnauksessa pelataan yhteensä?

2. Millä n:n arvoilla koko turnauksessa ei synny sellaista tilannetta, jossa jollekin pelaajista ei arvonnassa löytyisi paria, ja hän pääsisi automaattisesti seuraavalle kierrokselle?

3. Kuinka monta kierrosta turnauksessa on?

Turnauksen järjestäjät muuttavat kuitenkin mieltään ja päättävät järjestää turnauksen, jossa jokainen pelaa kerran jokaista vastaan.

Oletetaan, että pelaajia on parillinen määrä (pelaajien lukumäärästä ei tiedetä mitään muuta). Pelaajat istuvat pitkän pöydän molemmin puolin, ja vastakkain istuvat pelaavat keskenään. Aina ottelun jälkeen jokainen siirtyy yhden paikan verran myötäpäivään, ja taas vastakkain istuvat pelaavat keskenään. Näin jatketaan, kunnes joku pelaaja saa vastaansa pelaajan, jota vastaan hän on pelannut aiemmin. Tällöin turnaus on lopussa, ja eniten voittoja kerännyt pelaaja on (tai keränneet pelaajat ovat) turnauksen voittaja (voittajia).

A B C D E
F G H I J

Esimerkiksi A pelaa F:ää vastaan, B pelaa G:tä vastaan jne.

F A B C D
G H I J E

Tilanne sen jälkeen, kun ylemmästä kuvasta on vaihdettu paikkoja yhden kerran.

4. Toimiiko yllä esitetty turnausjärjestelmä, eli pelaavatko kaikki pelaajat kaikkia muita vastaan?

Oletetaan sitten, että pelaajia on pariton määrä (pelaajien lukumäärästä ei tiedetä mitään muuta). Nyt toimitaan samoin kuin yllä, mutta pöydän toisessa päädyssä on lepääjän paikka, jossa istuva pelaaja ei pelaa kyseisellä kierroksella.

	B	C	D
A			
	E	F	G

Esimerkiksi A lepää, B pelaa E:tä vastaan, C pelaa F:ää vastaan jne.

	A	B	C
E			
	F	G	D

Tilanne paikanvaihdon jälkeen.

5. Toimiiko yllä esitetty turnausjärjestelmä, eli pelaavatko kaikki kaikkia vastaan?

6. Jos vastasit jompaan kumpaan kysymyksistä 4 tai 5 "ei", kehitä toimiva turnausjärjestelmä: Millaisella systeemillä pelaajat kannattaisi jakaa pareihin niin, että kullakin kierroksella korkeintaan yksi pelaaja lepää, ja kaikki pelaajat pelaavat kaikkia vastaan täsmälleen yhden kerran?

Ratkaisut

1. $n-1$ peliä. Todistus: Jokaisessa pelissä tippuu yksi pelaaja, ja jokainen pelaaja paitsi voittaja tippuu kerran.

2. Pelaajien lukumäärän pitää olla kakkosen potenssi. Todistus: Kirjoitetaan $n = 2^k p$, missä p on pariton luku. Kukaan ei pääse automaattisesti seuraavalle kierrokselle jos ja vain jos kierroksen pelaajien lukumäärä on parillinen. Jos $p = 1$, ovat kierrosten pelaajien lukumäärät $2^k, 2^{k-1}, 2^{k-2}, \ldots, 2$, jonka jälkeen jäljellä on vain yksi pelaaja, voittaja. Jos $p > 1$, on $k+1$:nnella kierroksella pariton määrä p pelaajia, ja joku pääsee automaattisesti jatkoon.

3. Olkoon n' pienin kakkosen potenssi, joka on vähintään n. Nyt kierrosten lukumäärä on 2-kantainen logaritmi luvusta n', siis $\log_2 n'$. Todistus: Induktio kierrosten lukumäärän k suhteen.

4. Ei toimi. Oletetaan, että joka toisella pelaajalla on päässään musta hattu ja joka toisella valkea, ja että ensimmäisellä kierroksella mustahattuinen pelaa aina valkeahattuista vastaan. Nähdään helposti, että mustahattuiset pelaavat valkeahattuisia vastaan myös paikanvaihdon jälkeen. Näin ollen mustahattuiset eivät pelaa koskaan keskenään, eivätkä valkeahattuiset myöskään keskenään. Huomaa, että esitetty päättely toimii millä tahansa parillisella pelaajien lukumäärällä.

M	V	M	V
V	M	V	M

(Mieti tilanne paikanvaihdon jälkeen!)

5. Toimii. Syy on se, että n:n kierroksen aikana jokainen istuu kerran jokaisella paikalla. Osoitetaan, että n:n kierroksen aikana jokainen pelaa vähintään kerran jokaista vastaan. Olkoon x pelaaja, ja y toinen pelaaja. Oletetaan, että y on k paikkaa x:ää jäljessä kierrossa, jolloin x:n ja y:n välissä on $k-1$ tyhjää paikkaa. Jos k on parillinen, x ja y pelaavat vastakkain, kun x istuu ylärivissä $k/2$:nnella paikalla vasemmalta lukien. Jos k on pariton, x ja y pelaavat vastakkain, kun x istuu alarivissä $(k+1)/2$:nnella paikalla oikealta lukien. Huomaa, että päättely toimii millä tahansa parittomalla pelaajien lukumäärällä.

n:n kierroksen aikana x pelaa vähintään kerran jokaista muuta $n-1$:tä pelaajaa vastaan, ja lepää kerran. Lisäksi $n-1$:tä pelaajaa vastaan kerran pelaaminen ja kerran lepääminen vaatii n kierrosta, joten x ei ehdi pelata ketään vastaan kahta kertaa. Näin ollen turnaus kestää n kierrosta, eikä ketään pariteta uudestaan samaa pelaajaa vastaan n:n ensimmäisen kierroksen aikana.

6. Systeemi on seuraava parilliselle pelaajien lukumäärälle: Vasemmassa yläkulmassa on ankkuripelaaja A, joka istuu paikallaan koko turnauksen ajan. Muut pelaajat kiertävät myötäpäivään yhden paikan verran, paitsi että kierrossa aina hypätään ankkuripelaajan yli.

A	B	C	D
E	F	G	H

vaihtuu järjestykseksi

A	E	B	C
F	G	H	D

Systeemi toimii, koska se on olennaisesti sama kuin kohdan 5 systeemi. Nyt vain kohdan 5 lepääjä pelaa ankkuria vastaan. Koska kohdassa 5 jokainen lepää kerran (jos joku lepäisi kahdesti, hän ei ehtisi pelata kaikkia muita vastaan, jos taas joku ei lepäisi ollenkaan, hän pelaisi kahdesti samaa vastustajaa vastaan), jokainen pelaa kerran ankkuria vastaan.

Huom! Kohtien 5 ja 6 systeemit ovat oikeasti käytössä ainakin pienissä go-turnauksissa.